have difficulties in preparing for the exam [9]. The student can successfully overcome the ban on the use of built-in functions by understanding the intricacies of the operation of the algorithms if language learning takes place taking into account the methodological features of the awareness of the regularity and algorithm of the element's functions. As a result, it can be noted that not only is there no need to abandon the idea of studying high-level programming languages at school, but, on the contrary, learning Python, with the right approach and taking into account methodological features, will open up new horizons and opportunities for the student, as modern programming languages, improving, becoming more universal, flexible and simple, convenient for perception and debugging. Such an approach to the study of high-level languages will make it possible to train beginner programmers with versatile experience in writing programs at the school level.


*References:*

1 Amit, S., (2015). Doing math with Python. San Francisco, SF: No Strach Press, Inc.// http://index-of.es/Varios-2/Doing%20Math%20with%20Python.pdf

2 Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics (pp. 43-52). Washington, DC: Mathematical Association of America // https://www.researchgate.net/publication/264119290_Introducing_the_derivative_via_calculus_triangles

3 Туркин А.В. Автоматическое дифференцирование в Python// https://cyberleninka.ru/article/n/avtomaticheskoe-differentsirovanie-v-python/viewer

4 Евтушенко Ю. Г. Оптимизация и быстрое автоматическое дифференцирование //М.: Научное издание ВЦ РАН. – 2013. http://www.ccas.ru/personal/evtush/p/198.pdf

5 Mortensen M., Langtangen H. P. High performance Python for direct numerical simulations of turbulent flows //Computer Physics Communications. – 2016. – Т. 203. – С. 53-65.

6 B. Stadie, Z. Xie, P. Moritz, J. Schulman, J. Ho. Computational graph toolkit: a library for evaluation and differentiation of functions of multidimensional arrays. https://github.com/joschu/cgt

7 Andersson J. A general-purpose software framework for dynamic optimization //Arenberg Doctoral School, KU Leuven. –2013.

8 Community Portal for Automatic Differentiation. http://www.autodiff.org/

9 Weinstein M. J., Rao A. V. A source transformation via operator overloading method for the automatic differentiation of mathematical functions in MATLAB //ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). – 2016. – Т. 42. – №. 2. – С. 11.


**МРНТИ 27.39.29**
**УДК 517(075.8)**

*А.А. Джумабаева[1], А.Е. Жетписбаева[1]*

*[1]Евразийский национальный университет им.Л.Н. Гумилева, г.Нур-султан, Казахстан*

## ПОРЯДОК НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

*Аннотация*

В статье рассматривается $L_p(T^2)$ пространство Лебега периодических функций двух переменных. Изучены вопросы приближения функций двух переменных тригонометрическими полиномами с “номерами” гармоник из ступенчатых гиперболических крестов. Величина $E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t\in T(Q_n^r)} \| f - t \|_p , i \le p \le \infty$ -наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с "номерами" гармоник из ступенчатого гиперболического креста $Q_n^r$. Статья состоит из двух разделов. В первом разделе приведены некоторые известные утверждения, необходимые для доказательства основных результатов. Во втором разделе установлены точные по порядку оценки наилучших приближений некоторых функций. Эти оценки дают возможность оценить величины верхних граней наилучших приближений для определенных классов функций. Вопросы, рассмотренные в настоящей работе, относятся к кругу вопросов, изученных в работах К. И. Бабенко, С. А. Теляковского, Я . С. Бугрова, Н С. Никольской.

**Ключевые слова**: пространство Лебега, наилучшее приближение двумерным углом, ступенчатый крест, тригонометрический полином, производная Лиувилля-Вейля, общие монотонные последовательности.

*Аңдатпа*

*А.А. Джумабаева [1], А.Е. Жетписбаева[1]*

**ЛЕБЕГ КЕҢІСТІГІНДЕГІ ФУНКЦИЯЛАРДЫҢ ЕҢ ЖАҚЫН ЖУЫҚТАУ ТӘРТІБІ**

*[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразияқ ұлттық университеті, Нур-султан қ., Казахстан*

Мақалада екі айнымалының пеиодтты функцияларының Лебег кеңістігі $L_p(T^2)$ қарастырылған. Сатылы гиперболалық кресттерден гармониканың «сандары» бар тригонометриялық көпмүшелері арқылы екі айнымвлы функцияның жуықтау мәселелері зерттелген.

