МРНТИ 27.31.15.
УДК 621.1.016.4, 517.957

https://doi.org/10.51889/8935.2022.97.74.002

А.Б. Біргебаев[1], М.Б. Муратбеков[2], А.М. Сахабаева[1]*

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Тараз мемлекеттік *педагогикалық университеті, Тараз қ., Қазақстан*
[*]e-mail: arai_mishon@mail.ru

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШРЕДИНГЕР СТАЦИОНАРЛЫҚ ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ТЕГІСТІГІ (БӨЛІКТЕНУІ)

Аңдатпа

Микробөлшектердің әртүрлі күш өрістеріндегі қозғалыс теңдеуі Шредингер толқынының теңдеуі болып табылады. Кванттық механиканың көптеген сұрақтары, атап айтқанда электромагниттік толқындардың жылулық сәулеленуі сингулярлы дифференциалдық операторлардың бөліну мәселесіне әкеледі. Осындай операторлардың бірі жоғарыдағы Шредингер операторы болып табылады. Бұл жұмыста аталған оператор функционалдық талдау әдістерімен зерттеледі. Шешімнің болуы және Гильберт кеңістігіндегі оператордың бөліктенуі үшін жеткілікті шарттар табылды. Барлық теоремалар бастапқыда Штурм-Лиувилл теңдеуінің үлгісі үшін дәлелденді және жалпы жағдайға дейін кеңейтілді. Шешімнің бар болуы және шешімнің тегістігі бөлімдерінде сызықты емес Штурм-Лиувилл теңдеуі үшін коэрцивтілік бағасының болуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар табылды және шешімнің бірінші туындысы үшін салмақ нормаларының бағалаулары алынды. Соңғы бөлімдерде шешімнің бар болуы және шешімнің тегістігі бөлімдерінің нәтижелері m=3 жағдайындағы Шредингер теңдеуі үшін жалпыланған.

Түйін сөздер: сызықты емес теңдеулер, үздіксіз оператор, эквиваленттілік, потенциалдық функция.

Аннотация

А.Б. Биргебаев[1], М.Б. Муратбеков[2] А.М. Сахабаева[1]
[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан
[2]Таразский государственный педагогический университет

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ (РАЗДЕЛИМОСТЬ) НЕЛИНЕЙНОГО СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА

Уравнением движения микрочастицы в различных силовых полях является волновое уравнение Шредингера. Многие вопросы квантовой механики, в частности, тепловое излучение электромагнитных волн приводят к задаче разделимости сингулярных дифференциальных операторов. Одним из таких операторов является вышеуказанный оператор Шредингера. В данной работе исследуется названный оператор методами функционального анализа. Найдены достаточные условия существования решения и разделимости оператора в Гильбербовом пространстве. Все теоремы первоначально доказаны для модельного уравнения Штурма – Лиувилля и распространены на более общий случай. В разделах существования и гладкости решения были найдены достаточные условия, обеспечивающие наличие оценки коэрцитивности для нелинейного уравнения штурма-Лиувилля, и получены оценки весовых норм для первой производной решения. Результаты разделов существование решения в последних разделах и гладкость решения обобщены для уравнения Шредингера в случае m=3.

Ключевые слова: нелинейные уравнения, непрерывный оператор, эквивалентность, потенциальная функция

Abstract

SMOOTHNESS OF SOLUTIONS (SEPARABILITY) OF THE NONLINEAR STATIONARY SCHRÖDINGER EQUATION

Birgebaev A.B. [1], Muratbekov M.B.[2], Sakhabaeva A.M.[1]
[1] Abai Kazakh national pedagogical university, Almaty, Kazakhstan
[2]Taraz state pedagogical university, Taraz, Kazakhstan

Schrödinger wave equation is known as an equation that governs the motion of a microparticle in various force fields. The problem of singular differential operators' separability occurs due to examination of various issues in quantum mechanics, especially, thermal radiation of electromagnetic waves. One such operator is the above Schrödinger operator. In this paper, we study the specified operator using functional-analytic methods. We found sufficient conditions for existence of a solution and separability of an operator in the Hilbert space. All theorems were originally proved for the model Sturm–Liouville equation and extended to a more general case. In the sections of the existence of the solution and the smoothness of the solution, sufficient conditions were found to ensure the existence of a coercivity estimate for the nonlinear Sturm-Liouville equation, and estimates of weight norms for the first derivative of the solution were obtained. The results of the sections the existence of the solution in the last sections and the smoothness of the solution are generalized for the Schrodinger equation in the case m=3.

Keywords: nonlinear equations, continuous operator, equivalence, potential function.

Кіріспе

Көптеген ғылыми мақалалар мен диссертациялық жұмыстар бар болғанына қарамастан, осы уақытқа дейін Шредингер типтегі теңдеулерінің шешімдерін табу есебі аз зерттелген. Негізінен ол жұмыстарда сызықты теңдеулер мен операторлар қарастырылған. Сондықтан кәзіргі таңда сызықты емес операторлардың бөліктенуін зерттеу қызығушылық танытуда. Осы жұмыста сызықты емес дифференциалдық операторлар қарастырылып, осыған дейін бөліктену тақырыбна зерттеліп жарық көрген мақалалар жалпыланып кейбір теоремалардың шарттары жеңілдетілген.

