МРНТИ 27.01.45
УДК 511-33

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.03

Е.С. Айталиев[1], А.Т. Утегенова[1]

[1]М. Өтемісов атындағы Батыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Орал қ., Қазақстан

ФИБОНАЧЧИ ҚАТАРЫНА АРНАЛҒАН ОЛИМПИАДА ЕСЕПТЕРІН ШЫҒАРУ

Аңдатпа

Өнегелі тәрбие алуға, білім сапасын көтеруге байланысты білім саласында жоспарлы түрде белгілі бір іс – шаралар, әр түрлі жарыстар өтіп тұратындығы белгілі, соның бірі – жыл сайын өтіп тұратын кезеңдік олимпиадалар. Математикада есеп шығаруға ерекше мән беретіндігін білеміз, сондықтан олимпиада барысында оқушылардың орындаған жұмысы көбінесе олардың есептерді шығаруға қаншалықты төселгендігі арқылы бағаланады. Осы жағдайды ескере отырып, мақалада математикалық индукция әдісін қолдану арқылы Фибоначчи қатарының кейбір қасиеттерін дәлелдеу жолы және осы тақырып бойынша соңғы бес жылда олимпиадаларда кездескен есептер қарастырылып, олардың шешу әдістері көрсетілген. Қарастырылған есептер мектеп мұғалімдеріне математикадан олимпиада есептерін шығаруда көмек бола алады.

Түйін сөздер: Фибоначчи сандары, Фибоначчи қатарының қасиеттері, рекуренттік қатынас, сандық тізбек, Бине формуласы, математикалық индукция әдісі.

Аннотация

Е.С. Айталиев[1], А.Т. Утегенова[1]

[1]Западно-Казахстанский государственный университет им. М. Утемисова, г. Уральск, Казахстан

РЕШЕНИЕ ОЛИМПИАДНЫХ ЗАДАЧ НА РЯДЫ ФИБОНАЧЧИ

Как известно, в сфере образования в связи с нравственным воспитанием, повышением качества образования в плановом порядке проводятся определенные мероприятия, различные соревнования, одно из которых – ежегодные периодические олимпиады. Мы знаем, что в математике особое внимание уделяется решению задач, поэтому работа, выполненная учащимися во время олимпиады, во многом оценивается тем, насколько они уложены в решение задач. С учетом этого положения в статье рассмотрены пути подтверждения некоторых свойств ряда Фибоначчи с использованием метода математической индукции и задачи, встречающиеся на олимпиадах за последние пять лет по данной теме, а также методы их решения. Рассмотренные задачи могут помочь учителям школ в решении олимпиадных задач по математике.

Ключевые слова: числа Фибоначчи, свойства ряда Фибоначчи, рекуррентная последовательность, метод математической индукции, формула Бине.

Abstract

SOLVING OLYMPIAD PROBLEMS FOR THE FIBONACCI SERIES

Aitaliev E.S.[1], Utegenova A.T.[1]

[1]West Kazakhstan state University. M. Utemisov, Uralsk, Kazakhstan

As you know, in the field of education, in connection with moral education and improving the quality of education, certain events and various competitions are held on a planned basis, one of which is the annual periodic olympiads. We know that in mathematics, special attention is paid to solving problems, so the work done by students during the olympiad is largely evaluated by how well they fit into solving problems. Taking this into account, the article considers ways to confirm some properties of the Fibonacci series using the method of mathematical induction, as well as problems encountered at olympiads over the past five years on this topic, as well as methods for solving them. The considered problems can help school teachers in solving olympiad problems in mathematics.

Keywords: Fibonacci numbers, the properties of the Fibonacci series, recursive sequence, the method of mathematical induction, the formula of Binet.

