МРНТИ 27.41.19
УДК 519.6

https://doi.org/10.51889/2022-2.1728-7901.07

*М.А. Бектемесов[1], С.И. Кабанихин[2,3], Е.Ж. Курышбаев[1]**

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия
[3]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
**e-mail:yerke1984@gmail.com*

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ ЗАДАЧИ КОШИ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Аннотация

В статье рассматривается возможность получения фрактальных изображений, которые формируются вычислением относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши с помощью итерационных процессов. Построенный графический алгоритм позволил смоделировать изображение множества для изучения, например, для выявления областей устойчивости решения задачи. При рассмотрении связи фракталов с корректностью задач математической физики было выявлено, что при определенном цифровом кодировании распределение относительной погрешности дает причудливое повторяющееся изображение и самоподобие. Полученная модель позволяет определить характер изменений множества в зависимости от исходных параметров, таких как шаг, точность, границы комплексной плоскости. Приводится компьютерный графический анализ указанных явлений. Компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границ области.

Ключевые слова: фракталы, дифференциальные уравнения, относительная погрешность, математическое моделирование, фрактальный алгоритм.

Аңдатпа

М.А. Бектемесов[1], С.И. Кабанихин[2,3], Е.Ж. Құрышбаев[1]
[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]РҒА СБ Есептеу математикасы және математикалық геофизика институты, Новосибирск қ., Ресей
[3]Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск қ., Ресей

КОШИ АЙЫРЫМДЫҚ ЕСЕБІНІҢ ОРНЫҚТЫЛЫҚ АЙМАҒЫН КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕЙНЕЛЕУ

Мақалада итерациялық процестерді пайдалана отырып, Коши есебін шешуге арналған әр түрлі шекті-айырымдық сұлбаларының салыстырмалы қателігін есептеу арқылы қалыптасатын фракталдық кескіндерді алу мүмкіндігі қарастырылады. Құрылған графикалық алгоритм зерттеуге арналған жиынтық бейнесін имитациялауға, мысалы, есепті шешу үшін тұрақтылық аймақтарын анықтауға мүмкіндік берді. Фракталдардың байланысы мен математикалық физика есептерінің дұрыстығын қарастырған кезде белгілі бір цифрлық кодтау кезінде салыстырмалы қатенің таралуы таңқаларлық қайталанатын бейне мен өзіндік ұқсастық беретіні анықталды. Алынған модель қадам, дәлдік, күрделі жазықтықтың шекаралары сияқты бастапқы параметрлерге байланысты жиынтықтағы өзгерістердің сипатын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл құбылыстардың компьютерлік графикалық талдауы берілген. Компьютерді микроскоптың бір түріне айналдырып, оны аймақтың шекараларының мінез-құлқын бақылау үшін пайдалануға болады.

Түйін сөздер: фракталдар, дифференциалдық теңдеулер, салыстырмалы қателік, математикалық модельдеу, фракталдық алгоритм.

Abstract

VISUALIZATION OF THE STABILITY AREA OF THE CAUCHY DIFFERENCE PROBLEM IN THE COMPLEX PLANE

Bektemessov M.A.[1], Kabanikhin S.I.[2,3], Kuryshbayev YE.ZH.[1]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[3]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

The article considers the possibility of obtaining fractal images, which forms by calculating the relative error of various finite-difference schemes for solving the Cauchy problem using iterative processes. The constructed graphical algorithm made it possible to simulate the image of the set for study, for example, to identify areas of stability for solving the problem. When considering the connection between fractals and the correctness of problems of mathematical physics, the authors found that, with a certain digital coding, the distribution of the relative error gives a bizarre repetitive image and self-similarity. The resulting model allows you to determine the nature of the changes in the set depending on the initial parameters, such as step, accuracy, boundaries of the complex plane. A computer graphical analysis of these phenomena is given. The computer can be turned into a kind of microscope and use it to observe the behavior of the boundaries of the region.

Keywords: fractals, differential equations, approximation error, mathematical modeling, fractal algorithm.