Бұл мақалада

$$Lu = -\Delta u + q(x,u)u = f(x) \in L_2(R^m) \tag{0.1}$$

сызықты емес Шредингер теңдеуінің шешімінің тегістігі қарастырылған.

1-2-бөлімдерде сызықты емес Штурм-Лиувилл операторы үшін коэрцитивті бағалаудың бар болуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттар табылып, ал шешімнің бірінші туындысы үшін салмақты нормадағы бағалау анықталған. 3-4-бөлімдерде 1-2-бөлімдердің нәтижелері Шредингер теңдеулері *m =3* болған жағдайы үшін жалпыланған..

Зерттеу методологиясы

Сызықты дифференциалдық операторлардың бөліктенуін зерттеу Everitt W.H., Yiertz [1,2] жұмыстарынан бастау алады, Одан кейін бұл тақырыптағы зерттеулерді Қазақстанда Отелбаев М. және оның оқушылары жалғастыруда. [3,4,7-11,13,14] Осы мақаладағы теоремалардың дәлелденуі авторлардың осыған дейін жарық көрген мақалаларын негізге алады.

Айтқанымыздың дәлелі ретінде және зерттеуді жеңілдету мақсатында Штурм-Лиувилл операторы үшін дәлелденген бір теореманы көрсетейік.

Теорема 0.1. Мына шарттар орындалсын: а) $q(x,y) \ge \delta \rangle 0$ *;* б) $q(x,y)$ - қос аргумент бойынша үзіліссіз функция в) $\sup\limits_{[x-\eta]\le 1} \sup\limits_{|C_0-C_1|\le A} \sup\limits_{|C_0|\le A} \dfrac{q(x,C_0)}{q(x,C_1)} \langle \infty$ мұндағы *A* – кез келген ақырлы сан.

Онда, кез келген $f(x) \in L_2(R^m)$ үшін $Ly = -y''(x) + q(x,y)y = f$ теңдеуінің екінші ретті туындысы квадраттық қосындыланатын *y(x)* шешімі бар болады, яғни

$$y''(x) \in L_2(R^m).$$

Бұл теореманың авторы Муратбеков М.Б. [3]. Өкінішке орай [4] жұмыста авторы дұрыс берілмеген. Мақала сол автормен бірігіп қайта жазылған және Шредингер теңдеуі үшін жалпыланған. Алда көретініміздей (2,4 -бөлімдерде) осындай нәтижелер кең класты сызықты емес операторлар үшін де орын алады. Сызықты операторлар үшін осындай зерттеулер [7,8,10] жұмыстарда көрсетілген.

1. Шешімнің бар болуы

Бұл бөлімде мына теңдеуді қарастырамыз

$$Ly = -y''(x) + q(x,y)y = f(x) \in L_2(R), \tag{1}$$

мұндағы $R = (-\infty, \infty)$.

$y \in L_2(R)$ функциясы (1) теңдеудің әлсіз шешімі деп аталады егер $\{y_n\} \subset W_2^1(R) \cap W_{2,l\hat{\imath}c}^2(R)$ тізбегі бар болып

$\|y_n - y\|_{\alpha_{2,loc(R)}} \to 0, \qquad \|Ly_n - f\|_{L_{2,loc(R)}} \to 0, n \to \infty$ шарттарын қанағаттандырса.

$C_0^\infty(R^m)$ кеңістігінде анықталған $\{\eta_n\}$ негізгі функциялар тізбегі R^m ,кеңістігінде 1 санына жинақталады дейді егер:

а) кез келген компакт $K \subset R^m$ үшін *N* нөмірі табылып, кез келген $x \in K$ және $n \ge \mathrm{N}$ үшін $\eta_n(x) = 1$ теңдігі орындалса б) R^m кеңістігінде функциялар тізбегі $\{\eta_n\}$ бірқалыпты жинақты болса, яғни $|\eta_n(x)| \leq 1, \ x \in R^m$, $n = 1,2,...$ [5]

Лемма 1.1. $q(x, y) \geq \delta \rangle 0$ функциясы теріс емес болсын және R^2 кеңістігінде қос аргумент бойынша үзіліссіз болсын, онда кез келген $f \in L_2(R)$ үшін (I) бірінші теңдеудің $W_2^1(R)$ кеңістігінде жататын шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Шарт бойынша $q(x, y)$ функциясы төменнен шенелгендіктен оны жалпыға бірдей тәртіпке келтіру үшін, $q(x, y) \geq 1$ деп алуға болатыны белгілі.

Ең алдымен төмендегі бірінші түрдегі шеттік есептің шешімінің бар болуының дәлелдеуін қарастырайық

$$L_{n_\varepsilon} y_{n_\varepsilon} = -y''_{n_\varepsilon} + y_{n_\varepsilon} + \frac{(q(x, y_{n_\varepsilon}) - 1) y_{n_\varepsilon}}{1 + \varepsilon(q)(x, y_{n_\varepsilon}) - 1) + \varepsilon \|b(x, y_{n_\varepsilon})\|_{2,(-a_n, a_n)}} = f\eta_n, \tag{2}$$

$$y_{n_\varepsilon}(+a) = y_{n_\varepsilon}(a) = 0, \tag{3}$$

Мұндағы $[-a_n, a_n] - su\rho p \eta_n$, ал $b(x, y_{n_e}) = (q(x, y_{n_\varepsilon}) - 1) y_{n_\varepsilon}$ болсын, $W_{2,0}^2[-a_n, a_n]$- кеңістігінде.