$E_{Q_n^r}(f)_p = \inf\limits_{t\in T(Q_n^r)} \| f-t \|_p, i \le p \le \infty$ шамасы - $f(x)$ функциясының гиперболалық крест $Q_n^r$.-ң гармониканың «сандары» бар тригонометриялық көпмүшелерімен ең жақын жуықтауы. Мақала екі бөлімнен тұрады. Бірінші бөлімде негізгі нәтижелерді растауға қажетті белгілі мәлімдемелер бар. Екінші бөлімде белгілі бір функцияларды жақындастырудың нақты бағалауы келтірілген. Бұл бағалаулар белгілі бір функциялар кластары үшін ең жақсы жақындаудың жоғарғы шегін бағалауға мүмкіндік береді. Жақындау аппараттары ретінде сатылы гиперболалық кресттен спекторы бар тригонометриялық полиномдар қолданылады. Бұл жұмыста қарастырылған сұрақтары К. И. Бабенко, С. А. Теляковский, Я . С. Бугрова , Н.С. Никольский-ң жұмыстарында қарастырылған мәселелерге қатысты.

**Түйін сөздер:** Лебег кеңістігі, екі өлшемді бұрышпен ең жақын жуықтау, сатылы крест, тригонометриялық көпмүшелік, Лиувилл-Вейл туындысы, жалпы монотонды тізбек.

*Abstract*

**THE ORDER OF THE BEST APPROXIMATION OF FUNCTIONS IN LEBESQUE SPACE**

*Jumabayeva A.A.[1] , Zhetpisbayeva A.E.[1]*

*[1]L.N. Gumilov Eurasian National University, Nur-Sultan, Kazakhstan*

The article considers the $L_p(T^2)$ Lebesque space of periodec functions of two variables. The problems of approximation of functions of two variables by trigonometric polynomials with “numbers” of harmonics from step hyperbolic crosses are stydied.

Value $E_{Q_n^r}(f)_p = \inf\limits_{t\in T(Q_n^r)} \| f-t \|_p, i \le p \le \infty$ the best approximation of the function $f(x)$ by trigonometric polynomials with “numbers” of harmonics from a step hyperbolic cross of $Q_n^r$. The article consists of two sections. The first section contains some well-known statements necessary to prove the main results. In the second section, exact estimates of the best approximations of certain functions are established. These estimates make it possible to estimate the upper bounds of the best approximations for certain classes of functions. As approximation apparatuses, trigonometric polynomials with a spector from a stepwise hyperbolic cross are used. The questions considered in this work belong to the circle of questions studied in the works of K. I. Babenko , S. A. Telyakovsky, I. S. Bugrova , N, S. Nikolskaya .

**Keywords:** Lebesgue space, best approximation by two-dimensional angle, step cross, trigonometric polynomial, Liouville-Weil derivative, general monotone sequences.

## Введение

Пусть $L_p(T^2)$ $1 < p < \infty$ пространство измеримых функций двух переменных которые являются $2\pi$ периодическими по каждой переменной и такие, что

$$\| f \|_p = \left( \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} | f(x_1,x_2)|^p \, dx_1 dx_2 \right)^{1/p} < \infty.$$

$L_p^0$ - множество функций $f \in L_p$ такое, что $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_2 = 0$ и $\int_0^{2\pi} f(x_1,x_2)dx_1 = 0.$

Приближение полиномами с гармониками из гиперболических крестов было начато К.И. Бабенко [1, 2], первые важные результаты в этом направлении были получены, также С.А. Теляковским [3, 4], Я. С. Бугрова [5, 6], Н С. Никольской [7] и Б.С. Митягиным [8].

Недавние монографии В.Н. Темлякова [9], [10] дают детальное описание истории вопроса.