Введение

Слово «фрактал» было придумано Бенуа Мандельбротом, это латинское слово fractus, от которого произошли слова – дробленый, сломанный, разбитый. К концепции фрактала можно подходить с разных точек зрения, однако общепринято считать, что фрактал – это геометрический объект, состоящий из элементов, таких же геометрических, переменного размера и ориентации, но похожих по внешнему виду. Особенность многих фрактальных объектов заключается в том, что если увеличивать фрактальный объект, элементы, которые появляются снова, будут иметь тот же вид независимо от масштаба, который был использован. Тот факт, что каждый элемент более высокого порядка, в свою очередь, состоит из элементов более низкого порядка, как это происходит с ветвями дерева, является тем, что придает фракталам рекурсивную структуру. Поэтому для графического представления фрактала необходимо найти связь или закон рекурсии между повторяющимися формами, то есть найти элементарный объект и закон их образования, а затем установить графический алгоритм [1].

Фрактальные объекты обладают двумя фундаментальными характеристиками: самоподобие и фрактальная размерность. Если теоретическая фрактальная размерность множества превышает топологическую размерность, то считают, что множество имеет фрактальную геометрию [2].

Фрактальные объекты существовали задолго до формального развития фрактальной геометрии. Фактически, фигуры с фрактальными характеристиками, такие как треугольник Серпинского, можно увидеть на очень старых гравюрах на ткани – это японские гравюры средних веков с аналогичными структурами [3].

В этом исследовании изучается графическое представление фрактала, который формируется с помощью вычисления относительной погрешности. Относительная погрешность решения задачи Коши получена с использованием дифференциальных и интегральных исчислений. Цель состоит в том, чтобы установить графический алгоритм для данного фрактального множества в виде наглядной блок-схемы и смоделировать изображение множества для изучения. Для удобства визуализации моделирования данный алгоритм переводится в программное обеспечение. Моделирование показывает, что параметры, такие как шаг, точность, границы комплексной плоскости могут влиять на области устойчивости.

Методология исследования

Устойчивость и сходимость. Почти все научные закономерности описываются с помощью определенного набора математических функций и математических отношений, и при изучении природных явлений их можно представить в виде моделей, описанных при помощи компьютеров. Например, если рассмотреть множества Мандельброта и Жюлиа на комплексной плоскости, то после многократного применения определенных математических операций, числа, лежащие за пределами этих множеств, стремятся к бесконечности. А числа, находящиеся в пределах множеств, могут совершать колебательные движения. Область, где появляется неустойчивость, смещается к границе множества и ее траектория вырисовывается особенным образом, и как раз здесь появляются удивительно сложные и красивые формы с бесконечной регрессией (в отличие от чисто функциональной зависимости $y = f(x)$, когда каждому значению независимой переменной $\boldsymbol{x}$ соответствует одно определённое значение величины $\boldsymbol{y}$, при регрессионной связи одному и тому же значению $\boldsymbol{x}$ могут соответствовать в зависимости от случая различные значения величины y).

Используя компьютер как «микроскоп» можно наблюдать за движением границ данной области. Теоретически можно увеличить любую область множества, и заключить, что множество имеет фрактальную структуру. Такие математические эксперименты, выполненные на компьютере, порождают новые идеи, которые в последующем должны быть доказаны традиционными математическими методами.

Еще в 1980-х годах А.Л. Бухгеймом и М.А. Бектемесовым была выявлена возможность получения фрактальных изображений из дифференциальных уравнений при изучении устойчивости их решений и сходимости разностных схем с помощью итерационных процессов [4]. Авторы рассматривали задачу Коши

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \lambda u, t \in (0, T) \\ u(0) = 1, \lambda = x + iy \end{cases} \tag{1}$$

а именно на комплексной плоскости отображали относительную погрешность между прямым решением задачи Коши и ее разностным решением, в результате были выявлены фрактальные свойства.