$W_{2,0}^2[-a_n, a_n]$– бұл, $z \in W_2^2$ және $z(-a_n) = z(a_n) = 0.$ функциялар кеңістігі.

(2)-(3) есебін оған пара-пар интегралдық теңдеуге келтіріп алып оған Шаудер принципін [6] қолданамыз.

L_0 деп $W_{2,0}^2[-a_n, a_n]$ кеңістігінде $L_0 y = -y''(x) + y(x)$ теңдігімен анықталған операторды белгілейміз. Штурм-Лиувилл операторы үшін белгілі теоремадан $L_2[-a_n, a_n]$кеңістігінде толығымен анықталған L_0^{-1} жете үзіліссіз операторы бар болады.

Лемма 1.2. (2)-(3) есебі

$$z_{n_\varepsilon} = \frac{(q(x, L_0^{-1} z_{n_\varepsilon}) - 1) L_0^{-1} z_{n_\varepsilon}}{1 + \varepsilon(q(x, L_0^{-1} z_{n_\varepsilon}) - 1) + \varepsilon \|b(x, L_0^{-1} z_{n_\varepsilon})\|_2^2} + f\eta_n, \tag{4}$$
$$z_{n_\varepsilon}, f\eta_n \in L_2[-a_n, a_n]$$

интегралдық теңдеуімен пара-пар. Дәлелдеуі қарапайым.

A деп төмендегі формуламен әсер ететін операторды белгілейік:

$$A(z) = \frac{(q(x, L_0^{-1} z) - 1) L_0^{-1} z}{1 + \varepsilon(q(x, L_0^{-1} z) - 1) + \varepsilon \|b(x, L_0^{-1} z)\|_{2,[-a_n, a_n]}^2} + f\eta_n.$$

Мынандай белгілеулер енгізейік

$$\overline{S}(0; N) = \left\{ \vartheta \in L_2(-a_n, a_n) : \|\vartheta\|_2 \leq N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\},$$

мұндағы $\vartheta = z - f\eta_n$. Осы шардағы операторды қарастырайық. Ол былай анықталсын

$$A(\vartheta) = A(z) - f\eta_n = A(\vartheta + f\eta_n) - f\eta_n =$$
$$= \frac{(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1) L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)}{1 + \varepsilon(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1) + \varepsilon \|b(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n))\|_{2,(-a_n, a_n)}^2}.$$

Егер $\vartheta_0 -$ нүктесі A_{o} операторының қозғалмайтын нүктесі болса онда $\vartheta_0 + f\eta_n -$нүктесі A операторының қозғалмайтын түктесі болатыны түсінікті. Сондықтан бұдан әрі A операторының орынына A_0 операторын қарастыру жеткілікті. A_0 операторының $\overline{S}(0;N) \in L_2[-a_n, a_n]$ шарын өзіне бейнелейтінін көрсетейік. Тұйық шарда жататын бір элемент алайық $\vartheta \in \overline{S}(0;N)$.

Екі жағдайды қарастырамыз:

1. $$\left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)\right\|_{2,(-a_n,a_n)}^2 \leq N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Онда

$$\|A_0(\vartheta)\|_2 = \left\| \frac{(q(x, L_0^{-1}z) - 1)L_0^{-1}z}{1 + \varepsilon(q(x, L_0^{-1}z) - 1) + \varepsilon\left\|b(x, L_0^{-1}z)\right\|_2^2} \right\|_{2,(-a_n,a_n)} \leq$$

$$\leq \left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)\right\| \leq N = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$$

2. $$\left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1})(\vartheta + f\eta_{n)}\right\| \geq N.$$

Онда

$$A_0(\vartheta)_2 \leq \frac{\left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)\right\|_{2,(-a_n,a_n)}}{\varepsilon\left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)\right\|_{2,(-a_n,a_n)}^2} =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon\left\|(q(x, L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)) - 1)L_0^{-1}(\vartheta + f\eta_n)\right\|_{2,(-a_n,a_n)}} \leq \frac{1}{\varepsilon N} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Яғни,

$$\|A(\vartheta)\|_{2,(-a_n,a_n)} \leq N, \qquad \forall \vartheta \in \overline{S}(0;N). \tag{5}$$

Енді $\overline{S}(0;N)$ - шарында A_{o} – операторының жете үзіліссіз оператор екенін көрсетейік. Үзіліссіз екені түсінікті. Одан кейін Рисс теоремасын қолдану үшін $\left\{A_0\vartheta : \vartheta \in \overline{S}(0;N)\right\}$ - функциялар жиынының бірқалыпты шенелген екенін және мына қатынастың орындалуын дәлелдеу жеткілікті:

$$\lim_{h \to 0} \|(A_0(\vartheta))(x+h) + (A_0(\vartheta))(x)\|_{2,(-a_n,a_n)} = 0 \ , \ \vartheta - \text{ бойынша бірқалыпты } \vartheta \in \overline{S}.$$

(5) теңсіздіктен $\left\{A_0(\vartheta) : \vartheta \in \overline{S}(0;N)\right\}$ функциялар жиынының бірқалыпты шенелген екені шығады.