Пусть $Q_n^r$ обозначает множество $Q_n^r = \bigcup\limits_{(\gamma,s)\le n} p(s), r = r\gamma$, множество k таких, что $|k| \in Q_n^r$, называем ступенчатым гиперболическим крестом, где $p(s) = k = (k_1,k_2) : 2^{s_j-1} \le k_j < 2^{s_j}, j = 1,2.$

Пусть $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$ $\gamma_s$-действительные числа. $1 < p < \infty$ и через $S_l^{\gamma}(f, x)$ будем обозначать частную сумму Фурье функции $f(x)$ вида $S_l^{\gamma}(f) = \sum_{(\gamma,s)\le l+1}\delta_s(f)$,которую называют ступенчатой гиперболической суммой Фурье. где $\delta_s(f,x) = \sum_{|k|\in p(s)}\hat{f}(k)e^{i(k,s)}$ $|k| = (|k_1, k_2|), s = (s_1, s_2)$, $\hat{f}(k) = (2\pi)^{-d}\int_{\pi_d} f(x)e^{-i(k,x)}dx$.

Для $f \in L^0{}_p$ определим величину $E_{Q_n^r}(f)_p = \inf_{t\in T(Q_n^r)} \| f - t \|_p, i \le p \le \infty$ - наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами с "номерами" гармоник из ступенчатого гиперболического креста $Q_n^r$, где $\{T(Q_n^r) = t : t(x) = \sum_{|k|\in Q_n^r} c_k e^{i(k,x)}\}$.

Если $1 < p < \infty$ , то имеем $E_{Q_n^r(f)_p \le \| f - S_{n-1}^{\gamma}(f) \|_p}$, то есть в этом случае частные суммы ряды Фурье дают порядок наилучших приближений.

Наилучшее приближение «углом» в пространствах Лебега определено М.К. Потаповым [11], Я.С. Бугровым [12].

Через $\sigma(f)$ будем обозначать ряд Фурье функции $f \in L_p(T^2)$ , т.е

$$\sigma(f) := \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}(a_{n_1n_2}\cos n_1x_1\cos n_2x_2 + b_{n_1n_2}\cos n_1x_1\sin n_2x_2 +$$

$$+c_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2 + d_{n_1n_2}\sin n_1x_1\cos n_2x_2) = \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}A_{n_1n_2}(x_1x_2), \quad (1)$$

Преобразованный ряд Фурье от $\sigma(f)$ даётся выражением:

$$\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2) \equiv \sum_{n_1=0}^{\infty}\sum_{n_2=0}^{\infty}\lambda_{n_1n_2}(a_{n_1n_2}\cos(n_1x_1 + \beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2 + \beta_2\pi/2) +$$

$$+b_{n_1n_2}\cos(n_1x_1 + \beta_1\pi/2\sin(n_2x_2 + \beta_2\pi/2) + c_{n_1n_2}\sin(n_1x_1 + \beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2 + \beta_2\pi/2) +$$

$$+d_{n_1n_2}\sin(n_1x_1 + \beta_1\pi/2)\cos(n_2x_2 + \beta_2\pi/2)),$$

где $\beta_1, \beta_2 \in R$, $\lambda = \{\lambda_{n_1n_2}\}_{n_1n_2\in N}$ последовательность действительных чисел .

Пусть $\varphi(x_1x_2) : \sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$ назовем $(\lambda,\beta_1,\beta_2)$ - смешанной производной функции $f$ (или производная Лиувилля-Вейля) и обозначим её через $f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)}(x_1x_2)$. Например, если $\lambda_{n_1n_2} = n_1^{r_1}n_2^{r_2}, r_i \ge 0, \beta_i r_i (i = 1,2,...), \Rightarrow f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)} = f^{(r_1r_2)}$, где $f^{(r_1r_2)}$ - смешанная производная от $f$ в смысле Вейля. Отметим, что для любых $\beta_1, \beta_2$, $\| f^{(\lambda,\beta_1,\beta_2)} \|_p \le \| f^{(\lambda,0,0)} \|_p$, $1 < p < \infty$.

**Определение 1.** Последовательность $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется обобщенной монотонной, записанной как $\lambda \in GM^2$, если соотношение:

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}|\lambda_{k_1,n_2} - \lambda_{k+1,n_2}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|, \quad \sum_{k_2=n_2}^{2n_2}|\lambda_{n_1,k_2} - \lambda_{n_1k_2+1,}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|,$$

$$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2}|\lambda_{k_1,k_2} - \lambda_{k+1,k_2} - \lambda_{k_1,k_2+1} + \lambda_{k_1+1,k_2+1}| \le C|\lambda_{n_1,n_2}|.$$

справедливо для всех целых чисел $n_1, n_2$, где константа С не зависит от $n_1$ и $n_2$.[13,14]