Одна из распространенных задач численного анализа – попытаться выбрать надежные алгоритмы, то есть не дать сильно отличающийся результат при очень небольшом изменении входных данных. Под сходимостью численного решения понимают его сходимость к точному решению при уменьшении шага сетки. Если выполнены как условие аппроксимации, так и условие устойчивости, то результат разностной схемы сходится к решению дифференциального уравнения (теорема об эквивалентности Лакса).

Итерационные процессы. Как было рассмотрено ранее многие фракталы формируются в результате повторяющихся действий, то есть итераций. Результат предыдущей итерации, как правило, служит начальным значением для текущей итерации. Однако природные итерационные процессы от математических отличаются многообразием случайных параметров и форм, например, снежинка Коха строится с помощью деления отрезка на строго четыре «подотрезка», а природная снежинка будет иметь разнообразную форму в зависимости от таких внешних факторов, как температура, вес капель и так далее.

Представители одного из типов фракталов – алгебраические фракталы строятся с помощью итерационной формулы:

$$z_{n+1} = f(z_n)$$

Здесь z – комплексное число, f – определённая функция. Вычисления по данной функции будут продолжаться до выполнения некого условия. Когда выполнится условие, на холст экрана наносится точка, таким образом сформируется изображение фрактала. На комплексной плоскости функция может принимать следующие значения [4]:

1) со временем стремится к бесконечности;
2) стремится к нулю;
3) не выходит из области определенных значений;
4) будет в хаотическом состоянии.

Задача Коши для дифференциального уравнения 1-го порядка. Точное решение задачи Коши (1) имеет вид:

$$u(t) = e^{\lambda t}, t \in (0, T) \tag{2}$$

Разностное решение задачи Коши [5]:

$$u_j = (1 + \tau\lambda)^j, \tau = T/N \tag{3}$$

здесь $j = 0,\acute{} N$.

Нетрудно вычислить относительную погрешность данных решений задачи Коши:

$$P = \frac{\sqrt{[(1+\tau a)^2 + (\tau b)^2]^N + e^{2N\tau a} - 2[(1+\tau a)^2 + (\tau b)^2]^{\frac{N}{2}} e^{N\tau a} cos\left(N\left(arctg\,\frac{\tau b}{1+\tau a} - \tau b\right)\right)}}{e^{N\tau a}} \tag{4}$$

Результаты исследования

Определим алгоритм построения множества по формуле относительной погрешности (4). Допустим, что холст на мониторе, куда будет выводиться изображение, имеет разрешение AxB. Количество цветов в гамме равно $k+1$, то есть каждая точка на холсте в зависимости от значения относительной погрешности будет раскрашена в один из цветов в интервале от 0 до k (0 – соответствует черному цвету). Вводится шкала разделения для значений относительной погрешности с точностью шага $\varepsilon = 0{,}1$, каждому вычисленному p ставим в соответствие из спектра, состоящего из 16-ти цветов.

Ниже на рисунке 1 приведена блок-схема по построению фрактального множества, вычисляющая относительную погрешность решений соответствующей задачи Коши.