$q(x, y)$ - қос аргумент бойынша үзіліссіздігінен және L_0^{-1} операторының қасиетінен өрнек $h \to 0$ ұмтылғанда $\left\|(A_0(\vartheta)(x+h) - A_0(\vartheta))(x)\right\|_{2,(-a_n,a_n)}^2 \to 0$, бірқалыпты 0-ге ұмтылады $\vartheta \in \overline{S}(0;N)$.

Демек, A_{o}-операторы жете үзіліссіз оператор және $\overline{S}(0;N)$ шарды өзіне өзін бейнелейді. Яғни, Шаудер принципі бойынша (4) интегралдық теңдеудің $\overline{S}(0;N)$ шарында ең болмағанда бір шешімі бар болады. Осы айтылғандардан және 1.2 леммадан (2)-(3) есебінің шешімі бар болатыны және оның W_2^2 кеңістігінде жататыны шығады.

Одан әрі $\left\|y_{n_\varepsilon}\right\|_{W_2^1[-a_n,a_n]}$ нормасы ($n, \varepsilon.$-дардан тәуелсіз) жоғарыдан шенелген екені дәлелденеді.

Оны дәлелдеу үшін $W_{2,0}^2(-a_n, a_n)$ кеңістігінде анықталған

$$\ell_{n_\varepsilon} y = y''(x) + (1 + \frac{\widetilde{q}(x) - 1}{1 + \varepsilon(\widetilde{q}(x) - 1) + \varepsilon\left\|(q(x, y_{n_\varepsilon}) - 1)y_{n_\varepsilon}\right\|_2^2})y(x),$$

сызықты операторды қарастырайық, мұндағы $\widetilde{q}(x) = q(x, y_{n_\varepsilon})$ ал y_{n_ε} – (2)-(3) есебінің оң жағы $f\eta_n$ тең болғандағы шешімі болсын. Мынандай $\left\langle \ell n_\varepsilon, y_{n_\varepsilon}, y_{n_\varepsilon} \right\rangle$ скаляр көбейтінді құрайық. Бөліктеп интегралдау арқылы және (3) теңдік бойынша интегралдың сыртындағы мүшелері нөлге тең болатынын ескеріп мынаны табамыз:

$$\left\| y_{n_\varepsilon} \right\|_{W_2^1[-a_n, a_n]} \le 2^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^{1/2}$$

$C = 2^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f|^2 dx \right)^{1/2}$ белгілейік

онда

$$\left\| y_{n_\varepsilon} \right\|_{W_2^1[-a_n, a_n]} \le C. \tag{6}$$

$\left\{ y_{n_\varepsilon} \right\}$ шенелген жиынында жататын $\left\{ y_{n_{\varepsilon_k}} \right\}$ шешімдердің кез келген тізбегін қарастырайық, ол үшін

$$\left\| y_{n_{\varepsilon_k}} \right\|_{W_2^1[-a_n, a_n]} \le C, \tag{7}$$

орынды мұндағы $k \to \infty$ ұмтылғнда $\varepsilon_k \to 0$.

(7) бойынша $\left\{ y_{n_{\varepsilon_k}} \right\}$ тізбегінен тізбекше бөліп алуға болады, оны тағыда $\left\{ y_{n_{\varepsilon_k}} \right\}$ деп белгілейік , олар берілген кеңістіктерде әлсіз жинақталады

$$y_{n_{\varepsilon_k}} \to y_n \quad \text{әлсіз} \quad W_2^1(-a_n, a_n),$$

$$y_{n_{\varepsilon_k}} \to y_n \quad \text{әлсіз} \quad L_2(-a_n, a_n).$$

(7) бойынша

$$\left\| y_n \right\|_{W_2^1(-a_n, a_n)} \le C \tag{8}$$

және y_n $L_n y_n = -y_n''(x) + q(x, y_n) y_n = f\eta_n$ теңдеуі мен шекаралық шартты қанағаттандыратыны түсінікті $y_n(-a_n) = y_n(a_n) = 0.$

Әрбір y_n -ді $\left[-a_n, a_n \right]$, сыртында нөлмен жалғастырып оны $\widetilde{y}_n$ деп белгілейік

Осындай жалғаулардың нәтижесінде нормалары тұрақты саннан кіші болатын $W_2^1(R)$ кеңістігінің элементтерін аламыз:

$$\left\| \widetilde{y}_{n_\varepsilon} \right\|_{W_2^1(R)} \le C.$$

Сондықтан $\widetilde{y}_n$ тізбегінен әлсіз жинақталатын $\widetilde{y}_{n_k}$ тізбекше бөліп алуға болады

$$\widetilde{y}_{n_k} \to y \quad \text{әлсіз} \quad W_2^1(R)$$

$$\widetilde{y}_{n_k} \to y \quad \text{әлсіз} \quad L_{2,\ell oc}(R), \tag{9}$$

сонымен қатар

$$\left\| y \right\|_{W_2^1(R)} \le C. \tag{10}$$

$\left[\alpha, \beta \right]$- *R*-де жатқан кез келген бекітілген сегмент болсын. Онда кез келген $\varepsilon \rangle 0$ оң саны үшін N нөмірі табылып *k=N* болғанда $\left(\alpha, \beta \right) \in \operatorname{supp} \widetilde{y}_{n_k}$ және (8) -ден $\left\| L\widetilde{y}_{n_k} - f \right\|_{2,(\alpha,\beta)} \langle \varepsilon$ болатыны шығады.

