**МРНТИ 27.31.15**
**УДК 517.956**

**https://doi.org/10.51889/2022-2.1728-7901.02**

*А.Х. Жумагазиев*

*Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан*
*e-mail: charmeda@mail.ru*

# ПРИВЕДЕНИЕ К КАНОНИЧЕСКОМУ ВИДУ МНОГОПЕРИОДИЧЕСКИХ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

*Аннотация*

В статье рассматриваются многопериодические операторы дифференцирования с двумя, тремя и $m$+1 независимыми перменными. Исследуются задачи о приведении к каноническому виду этих операторов. Найдены условия при которых многопериодический оператор переходит в канонический многопериодический оператор. Определено групповое свойство характеристик многопериодического оператора. Найдено соотношение, определяющее нули многопериодического оператора. Доказаны теоремы о приводимости многопериодического оператора дифференцирования к линейному оператору с узкогиперболическим оператором. Следуя идее работ Ж.А.Сартабанова, о приведении квазилинейной системы к каноническому виду, в данной работе разработан метод приведения матричного оператора дифференцирования по $m$+1 переменным к линейному оператору с матричным оператором дифференцирования по $m$ переменным, основанный на переходе вдоль характеристики одной из независимых переменных.

**Ключевые слова:** многопериодичность, узкогиперболичность, оператор полной производной, канонический вид.

*Аңдатпа*

*Ә.Х. Жұмағазиев*
*Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан*

**КӨППЕРИОДТЫ МАТРИЦАЛЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЛАРДЫ КАНОНДЫҚ ТҮРГЕ КЕЛТІРУ**

Мақалада екі, үш және $m$+1 тәуелсіз айнымалы көппериодты диффренциалдау операторлары қарастырылады. Осы операторларды канондық түрге келтіру мәселелері зерттеледі. Көппериодты оператор канондық көппериодты операторға ауысатын шарттар табылды. Көппериодты оператор сипаттамаларының топтық қасиеті анықталды. Көппериодты оператордың нөлдерін анықтайтын қатынас табылды. Көппериодты дифференциалдау операторының тар гиперболалық операторы бар сызықтық операторға келтірілетіндігі туралы теоремалар дәлелденді. Квазисызықтық жүйені канондық түрге келтіру үшін жүзеге асырылған Ж.А.Сартабановтың жұмыстарының идеясы негізінде, бұл жұмыста $m$+1 айнымалысы бойынша матрицалық дифференциалдау операторын айнымалылардың бірінің характеристикасы бойымен ауысуға негізделген $m$ айнымалысы бойынша матрицалық дифференциалдау операторы бар сызықтық операторға келтіру әдісі жасақталды.

**Түйін сөздер:** көппериодтылық, тар гиперболалық, толық дифференциалдық оператор, канондық түрі.

*Abstract*

**REDUCTION TO THE CANONICAL FORM OF MULTIPERIODIC MATRIX DIFFERENTIATION OPERATORS**

*A.Kh. Zhumagaziyev*
*K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan*

The article deals with multiperiodic differentiation operators with two, three and $m$+1 independent variables. The problems of bringing these operators to the canonical form are investigated. Conditions are found under which a multiperiodic operator turns into a canonical multiperiodic operator. The group property of the characteristics of a multiperiodic operator is determined. The relation defining zeros of the multiperiodic operator is found. Theorems on the reducibility of a multiperiodic differentiation operator to a linear operator with a narrow hyperbolic operator are proved. Following the idea of the works of Zh.A.Sartabanov, on the reduction of a quasilinear system to a canonical form, in this paper, a method has been developed for reducing a matrix differentiation operator with $m$+1 variables to a linear operator with a matrix differentiation operator with $m$ variables, based on the transition along the characteristic of one of the independent variables.