1202 жылы итальян математигі Леонардо Пизанский (Фибоначчи есімді лақап атымен көбірек танымал Боначчи ұлы) атақты «Абақ туралы кітабы» жарық көрді (Абақ – есеп тақтасы). 459 беттен тұратын бұл көлемді еңбек сол кездегі математикалық білімнің нағыз энциклопедиясына айналды және келесі бірнеше жүзжылдықтарда математиканың Батыс Европада дамуында үлкен рөл атқарды. "Liber abaci" немесе арифметика бойынша трактат (дәл осылай атауына болады, өйткені Леонардо «абаком» деп санақ тақтасын емес, арифметиканы түсінді) арифметикалық және алгебралық мәліметтердің толық қамтылу және баяндалу тереңдігімен ерекшеленді.

Бұл кітапта сандар мен оларға қолданылатын амалдар туралы ғана емес, сонымен қатар теңдеулерді шешу жөніндегі есептерге байланысты алгебраға да түсінік берілді. Сонымен қатар кейіннен Фибоначчи сандары аталып кеткен сандық тізбектердің қасиеттері қамтылған [1].

Фибоначчи сандары туралы негізгі ұғымдар

Фибоначчи сандарының шығу тарихы төмендегі есеппен байланысты:
Бір жұп үй қояны бар. Егер бір айдан кейін үй қояндарының осы жұбы үй қоянының басқа жұбын туған болса, бір жылда үй қояндарының қанша жұбы дүниеге келетінін білу керек. Үй қояндары өзі туылғаннан кейін екінші айдан туа бастайтыны белгілі. Шешуі төмендегі кестеде:

Ай №		*Жұптар саны*
0	*1 – ші жұбы А*	*1*
1	*A → A(1)*	*2*
2	*A → A(2), A(1)*	*3*
3	*A → A(3), A(2), A(1) → A(1.1)*	*5*
4	*A → A(4), A(3), A(2) → A(2.1), A(1)→ A(1.2), A(1.1)*	*8*
5	*A → A(5), A(4), A(3) → A(3.1), A(2)→ A(2.2), A(2.1), A(1)→ A(1.3), A(1.2), A(1.1) → A (1.1.1)*	*13*
6	*A → A(6), A(5), A(4) → A(4.1), A(3)→ A(3.2), A(3.1), A(2)→ A(2.3), A(2.2), A(2.1) → A (2.1.1), A(1)→ A(1.4), A(1.3), A(1.2) → A(1.2.1), A(1.1)→ A(1.1.2), A(1.1.1)*	*21*
7	*A → A(7), A(6), A(5) → A(5.1), A(4)→ A(4.2), A(4.1), A(3)→ A(3.3), A(3.2), A(3.1) → A (3.1.1), A(2)→ A(2.4), A(2.3), A(2.2) → A(2.2.1), A(2.1)→ A(2.1.2), A(2.1.1), A(1)→ A(1.5), A(1.4), A(1.3) → A(1.3.1), A(1.2)→ A(1.2.2), A(1.2.1), A(1.1)→ A(1.1.3), A(1.1.2), A(1.1.1.)→ A(1.1.1.1)*	*34*
....	....	...

Анықтама:

Фибоначчи сандары – әрбір келесі мүшесі алдыңғы екі мүшесінің қосындысына тең болатын 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … қайталама сан тізбегінің (Фибоначчи қатары) элементтері. Фибоначчи сандарының рекурренттік қатынастары

$$u_1 = u_2 = 1,\ u_n = u_{n+1} + u_{n+2}, n \geq 2 \tag{1}$$

арқылы беріледі [2].