Осыдан және (9) ескеріп *y(x)* –тің (I) теңдеудің әлсіз шешімі екенін аламыз. Лемма дәлелденді.

2. Шешімнің тегістігі

Бұл бөлімде $W_2^1(R)$ кеңістігінде жатқан барлық шешімдердің потенциалдық функциялардың белгілі бір шарттарды қанағаттандырғанда $W_2^2(R)$ кеңістігінің элементері болатынын көрсетеміз.

Теорема 2.1. Мына төмендегі шарттар орындалсын;

а) $q(x,y) \geq \delta\rangle 0;$ б) $q(x,y)$ - қос аргумент бойынша үзіліссіз функция;

в) $\sup\limits_{|x-\eta|\leq 1} \sup\limits_{|C_1-C_2|\leq A} \sup\limits_{|C_1|\leq A} \dfrac{q(x,C_1)}{q(x,C_2)}\langle\infty,$

мұндағы A – кез келген ақырлы шама. Онда кез келген $f \in L_2(R)$ үшін (1) теңдеудің $y(x) \in L_2(R)$ шешімі бар болады және оның екінші туындысы $y''(x) \in L_2(R).$

Теорема 2.2. Мына шарттар орындалсын:

а) $q(x,y) \geq \delta\rangle 0;$ б) $q(x,y)$ - қос аргумент бойынша үзіліссіз функция R^2 - де.

в) $\sup\limits_{x\in R} \sup\limits_{|C_1-C_2|\leq A} \sup\limits_{|C_2|\leq A} \dfrac{q(x,c_1)}{\theta^2(x,c_2)}\langle\infty,$

мұндағы $\theta(x,C_1) = \inf\limits_{\substack{d\rangle 0\\ |x-t|\leq 10}} (d^{-1} + \int\limits_{|t-h|\leq d} q(\eta,C_2)d\eta),$

A – кез келген ақырлы шама. Онда кез келген $f \in L_2(R)$ үшін (I) теңдеудің $y(x) \in L_2(R)$ шешімі бар болады және оның екінші туындысы $y''(x) \in L_2(R).$

2.1-2.2 теоремалардың дәлелдеулері. Кез келген $f \in L_2(R)$ функциясы үшін Лемма 1.1. бойынша берілген теңдеудің *y(x)* шешімі бар болады және ол $y(x) \in W_2^1(R).$ Демек, Соболевтың [4] теоремасы бойынша $y(x) \in C(R).$ Онда б) шарты бойынша

$$q(x, y(x)) \in C_{\ell oc}(R). \tag{11}$$

$y_0(x)$ -(I) теңдеудің оң жағы $f_0 \in L_2(R)$ тең болғандағы әлсіз шешімі болсын. Онда $y_0(x) \in W_2^1(R),$ сондықтан $y_0(t) - y_0(\eta) = \int\limits_\eta^t \dfrac{dy_0}{dx}dx.$

Буняковский теңсіздігін пайдаланып және (10) бойынша мынаны табамыз;

$$|y_0(t) - y_0(\eta)| \leq (|t-\eta|)^{1/2}\|f\|_{2,R}. \tag{12}$$

$\tilde{q}(x) = q(x, y_0(x))$- деп алайық

$\tilde{L}$ деп L_2-нормасы бойынша $C_0^\infty(R)$ кеңістігінде $L_0 y = -y''(x) + \tilde{q}(x)y$ теңдігімен берілген оператордың тұйықталуын белгілейік. ($C_0^\infty(R)$ кеңістігі L_2- кеңістігінде тығыз болғандықтан бұл әрқашан орынды)

Лемма 2.1. $\tilde{L}$ өзіне өзі түйіндес және оң болып анықталған.

Дәлелдеуі. $\tilde{L}$ операторының оң болып анықталуы теорема 2.1 -дің а) шартынан шығып тұр. Өзіне өзі түйіндес екені [9] жұмыстың нәтижелерінен және (11) ден шығады. Лемма дәлелденді.