**Keywords:** multiperiodicity, narrow hyperbolicity, total derivative operator, canonical form.

**Введение**

Известно [1-6], что общая теория уравнений в частных производных начинается с систем квазилинейных уравнений первого порядка. Их главные части, линейные относительно частных производных неизвестных по всем независимым переменным представляются в виде линейных комбинаций частных производных с матричными коэффициентами, зависящими от неизвестных переменных и искомых функций.

Особый интерес представляет случай, когда эти матричные коэффициенты содержат только независимые переменные и имеет вид, разрешенный относительно одной из частных производных. Изучение их общей теории, как правило, начинается с систем двух независимых переменных. В [1] определяется канонический вид системы и типы таких систем. В [2] наряду с подробным освещением общей теории таких систем, устанавливается связь уравнений в частных производных первого порядка с системами квазилинейных уравнений, имеющими одинаковую главную часть. Вопросам как гладких, так и обобщенных решений систем квазилинейных уравнений гиперболического типа посвящена работа [3]. Замечателен краткий обзор [4] приведенный в его вводной части, где исследование задач для основных канонических уравнений математической физики проводится с переходом к системам квазилинейных уравнений. В [5] придается особое значение переходу от основных задач к задачам для систем квазилинейных уравнений и приводится методика их решения в случае двух независимых переменных с постоянной матрицей. В этих фундаментальных трудах, а также в других исследованиях такого направления, в основном, подробно изучаются системы квазилинейных уравнений двух независимых переменных без обобщений их методов на случай $n>2$ переменных. Тайна такого обстоятельства заключается в том, что матричные коэффициенты линейной главной части системы уравнений при $n>2$ не приводится (одновременно) одним преобразованием к соответствующим каноническим видам. Это есть, так называемая размерная труднотьy, суть которой раскрыта в [6] для случая постоянных матричных коэффициентов. В данной заметке описан метод преодоления этой трудности, идея которого принадлежит профессору Ж.А.Сартабанову, реализованная в [7] к приведению квазилинейной системы к каноническому виду.

Таким образом, рассмотрим оператор $D$, который действует на $n$-векторную функцию $x=x(\tau,t)$ аргументов $\tau\in R=(-\infty,+\infty)$, $t=(t_1,...,t_m)\in R\times...\times R=R^m$ соотношением вида

$$Dx=\frac{\partial x}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k(\tau,t)\frac{\partial x}{\partial t_k} \tag{1}$$

с $n\times n$-матричными коэффициентами $A_k(\tau,t)=\lfloor a_{ij}(\tau,t)\rfloor$, $i,j=\overline{1,n}$. (1) называется матричным оператором дифференцирования, где $x=(x_1,...,x_n)$, $D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{k=1}^{m}A_k(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t_k}$.

Вопрос о приведении к каноническому виду систем с оператором (1) при $m=1$ рассмотрен в [1, стр. 73-82]. В [1] введены понятия: каноничности системы, ее эллиптичности и гиперболичности, а также гиперболичности в узком смысле.

На важность исследования систем с квазилинейным оператором $D$ обращается особое внимание в работе [5, стр. 214-221] и приводится методика решения векторного уравнения

$$Dx=0 \tag{2}$$

с постоянными матрицами $A_k$, когда $k=1$.

Задачи различных направлений для систем вида

$$Dx=f(\tau,t,x), \tag{3}$$

рассмотрены многими авторами [3, стр. 55], [4, стр. 96], [5, стр. 26].

В работе [6, стр. 146-170] изучаются вопросы теории колебаний для систем с оператором $D$ с постоянными матрицами.

**Методология исследования**

Очевидно, что изучение всякой задачи для векторного уравнения (3) начинается с исследования решений однородного уравнения (2), которые называются нулями оператора $D$.

Основным методом решения таких уравнений является метод приведения оператора к каноническому виду реализация которого при $m>1$ связана с нерешенной еще проблемой. Об этой проблеме подробно изложено в [6, стр. 159-166], суть которой сводится к вопросу отсутствия матрицы преобразования, одновременно приводящей к каноническим видам все матрицы $A_1,...,A_m$.