**1. Вспомогательные утверждения.**

**Лемма 1.1.** [14] $\{\lambda_n\} \in GM$ тогда и только тогда,когда существует $C > 0$, что

$(i)\,|\lambda_k|\le C|\lambda_n|$ для $n\le k\le 2n$

$(ii)\sum_{k=n}^{N}|\Delta\lambda_k|\le C(|\lambda_n|+\sum_{k=n+1}^{N}\frac{|\lambda_k|}{k})$ для любого $n<N$

Из [14] следует ,что если $\{\lambda_{n_1n_2}\}\in GM^2$, то

$|\lambda_{k_1,k_2}|\le C|\lambda_{n_1,n_2}|$ для $n_1\le k_1\le 2n_1, n_2\le k_2\le 2n_2$

Это подразумевает ,что условие

$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2}|\lambda_{k_1,k_2}-\lambda_{k_1+1,k_2}-\lambda_{k_1,k_2+1}+\lambda_{k_1+1,k_2+1}|\le C(|\lambda_{n_1,n_2}|+|\lambda_{2n_1,2n_2}|)$ эквивалентно условию

$\sum_{k_1=n_1}^{2n_1}\sum_{k_2=n_2}^{2n_2}|\lambda_{k_1,k_2}-\lambda_{k_1+1,k_2}-\lambda_{k_1,k_2+1}+\lambda_{k_1+1,k_2+1}|\le C|\lambda_{n_1,n_2}|$.

**Лемма 1.2.** [15]. Пусть $a_n\ge 0, 0<\alpha\le\beta<\infty$.
Тогда

$$(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{\beta})^{\frac{1}{\beta}}\le(\sum_{\nu=1}^{\infty}a_\nu^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}).$$

**Лемма 1.3.** (Неравенство Минковского,[15]) Пусть $1\le p<\infty$ и $a_{\nu k}\ge 0$. Тогда

(a) $(\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\nu=1}^{k}a_{\nu k})^p)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{\nu=1}^{\infty}(\sum_{k=\nu}^{\infty}a_{\nu k}^p)^{\frac{1}{p}}$,

(b) $(\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{\nu=k}^{\infty}a_{\nu k})^p)^{\frac{1}{p}}\le\sum_{\nu=1}^{\infty}(\sum_{k=1}^{\nu}a_{\nu k}^p)^{\frac{1}{p}}$.

**Лемма 1.4.** [15] Для функции $f(u,y)$ определенной на измеримом множестве.
$E=E_1\times E_2\subset R_n$, где
$x=(u,y), u=(x_1,...,x_m), y=(x_{m+1},...,x_n)$, следующее неравенство

$(\int_{E_1}|\int_{E_2}f(u,y)dy|^p\,du)^{\frac{1}{p}}\le\int_{E_2}(\int_{E_1}|f(u,y)|^p\,du)^{\frac{1}{p}}dy.$

**Лемма 1.5.** [15]

a).Пусть $1<p<\infty$ и $(4)$ ряд Фурье для $f\in L_p^0(T^2)$. Тогда

$C_1(p)\|f\|_p\le(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2})^{\frac{p}{2}}dx_1dx_2)^{\frac{1}{p}}\le C_2(p)\|f\|_p.$

b).Пусть $1<p<\infty.$ Если $(4)$ удовлетворяет следующему неравенству

$I_p=(\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{m_1=1}^{\infty}\sum_{m_2=1}^{\infty}\Delta^2_{m_1m_2})^{\frac{p}{2}}dx_1dx_2)^{\frac{1}{p}}<\infty$

Тогда (4) ряд Фурье функции $f=(x_1,x_2)\in L_p(T^2)$ и $\|f\|_p\le C(p)I_p$.