Енді $y_0(t) = C_2, y_0(\eta) = C_1, A = 2\|f\|_2 \geq \sqrt{A\eta}\|f\|_2$ деп алып (12) ден $|C_2 - C_1| \leq A$ болатынын көреміз. Бұдан және теорема 2.1- дің а)-в) шарттарынан $\tilde{L}$ операторы үшін [7] жұмыстағы 3 теореманың барлық шарттары түгел орындалады. Демек, *L* операторы бөліктенеді, яғни.

$$\|y''\|_2 + \|\tilde{q}(x)y\|_2 \leq C(\|\tilde{L}y\| + \|y\|_2),$$

мұндағы С – *y*-тен тәуелсіз, $y \in D(\tilde{L}),$ $D(\cdot)$ - анықталу облысы, ал $\|\cdot\|$ - $L_2(D)$.-дегі норма. Енді бізге $y_0(x) \in D(\tilde{L})$ көрсету жеткілікті. Кері жориық $y_0(x) \overline{\in} D(\tilde{L}).$ Лемма 2.1. бойынша $y_1(x) \in W_2^1(R)$ бар болады және ол $y_1(x) = \tilde{L}^{-1} f_0$ түрінде анықталуы тиіс. Жоғарыда айтқанымыз бойынша $y_0(x) \in W_2^1(R)$ ю

(I) теңдеудің оң жағы $f_o(x)$ – ке тең болғандағы шешімі болады, онда

$$\tilde{L}y_2 = 0, y_2 = y_1 - y_0 \in L_2(R).$$

Дәлелдеуді аяқтау үшін бір лемманы қарастырайық.

Лемма 2.2. 2.1 теоремасының а) және б) шарттары орындалсын. Онда $\widetilde{L}y = 0$ теңдеуінің $y(x) \in L_2(R)$ шешімі болмайды.

Дәлелдеуі. $\widetilde{q}(x) \geq \delta \rangle 0$ болғанда $y''(x) = q(x)y$ теңдеуінің шешімі $x \to -\infty$ немесе $x \to +\infty$ ұмтылғанда экспоненциалды түрде өсетіні белгілі. Сондықтан ол шешім $L_2(R)$ кеңістігінде жата алмайды. Лемма дәлелденді.

Осы леммадан $\widetilde{L}y = 0$ теңдеуінің нөлдік шешімі ғана бар, яғни $y_0(x) = y_1(x)$ тең екенін аламыз. Демек $y_0(x) \in D(\widetilde{L})$ орындалмауы 2.2 лемманың шартына қайшы. Теорема 2.1. толығымен дәлелденді.

Тура осындай жолмен 2.2-теорема дәлелденеді.

Зерттеудің нәтижелері

Штурм-Лиувилл модельдік операторы үшін дәлелденген нәтижелер Шредингер операторы үшін де орынды болатыны зерттелген. Зерттеу барысында [12] жұмыстың кейбір нәтижелері пайдаланылған. Бірақ, бұл мақалада авторлар ұтымды дәлелдеулер мен жалпылаулар келтірген.

3. $L_2(R^3)$ кеңістігіндегі сызықты емес Шредингер типтегі оператор

$L_2(R^3)$ кеңістігінде

$$-\Delta u + q(x,u)u = f(x) \tag{13}$$

теңдеуін қарастырайық.

Лемма 3.1. $q(x,u) \geq \delta \rangle 0$ болсын және R^2- де қос айнымалы бойынша үзіліссіз функция болсын онда кез келген $f \in L_3(R^3)$ үшін (13) теңдеудің $W_2^1(R^3)$ кеңістігінде әлсіз шешімі бар болады

Бұл лемма лемма 1.1. сияқты дәлелденеді.

Лемма 3.2. $q(x,u) \geq \delta \rangle 0$ және R^2 –де қос айнымалы бойынша үзіліссіз функция болсын, онда кез келген $f \in L_2(R^3)$ үшін (13) теңдеудің әлсіз шешімі бар болады және ол үшін мына теңсіздік орынды:

$$\|u\|_{L_\infty(R^3)} + \|u\|_{W_2^1(R^3)} \leq C\|f\|_{L_2(R^3)} \tag{14}$$

C- тұрақты саны *u* және f –тен тәуелді емес.

Дәлелдеуі. Белгілеу енгізейік

$$q_N(x,u) = \begin{cases} q(x,u), & \text{егер} \quad q(x,u) \leq N, \\ N, & \quad\quad\quad q(x,u) \geq N \end{cases}$$

Онда мына теңдеудің шешімінің бар болуы

$$-\Delta u + q_N(x,u)u = f_N \tag{15}$$

лемма 3.1 ден шығады.

$u_N \in W_2^1(R^3)$- (15) теңдеудің шешімі болсын дейік. Келесі теңдеуді қарастырайық

$$L_u = f_{N,} \tag{16}$$

мұндағы $L = -\Delta + \widetilde{q}_N(x),\ \widetilde{q}_N(x) = q_N(x,u_N.)$

$q_N(x,u_N)$ шенелген онда $\widetilde{q}_N(x),$ шенелген және [11] жұмыстағы 3 теорема бойынша L операторы өзіне өзі түйіндес болғандықтан (16) теңдеудің u_N.- беттесетін жалғыз шешімі бар болады,

Егер $q_1(x) \leq q_2(x),$ онда $Q_1(x,y) \geq 0$ және $Q_2(x,y) \geq 0,$ және $Q_1(x,y) \geq Q_2(x,y),$ мұндағы $Q_1(x,y)$ және $Q_2(x,y)$ сәйкес $-\Delta + q_1(x),$ $-\Delta + q_2(x)$ операторларының Грин функциялары. Ти (Мақалада Штурм-Лиувилл және Шредингер операторының Грин функцияларының қасиеттерін пайдаландық. Бұл операторлар үшін Грин функциялары толығымен зерттелген. Оны кез келген математика – физика теңдеулері кітабынан көруге болады.)