Если все матрицы $A_k$ имеют действительные собственные значения, то уравнение (3) называется гиперболическим.

В частности, если у каждой матрицы $A_k$ собственные значения действительные и различные, то уравнение (3) называется гиперболическим в узком смысле, для которого в постоянном случае было исследовано в работах [8-10].

**Приведение матричного оператора дифференцирования с двумя независимыми переменными к оператору полной производной**

Рассмотрим многопериодический матричный оператор дифференцирования $D$, действующий на $n$-векторную функцию $x = x(\tau,t)$ следующим образом

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A(\tau,t)\frac{\partial x}{\partial t}, \tag{4}$$

где $A(\tau,t)$ – $n\times n$-матрица, удовлетворяющая условиям периодичности вектор-периода $(\theta,\omega)$ и непрерывной дифференцируемости порядка $(1,1)$ по $(\tau,t)\in R\times R$

$$A(\tau+\theta,t+\omega) = A(\tau,t)\in C^{(1,1)}_{\tau,t}(R\times R), \tag{5}$$

где $R=(-\infty,+\infty)$; $\theta$ – период по $\tau$, $\omega$ – период по $t$, периоды, как правило, несоизмеримые.

Предположим, что характеристический многочлен

$$H(\lambda,\tau,t) = \det[A(\tau,t)-\lambda E] = 0 \tag{6}$$

с единичной $n\times n$-матрицей $E$ имеет корни

$$\lambda = \lambda_j(\tau,t), \quad j=\overline{1,n}, \tag{7}$$

которые а) либо не пересекаются

$$\lambda_j(\tau,t)\neq\lambda_i(\tau,t) \text{ при } j\neq i,$$

при любом $(\tau,t)\in R\times R$, б) либо тождественно равны

$$\lambda_j(\tau,t)=\lambda_i(\tau,t)$$

при любом $(\tau,t)\in R\times R$ и при некоторых значениях $j$, $i$ из множества $\{1,2,...,n\}$.

Это означает, что кратность $n_j$ каждого $j$-го корня $\lambda_j(\tau,t)$ постоянная, то есть, не зависит от $(\tau,t)$ при фиксированных значениях $j=\overline{1,n_0}$, $n_0\le n$.

Следовательно, имеем тождества

$$H(\lambda_j(\tau,t),\tau,t)\equiv\left(\frac{\partial}{\partial\lambda}H\right)(\lambda_j(\tau,t),\tau,t)\equiv...\equiv\left(\frac{\partial^{n_j-1}}{\partial\lambda^{n_j-1}}H\right)(\lambda_j(\tau,t),\tau,t)\equiv 0 \tag{8}$$

и неравенство

$$\left(\frac{\partial^{n_j}}{\partial\lambda^{n_j}}H\right)\left(\lambda_j(\tau,t),\tau,t\right)\neq 0. \tag{9}$$

Кроме того, предположим, что ранги $r_j$, $j=\overline{1,n_0}$ матриц

$$M_j(\tau,t)=A(\tau,t)-\lambda_j(\tau,t)E,\ j=\overline{1,n_0} \tag{10}$$

при фиксированном $j$ были постоянными:

$$r_j=\operatorname{rang} M_j(\tau,t)=const(j),\ j=\overline{1,n_0}. \tag{11}$$

Тогда, согласно [1, стр. 73-92], при этих условиях (8)-(11) матрицу $A(\tau,t)$ приводим к каноническому виду, то есть, существует неособенная гладкая матрица $K(\tau,t)$, такая что

$$K^{-1}(\tau,t)A(\tau,t)K(\tau,t)=J(\tau,t)=\operatorname{diag}[J_1,...,J_l], \tag{12}$$

где $J_k(\tau,t)$ – жорданова клетка, соответствующая собственному значению $\lambda_{jk}(\tau,t)$.