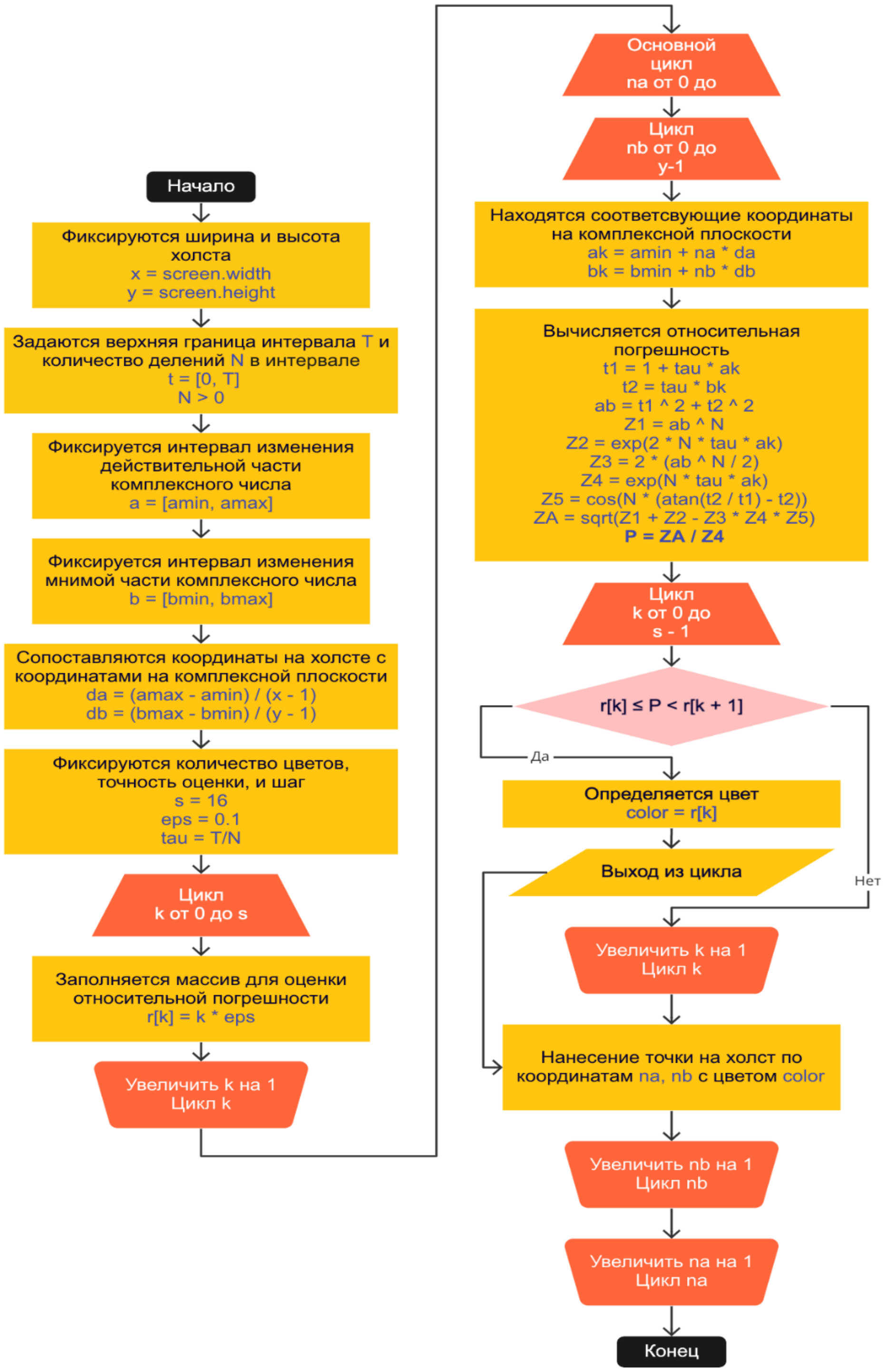

Рисунок 1. Блок-схема для получения изображения с помощью вычисления

Таким образом, после проведения несложных вычислений получены на комплексной плоскости цветные изображения, где можно увидеть некоторые свойство фрактального множества. Программа, написанная на языках Golang и ReactJS, позволяет изучить и исследовать на компьютере данное множество с разных масштабов, также есть возможность задания параметров, таких как шаг, точность, границы плоскости и т.д., см. рисунок 2. Имеется градация цветов, а также отображаются текущие координаты указателя.