**Лемма 1.6.** [15] Пусть $f\in L_p^0(T^2), 1<p<\infty,$ и (6) ряд Фурье от $f$.

Если $\lambda_{n_1,n_2}$ удовлетворяет следующее условие:

$$\text{(i)}\,|\lambda_{n_1,n_2}|\le M,$$

$$\text{(ii)} \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} |\lambda_{m_1,n_2} - \lambda_{m_1+1,n_2}| \le M, \ \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{n_1,m_2} - \lambda_{n_1,m_2+1}| \le M,$$

$$\text{(iii)} \ \sum_{m_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{m_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} |\lambda_{m_1,m_2} - \lambda_{m_1+1,m_2} - \lambda_{m_1,m_2+1} + \lambda_{m_1+1,m_2+1}| \le M,$$

для $n_1, n_2 = 1,2,....$ Тогда

$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2}(x_1,x_2),$ является рядом Фурье функции $\varphi(f,\lambda) \in L_p^0(\mathrm{T}^2)$ и $\| \varphi \|_p \le C \| f \|_p$,

где постоянная С не зависит от $f$.

**2. Оценки наилучших приближений со ступенчатым крестом.**

Теперь докажем один из основных результатов статьи – теорему 2.1.

**Теорема 2.1.** Пусть $1 < p < \infty$, $1 < \theta \le \min(p,2)$, $\lambda := \{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность положительных чисел, такие что $\lambda \in GM^2$, $\alpha_i \in R_+$, $r_i \in R_+ \bigcup 0$ и $\beta_i \in R$. Если для $f \in L_p^0(T^2)$ ряд:

$$\sum_{\nu_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1-1}}(f)_p + \sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\lambda^{0\theta}_{1,2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2-1}}(f)_p +$$
$$+ \sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}| - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p \tag{2}$$

сходится, то существует $\varphi \in L_p^0(T^2)$ с рядами Фурье $\sigma(f,\lambda,\beta_1,\beta_2)$ и

$$\| \varphi \|_p \le (\lambda^{\theta}_{11} \| f \|_p^{\theta} + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1-1}}(f)_p + \sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\lambda^{0\theta}_{1,2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2-1}}(f)_p +$$

$$+ \sum_{\nu_1=1}^{\infty}\sum_{\nu_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}| - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

и

$$E_{Q^r_n}(\varphi)_p \le (\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}} E^{\theta}_{Q^r_{m_1+m_2}}(\varphi)_p + \sum_{\nu_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{m_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+m_2-1}}(\varphi)_p) +$$

$$+ \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2+m_1-1}}(\varphi)_p) +$$

$$+ \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}| - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Доказательство: Пусть ряд (2) ряд сходится и $f \in L_p^0(T^2)$ используем следующее неравенство:

$$\lambda^{\theta}_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}} \le \lambda^{\theta}_{11} + \sum_{m_2=2}^{n_2} |\lambda^{\theta}_{1,2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{m_2-2}}| + \sum_{m_1=2}^{n_1} |\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-2},1}|$$
$$+ \sum_{m_1=2}^{n_1}\sum_{m_2=2}^{n_2} |\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-2},2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-2}} + \lambda^{\theta}_{2^{m_1-2},2^{m_2-2}}| \tag{3}$$

Обозначим

$$\Delta_{n_1,n_2} = \sum_{\nu_1=2^{n_1-1}}^{2^{n_1}-1} \sum_{\nu_2=2^{n_2-1}}^{2^{n_2}-1} A_{\nu_1,\nu_2}(f,x_1,x_2)(n_1,n_2 = 1,2...) : см(14)$$

Используя (3) получим

$$I_1 = \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda^2_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}}\Delta^2_{n_1,n_2}]^{p/2}dx_1,dx_2\}^{1/p} = \| [\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda^2_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}}\Delta^2_{n_1,n_2}]^{1/2} \|_p$$

$$= \| [\lambda^2_{11}\Delta^2_{11} + \sum_{n_1=2}^{\infty}\lambda^2_{2^{n_1-1},1}\Delta^2_{n_1,1} + \sum_{n_2=2}^{\infty}\lambda^2_{1,2^{n_2-1}}\Delta^2_{1,n_2} + \sum_{n_1=2}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\lambda^2_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}}\Delta^2_{n_1,n_2}]^{1/2}] \|_p$$

$$\leq (\lambda_{11}\| [\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}]^{1/2} \|_p + \| (\sum_{n_1=2}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}[\sum_{\nu_1=2}^{n_1}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},1}|]^{2/\theta})^{1/1} \|_p$$

$$+\| (\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}[\sum_{\nu_2=2}^{n_2}|\lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-2}}|]^{2/\theta})^{1/2} \|_p$$

$$+\| (\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=2}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}[\sum_{\nu_1=2}^{n_1}\sum_{\nu_2=2}^{n_2}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}|]^{2/\theta})^{1/2} \|)$$

$$=: J_1 + J_2 + J_3 + J_4 .$$

Оценим $J_1$. Применяя лемму 1.5. Имеем $J_1 \leq C\lambda_{11}\| f \|_p < \infty$.