Далее, следует определить вид оператора, полученного из (4) после замены

$$x=K(\tau,t)y, \tag{13}$$

в силу следующих очевидных соотношений

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(K(\tau,t)y)=\frac{\partial}{\partial\tau}K(\tau,t)\cdot y+K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial\tau},$$
$$A(\tau,t)\frac{\partial}{\partial\tau}(K(\tau,t)y)=A(\tau,t)\frac{\partial}{\partial t}K(\tau,t)\cdot y+A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

имеем

$$D(K(\tau,t)y)=DK(\tau,t)\cdot y+K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial\tau}+A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Отсюда слева умножив обе части равентсва на $K^{-1}(\tau,t)$ имеем

$$K^{-1}(\tau,t)D(K(\tau,t)y)=$$
$$=K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)\cdot y+\left[\frac{\partial y}{\partial\tau}+K^{-1}(\tau,t)A(\tau,t)K(\tau,t)\cdot\frac{\partial y}{\partial t}\right]. \tag{14}$$

Тогда в силу (13) из (14) получим

$$\frac{\partial y}{\partial\tau}+J(\tau,t)\frac{\partial y}{\partial t}=-K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)\cdot y+K^{-1}(\tau,t)\cdot Dx.$$

Далее, обозначив

$$D^*y=\frac{\partial y}{\partial\tau}+J(\tau,t)\frac{\partial y}{\partial t}, \tag{15}$$

получим связь между оператором $D$ и оператором $D^*$ в виде

$$D^*y=-K^{-1}(\tau,t)\cdot DK(\tau,t)y+K^{-1}(\tau,t)\cdot Dx. \tag{16}$$

Если задается уравнение

$$Dx = f(\tau, t, x), \tag{17}$$

то, согласно (16), заменой (13) получим уравнение

$$D^* y = -K^{-1}(\tau,t) \cdot DK(\tau,t)y + K^{-1}(\tau,t) f(\tau,t,K(\tau,t)y) \equiv f^*(\tau,t,y) \tag{18}$$

с каноническим оператором (15).

Уравнение (18) в [1] называется каноническим для уравнения (17).

Уравнение связи (16) между исходным $D$ и каноническим $D^*$ операторами заимствовано из упомянутой работы [1] и здесь изложено в терминах операторов при дополнительном условии многопериодичности матрицы $A(\tau,t)$ по $(\tau,t)$.

Также следует отметить, что собственные значения $\lambda_j(\tau,t)$, $j=\overline{1,n_0}$ определяются как неявные функции из характеристического многочлена. Следовательно, они обладают свойством гладкости того же порядка, что и матрица $A(\tau,t)$, то есть $\lambda_j(\tau,t) \in C^{(1,1)}_{\tau,t}(R \times R)$.

Из единственности неявной функции, как следствие, имеем $(\theta,\omega)$-периодичность собственных значений $\lambda_j(\tau,t) = \lambda_j(\tau+\theta, t+\omega)$, $j=\overline{1,n_0}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *При условиях* (5), (8)-(11) *матрица* $A(\tau,t)$ *имеет собственные значения* $\lambda_j(\tau,t)$, $j=\overline{1,n_0}$, *обладающие свойствами*

$$\lambda_j(\tau,t) = \lambda_j(\tau+\theta, t+\omega), \ j=\overline{1,n_0} \tag{19}$$

*и многопериодический гладкий оператор дифференцирования* $D$ *вида* (4) *представляется через канонический многопериодический гладкий оператор* $D^*$ *вида* (15) *по формуле* (16).

В заключении, еще раз отметим, что вопросы существования и гладкости собственных значений $\lambda_j(\tau,t)$ и приведение $D$ к $D^*$ относится к результатам автора работы [1], а утверждения по части многопериодичности принадлежит данному исследованию.

Теперь предположим, что оператор $D$ является гиперболическим в узком смысле.

Следовательно, $\lambda_j(\tau,t)$, $j=\overline{1,n}$ действительные и различные.