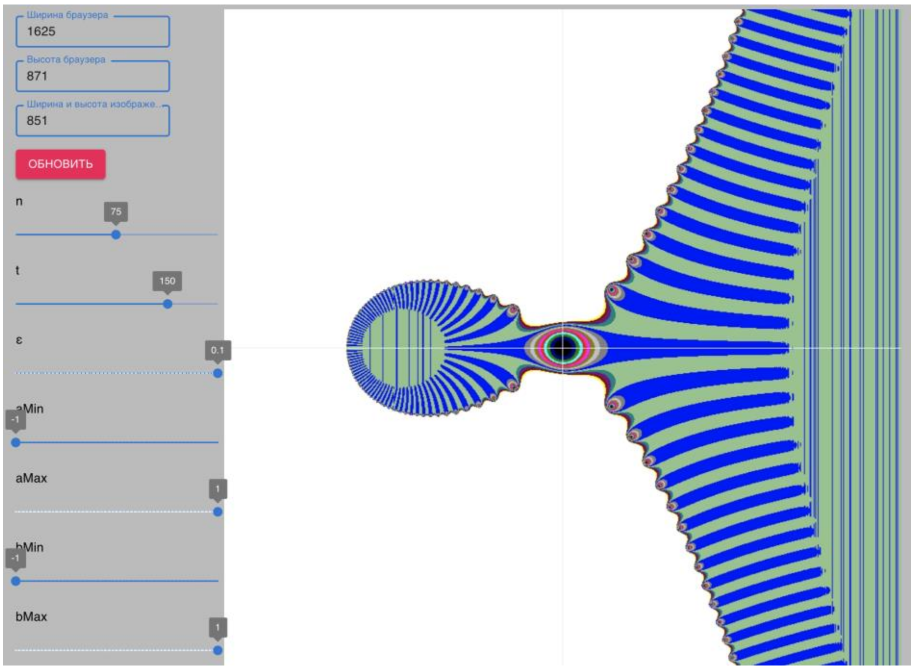

Рисунок 2. Интерфейс программы

Дискуссия

Увеличивая полученное изображение на разных областях, можно разглядеть самоподобие, также видны области устойчивости и сходимости (они раскрашены в черный цвет, на рисунках 3, 4, 5, 6).