$Q_N(x,y)$ - L операторының Грин функциясы болсын, онда жоғарыда айтылғандардан

$$Q_N(x,y) \leq Q_0(x,y), \tag{17}$$

болатыны шығады, мұндағы $Q_0(x,y)$ $-\Delta+1$ операторының Грин функциясы. Осыдан және (17) пайдаланып табатынымыз

$$|u_x(x)| = \left|\int_{R^3} Q_N(x,y) f(y)dy\right| \le \int_{R^3} Q_N(x,y) f(y)dy \le \int_{R^3} Q_0(x,y)|f(y)|dy. \qquad (18)$$

$$(Qf)(x) = u_0(x) = \int_{R^3} Q_0(x,y)|f(y)|dy \text{ операторы}$$

$L_2(R^3)$- ден $W_2^2(R^3)$- ге әсер ететіні белгілі. Сондықтан Соболевтың [6] енгізулер теоремасы бойынша

$$\|u_N(x)\|_{L_\infty(R^3)} \le C_0\|f\|_{L_2(R^3)}, \qquad (19)$$

теңсіздігі орынды, мұндағы C_o тұрақтысы N мен f- тен тәуелсіз .
Екінші жағынан, мына бағалау орынды

$$\|u_N(x)\|_{W_2^1(R^3)} \le C_1\|f\|_{L_2(R^3)}, \qquad (20)$$

мұнда да C_1 тұрақтысы N мен f- тен тәуелсіз .
Шынында да, скаляр көбейтінді құрайық $\langle Lu_N, u_N\rangle$. Бөліктеп интегралдау арқылы (20) аламыз.
(19) және (20) пайдаланып табатынымыз

$$\|u_N(x)\|_{L_\infty(R^3)} + \|u_N\|_{W_2^1(R^3)} \le C_2\|f\|, \qquad (21)$$

мұндағы $C_2 = \max(C_1, C_2)$.
Шекке көшу арқылы $N \to \infty$ мына теңсіздікке келеміз

$$\|u(x)\|_{L_\infty(R^3)} + \|u(x)\|_{W_2^1(R^3)} \le C_2\|f\|_{L_2(R^3)}.$$

$u(x)$ -тің (13) теңдеудің әлсіз шешімі екенін дәлелдеу қиындық туғызбайды (1.1. лемманы қараңыз) Лемма дәлелденді.

4. Шешімнің тегістігі

Теорема 4.1. Келесі шарттар орындалсын: *а)* $q(x,y) \ge \delta\rangle 0$; *б)* $q(x,y)$ - R^2-де қос аргумент бойынша үзіліссіз функция болсын және

$$\sup_{|x-y|\le 1} \sup_{\substack{|C_1-C_2|\le A \\ |C_1|\le A}} \frac{q(x,C_1)}{q(y,C_2)} \langle \infty,$$

мұндағы *А*–кез келген ақырлы шама. Онда кез келген $f \in L_2(R^3)$ оң жағы үшін (13) теңдеудің $\Delta u \in L_2(R^3)$ жататын $u(x)$ шешімі бар болады. Теорема 4.1 дәлелдеуі 2.1 сияқты [7,12] жұмыстың негізінде жүргізіледі..

Қорытынды

Дифференциалдық теңдеулер үшін негзгі сұрақтардың бірі оның шешімдерін белгілі бір функционалдық кеңістіктерде табу. Бұл жұмыста осыған дейін берілген тақырыпқа жүргізілген зерттеулерді қорытындылап Штурм-Лиувилл және Шредингер типіндегі сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табудың жеткілікті шарттары дифференциалдық операторлар әдісімен табылған. Зерттеу барысында осыған дейін жарық көрген авторлардың және басқа да осы тақырыппен айналысып жүрген авторлардың мақалаларының нәтижелері сонымен қатар Соболевтың енгізулер теоремасы пайдаланылған. Оның барлығы сілтемеде көрсетілген. Зерттеудің нәтижелері басқа да сызықты емес теңдеулерді зерттеуге пайдаланылуы мүмкін деп ойлаймыз.

Дифференциалдық операторлардың бөліктенуі, коэрцитивті бағалаулар сонымен қатар сызықты емес дифференциалдық теңдеулердің шешімдерін табу мәселелері бір- бірімен байланыста шешілген. Жұмыстың нәтижелері жаңа және сілтемедегі авторлардың жұмыстарын толықтырып жалпыланған.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Everitt W.H., Yiertz M. Some propereties of certein operators. Proc. London Math. Soc., 23(3), 1971, pp.301-304.

2 Everitt W.N., Yiertz M. Some ineqalies assocated with certein differential equations, Math. Z., 126, 1972, pp.308-326.

3 Муратбеков М.Б.. Теоремы разделимости и спектральные свойства одного класса дифференциальных операторов с нерегулярными коэффициентами: автореферат дис. доктора физико-математических наук: 01.01.02.- Алматы, 1994.- 30 с.