Тогда легко определить характеристики

$$\bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0) \equiv \left(h_{11}(\tau,\tau^0,t_{11}^0), \dots, h_{1n}(\tau,\tau^0,t_{1n}^0)\right)$$

выходящие из точки $\bar{t}_1^0 = (t_{11}^0, \dots, t_{1n}^0) \in R \times \dots \times R = R^n$ при $\tau = \tau^0$, где $t_{1j} = h_{1j}(\tau,\tau^0,t_{1j}^0)$, $j=\overline{1,n}$ определены из характеристической системы

$$\frac{dt_{1j}}{d\tau} = \lambda_j(\tau, t_{1j}), \quad j=\overline{1,n}$$

с исходной точкой $(\tau^0, \bar{t}_1^0)$. Заметим, что здесь $t_{11} = \dots = t_{1n} = t_1$.

Вдоль этих характеристик канонический оператор (15) обращается в полную производную

$$D^* y(\tau, \bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0)) = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} + J(\tau, \bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0))\frac{\partial}{\partial t}\right] y(\tau, \bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0)) =$$

$$= \frac{d}{d\tau} w(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0), \tag{20}$$

где $w(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0) = y(\tau, \bar{h}_1(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0))$.

Результат сформулируем в виде следующей теоремы.

**Теорема 2.** *При условиях теоремы 1 канонический оператор* (15) *оператора* (4) *со свойством* (5) *вдоль характеристик* $\bar{t}_1 = \bar{h}_1(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0)$ *переходит в полную производную функции* $w(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0) = y(\tau, \bar{h}_1(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0))$, *которая определяется соотношением* (20).

Тогда нули оператора $D$, определяемые уравнением $Dx = 0$, на основе (16), связаны с линейным оператором

$$\frac{d}{d\tau} w(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0) = -K^{-1}(\tau, \bar{h}_1(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0)) DK(\tau, \bar{h}_1(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0)) w(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0). \tag{21}$$

Определив решение уравнения (21), заменой $\bar{t}_1^0 = \bar{h}_1(\tau^0, \tau, \bar{t}_1)$ из его решения получим $y(\tau, \bar{t}_1) = w(\tau, \tau^0, \bar{h}_1(\tau^0, \tau, \bar{t}_1))$.

Далее, заменой (13) определим нули оператора $D$.

Таким образом, согласно соотношениям (13) и (16), нули оператора $D$ находим из уравнений

$$x(\tau, t_1) = K(\tau, t_1) y(\tau, t_1),$$

$$K(\tau, t_1) D^* y(\tau, t_1) + DK(\tau, t_1) y(\tau, t_1) = 0, \tag{22}$$

где $y(\tau, \bar{t}_1) = w(\tau, \tau^0, \bar{h}_1(\tau^0, \tau, \bar{t}_1))\big|_{t_{1j} = t_1}$ определяется соотношениями (20) и (21); $\bar{t}_1 = (t_{11}, \dots, t_{1n})$, $t_{11} = \dots = t_{1n} = t_1$.

**Теорема 3.** *Нули оператора* (4) *при условиях теоремы* 2 *определяются соотношением* (22).

**Приведение матричного оператора дифференцирования с тремя независимыми переменными к оператору дифференцирования с двумя переменными**

Рассмотрим оператор дифференцирования с тремя независимыми переменными в узкогиперболическом случае

$$Dx = \frac{\partial x}{\partial \tau} + A_1(\tau, t_1, t_2)\frac{\partial x}{\partial t_1} + A_2(\tau, t_1, t_2)\frac{\partial x}{\partial t_2} \tag{23}$$

с матрицами

$$A_k(\tau + \theta, t_1 + \omega_1, t_2 + \omega_2) = A_k(\tau, t_1, t_2) \in C^{(1,1,1)}_{\tau, t_1, t_2}(R \times R \times R); \tag{24}$$

$$K_k^{-1}(\tau, t_1, t_2) A_k(\tau, t_1, t_2) K_k(\tau, t_1, t_2) = J_k(\tau, t_1, t_2),$$

$$J_k(\tau, t_1, t_2) = \mathrm{diag}\left[\lambda_{k1}(\tau, t_1, t_2), \dots, \lambda_{kn}(\tau, t_1, t_2)\right],\ k = \overline{1,2}. \tag{25}$$

Наша задача состоит в представлении оператора (23) через оператор $D^*$.