Ескерту: $u_{n-1} = u_n - u_{n-2}$ немесе $u_{n-2} = u_n - u_{n-1}$ (1')

Фибоначчи қатарының қасиеттерін математикалық индукция әдісін қолдану арқылы дәлелдеу:

№1. Фибоначчи қатарының 6 қасиеті:

$$u_{n+m} = u_{n-1}u_m + u_n u_{m+1} \tag{2}$$

Дәлелдеуі:

1) m=1 және m=2 болса, онда

$m = 1 \Rightarrow u_{n+1} = u_{n-1}u_1 + u_n u_2$, мұндағы, $u_1 = u_2 = 1$, $u_{n+1} = u_{n-1} + u_n$

$m = 2 \Rightarrow u_{n+2} = u_{n-1}u_2 + u_n u_3 = u_{n-1}u_2 + u_n\left(u_2 + u_1\right) = u_{n-1}u_2 + u_n u_2 + u_n u_1$

Мұнда, $u_1 = u_2 = 1$ болғандықтан, $u_{n-1}u_2 + u_n u_2 + u_n u_1 = u_{n-1} + u_n + u_n = \left(u_{n-1} + u_n\right) + u_n = u_{n+1} + u_n$

2) m=k және m=k+1, болғанда формуланы дұрыс деп ұйғарайық, яғни

$$u_{n+k} = u_{n-1}u_k + u_n u_{k+1} \text{ және } u_{n+k+1} = u_{n-1}u_{k+1} + u_n u_{k+1}$$

3) Енді m =k+2, болғанда формуланың дұрыстығын көрсетейік.

$$u_{n+k+2} = u_{n-1}u_{k+2} + u_n u_{k+3}$$

$$u_{n+k+2}=u_{n+k+1}+u_{n+k}=\left(u_{n-1}u_{k+1}+u_{n}u_{k+1}\right)+\left(u_{n-1}u_{k}+u_{n}u_{k+1}\right)=\left(u_{n-1}u_{k+1}+u_{n-1}u_{k}\right)+\left(u_{n}u_{k+2}+u_{n}u_{k+1}\right)=$$
$$u_{n-1}\left(u_{k+1}+u_{k}\right)+u_{n}\left(u_{k+2}+u_{k+1}\right)=u_{n-1}u_{k+2}+u_{n}u_{k+3}$$

№2. Фибоначчи қатарының 9 қасиеті:

$$u_n^2=u_{n+1}u_{n-1}+\left(-1\right)^{n+1} \qquad (3)$$

Дәлелдеуі:

1) $n=2\Rightarrow u_{n-1}u_{k+2}+u_{n}u_{k+3}$, мұнда, $u_1=u_2=1$, демек , $u_3=2$

2) n=k болғанда формуланы дұрыс деп ұйғарайық, яғни

$$u_k^2=u_{k+1}u_{k-1}+\left(-1\right)^{k+1}$$

3) Енді n =k+1, болғанда $u_{k+1}^2=u_{k+2}u_k+\left(-1\right)^{k+2}$ дұрыстығын көрсетейік.

Алдымен, $u_k^2=u_{k+1}u_{k-1}+\left(-1\right)^{k+1}$ теңдігінің екі жағына $u_{k+1}u_k$ қосып түрлендірейік.

$$u_k^2=u_{k+1}u_k=u_{k+1}u_{k-1}+u_{k+1}u_k+\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_k\left(u_k+u_{k+1}\right)=u_{k+1}\left(u_{k-1}+u_k\right)+\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_ku_{k+2}=u_{k+1}u_{k-1}+\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_ku_{k+2}=u_{k+1}^2+\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_{k+1}^2=u_ku_{k+2}-\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_{k+1}^2=u_{k+2}u_k+\left(-1\right)+\left(-1\right)^{k+1}$$
$$u_{k+1}^2=u_{k+2}u_k+\left(-1\right)^{k+2}$$ [3].

№3. Фибоначчи қатарының теориялық - сандық қасиеті:

Теорема. Егер n⋮m -ға бөлінсе, онда u_n - да u_m - ға бөлінеді.

Дәлелдеуі:

n = m · k , k арқылы математикалық индукциямен дәлелдейік.

1) Егер k = 1 болса, онда n=m. Демек, $u_n \vdots u_m$ - ға бөлінеді.

2) $u_{mk} \vdots u_m$ – ға бөлінеді деп ұйғарайық.