4 Биргебаев А. Гладкость решений нелинейного уравнения Штурма-Лиувилля. Австрийский журнал наука и техника, № 1-2. 2015. с.29-30

5 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1973. С..16-21

6 Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. - Л.: ЛГУ, 1952. -256 с.

7 Муратбеков М.Б., Отелбаев Н. Гладкость и аппроксимативные свойства решений одного класса нелинейных уравнений типа Шредингера. // Известия вузов, сер.матем. 1999,N3.с.44-47.

8 Отелбаев М. О разделимости эллиптических операторов.-Докл;. АН СССР, 1977, № 3(234), с. 540-543.

9 Отелбаев М. Коэрцитивные оценки и теоремы разделимости для эллиптических уравнений в R^m . Труды МИАН, 1983 с.195-217

10 Биргебаев А.Гладкость решений нелинейных дифференциальных уравнений и теоремы разделимости: диссертация . кандидата физико-математических наук : 01.01.02. - Алма-Ата, 1984. - 100 с.

11 Отелбаев М. Об условиях самосопряженности оператора Шредингера с операторным потенциалом. - Укр. мат. ж., 1976, №280(6).

12.Биргебаев Гладкость решений нелинейного стационарного уравнкения Шредингера. «Наука и Современность» 2010, с.34-47

13 Zayede M.E., Omran S.A. Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existence and Uniqueness Theorem. International journal of Contemp Mathematical Sciences. Vol.6, 2011, №8. pp.353-364.

14 Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation //Boundary value problems. May 2017. pp. 1-11. DOI 10.1186/s13661-017-0799-4

References:

1 Everitt W.H., Yiertz M. (1971) Some propereties of certein operators. Proc. London Math. Soc., №23(3), 301-304.

2 Everitt W.N., Yiertz M. (1972) Some ineqalies assocated with certein differential equations. Math. Z., №126, 308-326.

3 Muratbekov M.B. (1994) Teoremy razdelimosti i spektral'nye svojstva odnogo klassa differencial'nyh operatorov s neregulyarnymi koefficientami: avtoreferat dis. doktora fiziko-matematicheskih nauk: 01.01.02 [Separability Theorems and Spectral Properties of a Class of Differential Operators with Irregular Coefficients: Doctor of Physics and Mathematics: 01.01.02]. Almaty. 30. (In Russian)

4 Birgebaev A. (2015) Gladkost' reshenij nelinejnogo uravneniya Shturma-Liuvillya [Smoothness of solutions to the nonlinear Sturm-Liouville equation]. Avstrijskij zhurnal nauka i tekhnika, №1-2, 29-30. (In Russian)

5 Vladimirov B.C. (1973) Uravneniya matematicheskoj fiziki [The equations of mathematical physics]. M.: Nauka. 16-21. (In Russian)

6 Sobolev S.L. (1952) Nekotorye primeneniya funkcional'nogo analiza v matematicheskoj fizike [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics]. L.: LGU. 256. (In Russian)

7 Muratbekov M.B., Otelbaev N. (1999) Gladkost' i approksimativnye svojstva reshenij odnogo klassa nelinejnyh uravnenij tipa Shredingera [Smoothness and approximative properties of solutions to a class of nonlinear Schrödinger type equations]. Izvestiya vuzov, ser.matem., №3, 44-47. (In Russian)

8 Otelbaev M. (1977) O razdelimosti ellipticheskih operatorov [On separability of elliptic operators]. Dokl. AN SSSR., №234(3), 540-543. (In Russian)

9 Otelbaev M. (1983) Koercitivnye ocenki i teoremy razdelimosti dlya ellipticheskih uravnenij v R^m [Coercive estimates and separability theorems for elliptic equations in R^m]. Trudy MIAN, 195-217. (In Russian)

10 Birgebaev A. (1984) Gladkost' reshenij nelinejnyh differencial'nyh uravnenij i teoremy razdelimosti: dissertaciya kandidata fiziko-matematicheskih nauk: 01.01.02 [Smoothness of solutions of nonlinear differential equations and separability theorems: Ph.D. thesis: 01.01.02]. Alma-Ata. 100. (In Russian)

11 Otelbaev M. (1976) Ob usloviyah samosopryazhennosti operatora SHredingera s operatornym potencialom [On the Self-Conjugacy Conditions of Schrödinger Operator with Operator Potential]. Ukr. mat. zh., №280(6). (In Russian)

12 Birgebaev (2010) Gladkost' reshenij nelinejnogo stacionarnogo uravnkeniya Shredingera [Smoothness of solutions to the nonlinear stationary Schrödinger equation]. «Nauka i Sovremennost'», 34-47. (In Russian)

13 Zayede M.E., Omran S.A. (2011) Separation of the Tricomi Differential Operator in Hilbert Space with Application to the Existence and Uniqueness Theorem. International journal of Contemp Mathematical Sciences, №6(8), 353-364.

14 Berdyshev A.S., Birgebaev A.B., Cabada A. (2017) On the smoothness of solutions of the third order nonlinear differential equation // Boundary value problems, 1-11. DOI 10.1186/s13661-017-0799-4.