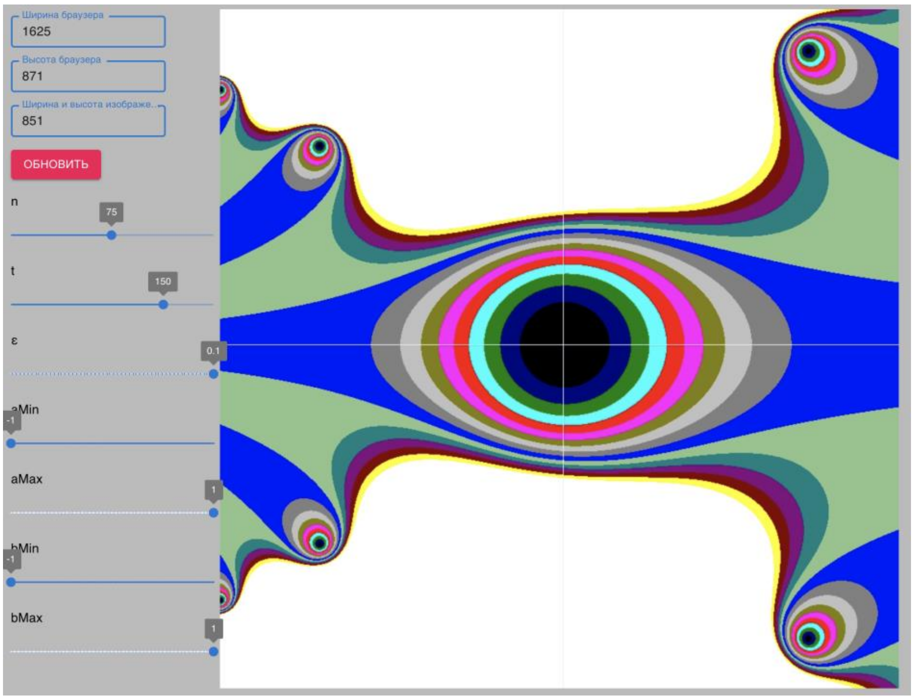

Рисунок 3. Области устойчивости в увеличенном масштабе

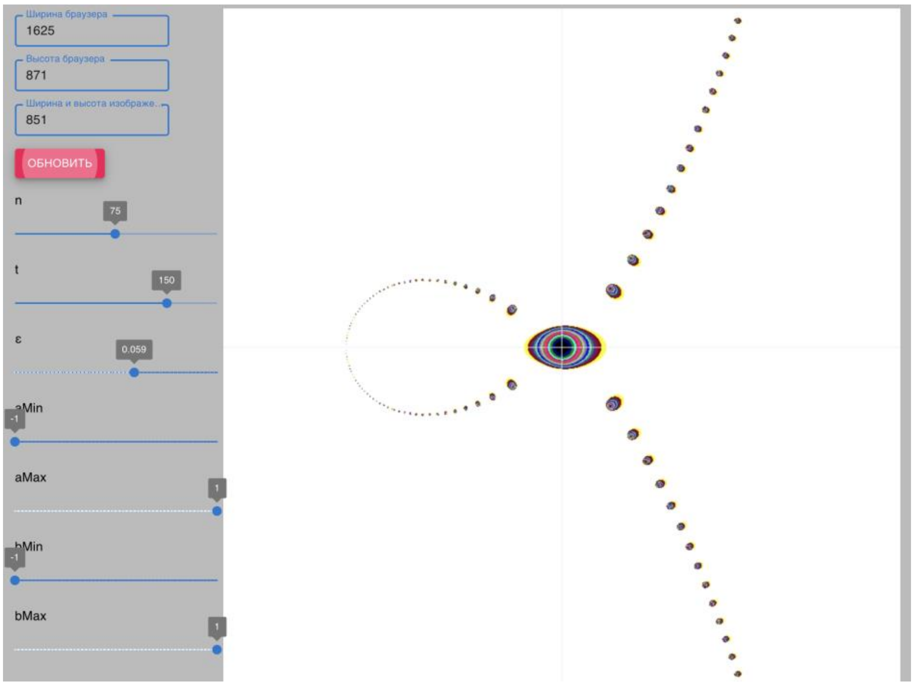

Рисунок 4. Самоподобие на границах

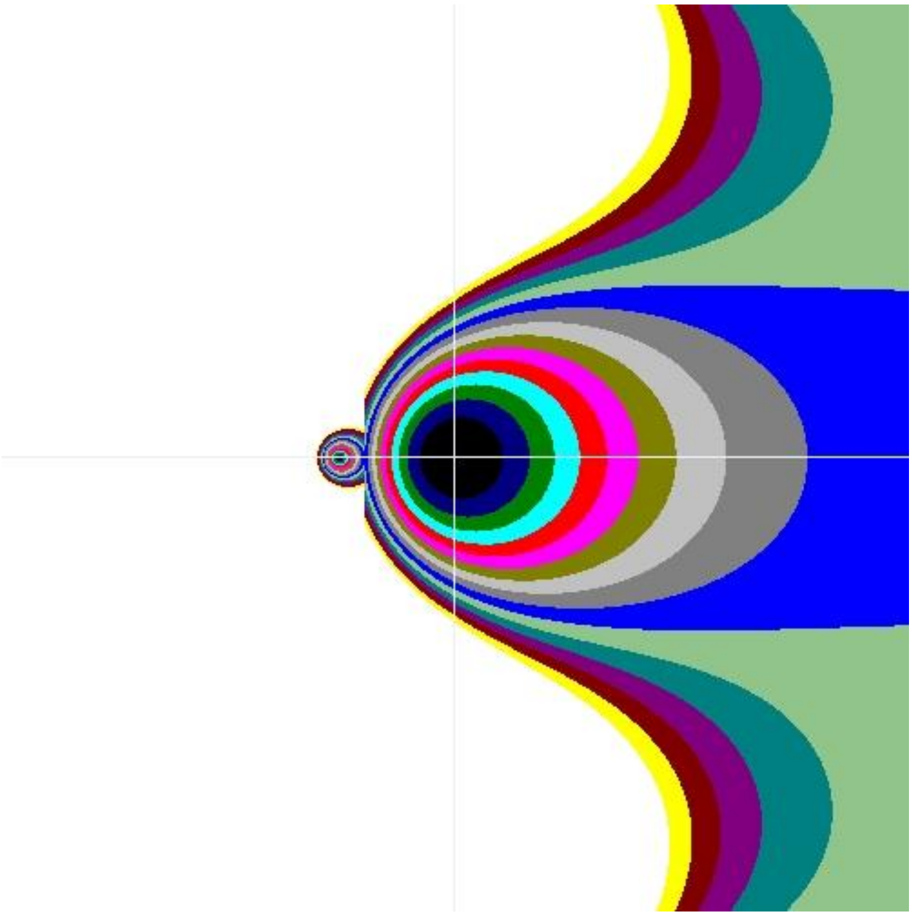

Рисунок 5. Самоподобие на вершинах

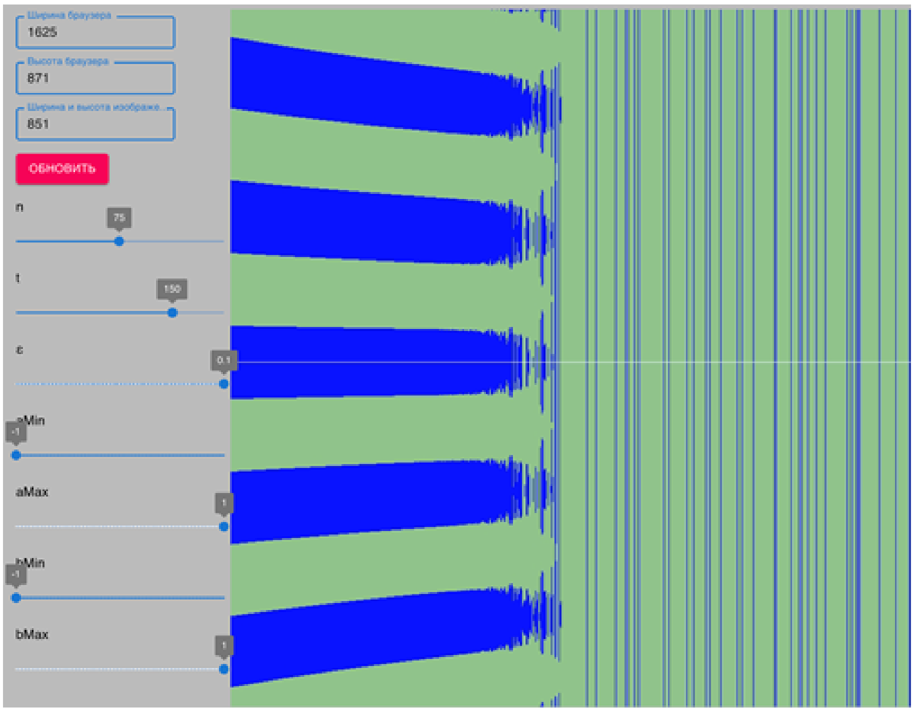

Рисунок 6. Продолжение самоподобия по горизонтали

Изучение и происхождение различных явлений, которые объясняются фрактальными моделями, соответствуют определению тех научных дисциплин, где они и рассматриваются [6]. Фракталы, с самого начала их формулировки, имели практическое призвание служить моделями для объяснения природы [7, 8, 9]. Например, когда идея, лежащая в основе построения множества Кантора, расширяется до трех измерений, сформированный образец удивительно похож на распределение звезд и галактик во Вселенной [10].

Заключение

В этом исследовании была представлена графическая модель фрактала, который формируется вычислением относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши. Построенный графический алгоритм позволил смоделировать изображение множества для изучения, например, для выявления областей устойчивости решения задачи, а также самоподобия в разных масштабах. Самоподобие особенно заметно при увеличении фрактала, например, оно видно даже при 50-ти кратном зуме.