3) $u_{m(k+1)}=u_{mk+m}$

$u_{n+m}=u_{n-1}u_m+u_nu_{m+1}$ (2) формуласы арқылы $u_{mk+m}=u_{mk-1}u_m+u_{mk}u_{m+1}$

Қосындыдағы әрбір қосылғыш u_m- ға бөлінеді. Теорема толығымен дәлелденді [4]. Осы теореманың орындалуын тексерейік.

Мысал: n=18 болса, m 1,2,3,6,9,18 сандары бола алады. Олай болса Фибоначии қатарының 18 мүшесі 1,2,3,6,9,18 мүшелеріне қалдықсыз бөліну керек:

$$u_{18}\div u_1=2584\div 1=2584$$
$$u_{18}\div u_2=2584\div 1=2584$$
$$u_{18}\div u_3=2584\div 2=1292$$
$$u_{18}\div u_6=2584\div 8=323$$
$$u_{18}\div u_9=2584\div 34=76$$
$$u_{18}\div u_{18}=2584\div 2584=1$$ [5].

Фибоначчи қатарына олимпиада есептері:

№4. (Фибоначчи тізбегі) $\{u_n\}$ тізбегі

$$u_1 = u_2 = 1, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \tag{4}$$

рекуррент формуласымен берілген. n-ші мүшесінің формуласын жаз.

Шешуі: Берілген рекуренттік қатынастан $u_{n+1} - \lambda u_{n+1} = \mu\left(u_{n+1} - \lambda u_n\right)$ болатындай λ, μ сандарын таңдап алайық:

λ, μ сандарын $\begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda \cdot \mu = -1 \end{cases}$ жүйесінен табылады:

$\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ немесе $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

1 жағдай: $\lambda = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \mu = \frac{1-\sqrt{5}}{2};$

$$u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n+1} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_n\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2\left(u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1}\right) = \ldots = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(u_2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_1\right) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1} = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \tag{1}$$

2 жағдай: $\lambda = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \mu = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$

$$u_n - \frac{1+\sqrt{5}}{2}u_{n-1} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}\left(u_{n+1} - \frac{1-\sqrt{5}}{2}u_n\right) = \ldots = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(u_2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}u_1\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$$

$$u_n - \frac{1-\sqrt{5}}{2}u_{n-1} = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \tag{2}$$

Енді (1) теңдіктің екі жағын - $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$, (2) теңдіктің екі жағын $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$-ке көбейтіп қосамыз.

$\frac{1-\sqrt{5}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} = -1$ болатынын ескерсек,

$\sqrt{5}u_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ немесе $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$ болады.

Бұл формуланы Бине формуласы деп атайды.

Жауабы: $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)$

№5. Теңдікті дәлелдеңіз:

$F_{2n+1}F_{2n-1} = F_{2n}^2 + 1$

Дәлелдеуі:

1) n=1 болса, онда $n = 1 \Rightarrow F_3F_1 = F_2^2 + 1$ яғни, $2 \cdot 1 = 1^2 + 1$

2) n = k болғанда, формуланы дұрыс деп ұйғарайық, яғни $F_{2k+1}F_{2k-1}=F_{2k}^2+1$
3) Енді n =k+1, болғанда формуланың дұрыстығын көрсетейік.

$$F_{2k+3}F_{2k+1}=F_{2k+2}^2+1$$

$$F_{2k+2}^2+1=\left(F_{2k+1}F_{2k}\right)^2+1=F_{2k+1}^2+2F_{2k+1}F_{2k}+F_{2k}^2+1$$

F_{2k+2}^2+1– дің орнына $F_{2k+1}F_{2k-1}$ - ді қояйық.