Составим характеристические системы

$$\begin{cases} \dfrac{dt_{1j}}{d\tau} = \lambda_{1j}(\tau, t_{1j}, t_{2j}), \\ \dfrac{dt_{2j}}{d\tau} = \lambda_{2j}(\tau, t_{1j}, t_{2j}), \end{cases} \quad j = \overline{1,n} \tag{26}$$

из которых определим характеристики

$$\begin{aligned} \bar{t}_1 &= \bar{h}_1(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0) \equiv (h_{11}(\tau, \tau^0, t_{11}^0, t_{21}^0), \dots, h_{1n}(\tau, \tau^0, t_{1n}^0, t_{2n}^0)) \\ \bar{t}_2 &= \bar{h}_2(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0) \equiv (h_{21}(\tau, \tau^0, t_{11}^0, t_{21}^0), \dots, h_{2n}(\tau, \tau^0, t_{1n}^0, t_{2n}^0)) \end{aligned} \tag{27}$$

причем в силу (26) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\bar{h}_k\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)=J_k\left(\tau,\bar{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right),\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)\right), \tag{28}$$

где $t_{k1}=...=t_{kn}=t_k$, $\bar{t}_k=\left(t_{k1},...,t_{kn}\right)$, $\bar{t}_k^0=\left(t_{k1}^0,...,t_{kn}^0\right)$.

Очевидно, что согласно теореме существования и единственности для характеристической системы (26) характеристики (27) обладают групповым свойством

$$\bar{h}_k\left(\tau,\tau^0,\bar{h}_1\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2\right),\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2\right)\right)=\bar{h}_k\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1,\bar{t}_2\right)=\bar{t}_k\,. \tag{29}$$

Далее, на основе (25), наряду с оператором (23) рассмотрим оператор

$$\begin{gathered}\frac{\partial y\left(\tau,t_1,t_2\right)}{\partial\tau}+J_2\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial y\left(\tau,t_1,t_2\right)}{\partial t_2}+K_2^{-1}\left(\tau,t_1,t_2\right)A_1\left(\tau,t_1,t_2\right)K_2\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial y\left(\tau,t_1,t_2\right)}{\partial t_1}+\\+K_2^{-1}\left(\tau,t_1,t_2\right)\left[A_1\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}K_2\left(\tau,t_1,t_2\right)+A_2\left(\tau,t_1,t_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}K_2\left(\tau,t_1,t_2\right)\right]y\left(\tau,t_1,t_2\right),\end{gathered} \tag{30}$$

который вдоль характеристик по переменной $t_2$ вида

$$\bar{t}_2=\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)$$

представляется через вектор-функцию

$$w\left(\tau,t_1,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)=y\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)\right) \tag{31}$$

в виде

$$\begin{gathered}\frac{\partial w\left(\tau,t_1,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)}{\partial\tau}+\tilde{K}_2^{-1}\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\tilde{A}_1\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\frac{\partial w\left(\tau,t_1\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)}{\partial t_1}+\\+\tilde{K}_2^{-1}\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\left[\tilde{A}_1\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)+\tilde{A}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\right]w\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right),\end{gathered} \tag{32}$$

где $\dfrac{\partial w}{\partial\tau}$ является полной частной производной сложной функции (31) по $\tau$, $\tilde{A}_1\left(\tau,t_1,\bar{t}_2\right)=A_1\left(\tau,t_1,\langle\alpha,\bar{t}_2\rangle\right)$, $\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{t}_2\right)=\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\langle\alpha,\bar{t}_2\rangle\right)$, с вектор-параметром $\alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$, причем $0<\alpha_j<1$, $\sum_j^n\alpha_j=1$, $\bar{t}_2=\left(t_{21},...,t_{2n}\right)$, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ – знак скалярного произведения.