Список использованных источников:

1 *Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Science, vol. 156, 1967, pp. 636–638.*

2 *Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. W. H. Freeman and co., San Francisco, 1982. P. 15.*

3 *Fujii K. Kimono Patterns – 15Uroko (Scales): A pattern seen worldwide since ancient times. Kateigaho International Japan Edition – Japanese culture, arts, lifestyle magazine, 2020, https://int.kateigaho.com/articles/tradition/patterns-15/.*

4 *Бектемесов М.А. Фракталдар. Орнықтылық және жинақтылық. Алматы, КазНПУ им. Абая 2010 г. с. 36, с. 51.*

5 *Рябенький В.С., Филиппов А Ф. Об устойчивости разностных уравнений. М., Гостехиздат, 1956. с. 1045 - 1048.*

6 *Barnsley M., Hawley R. Fractals Everywhere. Elsevier Science, 1993. с. 330-378.*

7 *Зеликин М. И. Фрактальная теория кольца Сатурна. Труды математического института им. Стеклова. Steklov Mathematical Institute, 2015. https://doi.org/10.1134/s0371968515040093. с. 87-101.*

8 *Hastings H., Kissell R. IS THE NILE OUTFLOW FRACTAL? HURST'S ANALYSIS REVISITED. Natural Resource Modeling. Wiley, 1998. https://doi.org/10.1111/j.1939-7445.1998.tb00301.x.*

9 *Timkov V., Timkov S., Zhukov V. FRACTAL STRUCTURE OF THE UNIVERSE. International scientific-technical magazine: Measuring and computing devices in technological processes, ISSN 2219-9365. 54, 2016.*

10 *Mahecha D.S. Evolution through the Stochastic Dyadic Cantor Set: The Uniqueness of Mankind in the Universe. International Journal of Astrobiology. Cambridge University Press (CUP), 2015. https://doi.org/10.1017/s1473550415000415.*

References:

1 *Mandelbrot B. How Long Is the Coast of Britain? Statistical Self-Similarity and Fractional Dimension. Science, vol. 156, 1967, pp. 636–638.*

2 *Mandelbrot B. The fractal geometry of nature. W. H. Freeman and co., San Francisco, 1982. p 15*

3 *Fujii K. Kimono Patterns – 15Uroko (Scales): A pattern seen worldwide since ancient times. Kateigaho International Japan Edition – Japanese culture, arts, lifestyle magazine, 2020, https://int.kateigaho.com/articles/tradition/patterns-15/.*

4 *Bektemesov M.A. Fraktaldar. (2010) Ornyktylyk zhane zhinaktylyk [Fractals. Stability and compactness]. Almaty, KazNPU Abai, p. 36, p. 51.*

5 *Ryabenkii V.S., Filippov A.F. (1956) Ob ustojchivosti raznostnyh uravnenij [On the stability of difference equations]. M., Gostekhizdat, 1956. p. 1045 - 1048.*

6 *Barnsley M., Hawley R. Fractals Everywhere. Elsevier Science, 1993. p. 330-378.*

7 *Zelikin M.I. Fraktal'naja teorija kol'ca Saturna [Fractal theory of the ring of Saturn]. Steklov Mathematical Institute, 2015. https://doi.org/10.1134/s0371968515040093. p. 87-101.*

8 *Hastings H., Kissell R. IS THE NILE OUTFLOW FRACTAL? HURST'S ANALYSIS REVISITED. Natural Resource Modeling. Wiley, 1998. https://doi.org/10.1111/j.1939-7445.1998.tb00301.x.*

9 *Timkov V., Timkov S., Zhukov V. FRACTAL STRUCTURE OF THE UNIVERSE. International scientific-technical magazine: Measuring and computing devices in technological processes, ISSN 2219-9365. 54, 2016.*

10 *Mahecha D.S. Evolution through the Stochastic Dyadic Cantor Set: The Uniqueness of Mankind in the Universe. International Journal of Astrobiology. Cambridge University Press (CUP), 2015. https://doi.org/10.1017/s1473550415000415.*