Яғни,

$$F_{2k+1}^2+2F_{2k+1}F_{2k}+F_{2k}^2+1=F_{2k+1}^2+2F_{2k+1}F_{2k}+F_{2k+1}F_{2k-1}=F_{2k+1}\left(F_{2k+1}+2F_{2k}+F_{2k-1}\right)$$

$F_{2k+1}+2F_{2k}+F_{2k-1}=F_{2k+2}+F_{2k+1}=F_{2k+3}$ екенін ескерсек, $F_{2k+2}^2+1=F_{2k+3}F_{2k+1}$

№6. Кез келген натурал n үшін, $F_n-\rho(n)$ саны m-ге бөлінетіндей, $m\geq 2$ натурал саны және коэффициенттері бүтін болатын $\rho(x)$ көпмүшесі табылады ма? Бұл жерде F_n- келесі шарттармен анықталатын Фибоначчи тізбегі: $F_1=F_2=1$ және барлық натурал n үшін $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$

Шешуі:

Натурал аргументті g функциясы үшін $\nabla g(n)=g(n+1)-g(n)$ операторын қарастырсақ, онда $\Delta^{k+1}\rho=\Delta\left(\Delta\ldots(\rho)\ldots\right)=0$ болады.

Олай болса, барлық n натурал саны үшін $\rho(n)\equiv F_n\left(\mathrm{mod}\, m\right)$ теңдігі орындалады. Яғни $0\equiv F_{n-k-1}\left(\mathrm{mod}\, m\right)$. n-нің орнына, n=k+2 қоятын болсақ: $0\equiv 1\left(\mathrm{mod}\, m\right)$.

Ал бұл мүмкін емес. Себебі, $m\geq 2$ [6].

Жауабы: жоқ

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 Көбесов А. Математика тарихы / А.Көбесов.- Алматы «Қазақ университеті, 1993ж.- 237 б
2 Мартин Гарднер Математические новеллы / Г.Мартин.-Москва «Мир», 1974г.- 456 б
3 Мырзабеков С., Жаңбырбаева С. Фибоначчи сандарын есеп шығаруда пайдалану. // Ақтөбе мемлекеттік педагогикалық университетінің хабаршысы. - №3, 2010ж. -91 б.
4 Воробьев Н.Н. Числа Фибоноччи/ Н.Воробьев.- Москва «Наука», 1978 г.- 142 с.
5 Ильясов И.И., Утегенова А.Т. Фибоначчи сандары және оның қасиеттері // «Математикалық білім: жағдайы, мәселелері, болашағы» атты халықаралық ғылыми - практикалық конференция материалдары. – Ақтөбе, 2019. – Б.66-71.
6 Соңғыбай Т. Математика олипиадасына байланысты жиынтық лекция. / Т.Соңғыбай. - Астана Республикалық «Kazbilim» орталығы, 2018ж.- 42-45 б.

References:

1 Kөbesov A. (1993) Matematika tarihy [History of Mathematics]. A.Kөbesov. Almaty «Kazak universiteti, 237 (In Kazakh)
2 Martin Gardner (1974) Matematicheskie novelly [Mathematical novellas]. G.Martin.Moskva «Mir», 456. (In Russian)
3 Myrzabekov S., Zhanbyrbaeva S.(2010) Fibonachchi sandaryn esep shygaruda pajdalanu [Use of Fibonacci numbers in problem solving] Aktobe memlekettik pedagogikalyk universitetinin habarshysy. №3, 91. (In Kazakh)
4 Vorob'ev N.N.(1978) Chisla Fibonochchi [Fibonocci numbers].N.Vorob'ev- Moskva «Nauka», 142. (In Russian)
5 Il'jasov I.I., Utegenova A.T. (2019) Fibonachchi sandary zhane onyn kasietteri [Fibonocci numbers and their properties]. «Matematikalyk bilim: zhagdajy, maseleleri, bolashagy» atty halykaralyk gylymi - praktikalyk konferencija materialdary. Aktobe, 66-71. (In Kazakh)
6 Soӊgybaj T. (2018) Matematika olipiadasyna bajlanysty zhiyntyk lekcija [Concluding lecture on the Mathematical Olympiad]. T.Soӊgybaj. Astana Respublikalyk «Kazbilim» ortalygy, 42-45. (In Kazakh)