Таким образом, соотношение (32) в более компактной форме записывается в виде

$$\frac{\partial w\left(\tau,t_1\right)}{\partial\tau}+A_1^*\left(\tau,t_1\right)\frac{\partial w\left(\tau,t_1\right)}{\partial t_1}+C^*\left(\tau,t_1\right)w\left(\tau,t_1\right)\equiv D^*w\left(\tau,t_1\right)+C^*\left(\tau,t_1\right)w\left(\tau,t_1\right), \tag{33}$$

где $A_1^*\left(\tau,t_1\right)$ и $C^*\left(\tau,t_1\right)$ имеют вид

$$A_1^*\left(\tau,t_1\right)=\tilde{K}_2^{-1}\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\tilde{A}_1\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right),$$

$$C^*\left(\tau,t_1\right)=\tilde{K}_2^{-1}\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\left[\tilde{A}_1\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_1}\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)+\tilde{A}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\frac{\partial}{\partial t_2}\tilde{K}_2\left(\tau,t_1,\bar{h}_2\right)\right]$$

с вектор-функцией $\bar{h}_2=\bar{h}_2\left(\tau,\tau^0,\bar{t}_1^0,\bar{t}_2^0\right)$.

Итак, имеет место теорема.

**Теорема 4.** *При условиях теоремы 1 относительно матриц* (24) *и* (25) *узкогиперболический оператор дифференцирования* (23) *по переменным* $(\tau, t_1, t_2)$ *приводим к линейному оператору* (33) *с узкогиперболическим оператором* $D^*$ *по переменным* $(\tau, t_1)$.

Узкогиперболичность оператора $D^*$ следует из того, что матрица $A_1^*(\tau, t_1)$ имеет собственные значения $\tilde{\lambda}_1(\tau, t_1) = \lambda_1\left(\tau, t_1, \left\langle \alpha, \bar{h}_2\left(\tau, \tau^0, \bar{t}_1^0, \bar{t}_2^0\right)\right\rangle\right)$, где $\lambda_1(\tau, t_1, t_2)$ – собственные значения матрицы $A_1(\tau, t_1, t_2)$.

В заключении отметим, что данную теорему можно обобщить на случай произвольного числа переменных $(\tau, t) = (\tau, t_1, ..., t_m)$ ( $m$ – любое натуральное число) по описанной выше методике.

**Приведение матричного оператора дифференцирования с *m*+1 независимыми переменными к матричному оператору дифференцирования с *m* переменными**

Рассмотрим оператор дифференцирования узкогиперболического типа с $m+1$ независимыми переменными

$$D_{(m)}x = \frac{\partial x}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m} A_k(\tau, t)\frac{\partial x}{\partial t_k} \tag{34}$$

с коэффициентными матрицами $A_k(\tau, t)$, каждая из них удовлетворяет условиям теоремы 1, причем

$$A_k(\tau + \theta, t + \omega) = A_k(\tau, t) \in C_{\tau,t}^{(1,e)}\left(R \times R^m\right), \tag{35}$$

$$K_k^{-1}(\tau, t)A_k(\tau, t)K_k(\tau, t) = J_k(\tau, t),$$

$$J_k = \mathrm{diag}\left[\lambda_{k1}(\tau, t), ...., \lambda_{kn}(\tau, t)\right]. \tag{36}$$

Поставим задачу о приведении оператора (34) к линейному оператору

$$D_{(m-1)}y = \frac{\partial y}{\partial \tau} + \sum_{k=1}^{m-1} B_k(\tau, t)\frac{\partial y}{\partial t_k} + C(\tau, t)y \tag{37}$$

на основе линейного преобразования и замены независимых переменных, где $B_k(\tau, t)$, $k = \overline{1, m-1}$ и $C(\tau, t)$ – некоторые гладкие порядка $(0, e)$ по $(\tau, t) \in R \times R^m$ матрицы.

**Теорема 5.** *Пусть выполнены условия* (35) *и* (36). *Тогда при условиях теоремы 1 относительно* $A_k(\tau, t)$, $k = \overline{1, m}$, *многопериодический матричный оператор* (34) *приводим к матричному оператору дифференцирования вида* (37).

Доказательство теоремы 5 можно провести аналогично методу доказательства теоремы 4.

**Заключение**

В заключении отметим, что метод, предложенный в данном разделе по приведению многопериодичного матричного оператора дифференцирования по $m+1$ переменным к каноническому оператору дифференцирования по $m$ переменным имеет широкую перспективу в решении вопроса интегрирования уравнений с частными производными. Приведенная теорема 5 является началом одного из перспективных направлений развития исследования данной работы.

*Список использованной литературы:*


1 *Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. М.-Л.: ГИТТЛ, 1961. -400с.*

2 *Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964. -830с.*

3 *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложение к газовой динамике. М.: Наука, 1968. -592с.*

4 *Годунов С.К. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1979. -392с.*

5 *Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров. М.: Мир, 1985. -384с.*

*6 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1979.- 179с.*

*7 Сартабанов Ж.А. Метод редукции в исследовании проблемы приводимости линейных многопериодических систем с операторами дифференцирования по направлениям главной диагонали // IX международная научная конференция «Проблемы дифференциальных уравнений, анализа и алгебры», Актобе, 2022, 4-7.*

*8 Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2022, №1(12), 32-48.*

*9 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, №2(98), 125-140.*

*10 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. On one method of research of multiperiodic solution of block-matrix type system with various differentiation operators // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan Al-Farabi Kazakh National University. Series physico-mathematical, 2020, №2(330), 149-158.*

*References:*

*1 Petrovskij I.G. (1961) Lekcii ob uravnenijah s chastnymi proizvodnymi [Lectures on partial differential equations]. M.-L.: GITTL, 400. (In Russian)*

*2 Kurant R. (1964) Uravnenija s chastnymi proizvodnymi [Partial differential equations]. M.: Mir, 830. (In Russian)*

*3 Rozhdestvenskij B.L., Janenko N.N. (1968) Sistemy kvazilinejnyh uravnenij i ih prilozhenie k gazovoj dinamike [Systems of quasi-linear equations and their application to gas dynamics]. M.: Nauka, 592. (In Russian)*

*4 Godunov S.K. (1979) Uravnenija matematicheskoj fiziki [Equations of mathematical physics]. M.: Nauka, 392. (In Russian)*

*5 Farlou S. (1985) Uravnenija s chastnymi proizvodnymi dlja nauchnyh rabotnikov i inzhenerov [Partial Differential Equations for Scientists and Engineers]. M.: Mir, 384. (In Russian)*

*6 Umbetzhanov D.U. (1979) Pochti periodicheskie reshenija jevoljucionnyh uravnenij [Almost periodic solutions of evolution equations]. Alma-Ata: Nauka, 179. (In Russian)*

*7 Sartabanov Zh.A. (2022) Metod redukcii v issledovanii problemy privodimosti linejnyh mnogoperiodicheskih sistem s operatorami differencirovanija po napravlenijam glavnoj diagonali [Reduction method in the study of the problem of reducibility of linear multiperiodic systems with differentiation operators in the directions of the main diagonal].IX mezhdunarodnaja nauchnaja konferencija «Problemy differencial'nyh uravnenij, analiza i algebry», Aktobe, 4-7. (In Russian)*

*8 Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. (2022) On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system. Azerbaijan Journal of Mathematics, №1(12), 32-48.*

*9 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. (2020) Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients. Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, №2(98), 125-140.*

*10 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. (2020) On one method of research of multiperiodic solution of block-matrix type system with various differentiation operators. News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan Al-Farabi Kazakh National University. Series physico-mathematical, №2(330), 149-158.*