Теперь оценим:

$$J_2 = \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{n_1=2}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}[\sum_{\nu_1=2}^{n_1}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},1}|]^{2/\theta}]^{p/2}dx_1,dx_2\}^{1/p} .$$

Используя неравенство Минковского и лемму 1.3 для $\frac{2}{\theta} \geq 1$,получим

$$J_2 \leq \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\{\sum_{\nu_1=2}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},1}|(\sum_{n_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|\Delta_{n_1,n_2}|^2)^{\theta/2}\}^{2/\theta}]^{p/2}dx_1,dx_2\}^{1/p}$$

$$= (\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sum_{\nu_1=2}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},1}|(\sum_{n_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}|\Delta_{n_1,n_2}|^2)^{\theta/2})^{p/\theta}dx_1,dx_2\}^{\theta/p})^{1/\theta}$$

Далее используем неравенство Минковского для $\frac{p}{\theta} \geq 1$, леммы 1.5 и получим

$$J_2 \leq (\sum_{\nu_1=2}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},1}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1-1}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Из (2) следует,что $J_2 < \infty$, $J_3$ можно оценить аналогично $J_2$ и мы имеем:

$$J_3 \leq (\sum_{\nu_2=1}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{1,2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_2-1}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Применяя леммы 1.3 и 1.4 для $\frac{2}{\theta} \geq 1$ и получим :

$$J_4 = \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{n_1=2}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\Delta^2_{n_1,n_2}[\sum_{\nu_1=2}^{n_1}\sum_{\nu_2=2}^{n_2}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}} -$$

$$-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}|]^{\frac{2}{\theta}}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}} = (\sum_{\nu_2=2}^{\infty}\sum_{\nu_1=2}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}} +$$

$$+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}|\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[(\sum_{n_1=\nu_1}^{\infty}\sum_{n_2=\nu_2}^{\infty}|\Delta_{n_1,n_2}|^2]^{\frac{p}{\theta}}dx_1,dx_2\}^{\frac{\theta}{p}})^{\frac{1}{\theta}}.$$

По леммам 1.5 получаем

$$J_4 \le (\sum_{\nu_2=1}^{\infty}\sum_{\nu_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q_{\nu_1-1,\nu_2-1}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Из (2) получим $J_4 < \infty$ .Собирая оценки $J_1, J_2, J_3, J_4$ мы получаем $I < \infty$ . Следовательно по лемме 1.5 существует функция $g(x_1, x_2) \in L^0_p$ с рядом Фурье

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}} \Delta_{n_1,n_2}, \tag{4}$$

и

$$\| g \|_p \le C(p) I_1 \quad . \tag{5}$$

Перепишем ряд (4) в виде

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \gamma_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2}(x_1, x_2),$$

где

$$\gamma_{1,1} = \lambda_{1,1}, \gamma_{1,\nu_2} = \lambda_{1,2^{n_2-1}} \, for 2^{n_2-1} \le \nu_2 \le 2^{n_2} - 1, (n_2 = 2,3...),$$

$$\gamma_{\nu_1,1} = \lambda_{2^{n_1-1},1} \, for 2^{n_1-1} \le \nu_1 \le 2^{n_1} - 1, (n_2 = 2,3...),$$

$$\gamma_{\nu_1,\nu_2} = \lambda_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}} \, for 2^{n_2-1} \le \nu_2 \le 2^{n_2} - 1, 2^{n_1-1} \le \nu_1 \le 2^{n_1} - 1, (n_1, n_2 = 2,3...).$$

Теперь рассмотрим следующий ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \lambda_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2}(x_1, x_2) = \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} \gamma_{n_1,n_2} \Lambda_{n_1,n_2} A_{n_1,n_2}(x_1, x_2), \tag{6}$$

где

$$\Lambda_{1,1} = 1, \Lambda_{1,\nu_2} = \frac{\lambda_{1,\nu_2}}{\gamma_{1,\nu_2}} = \frac{\lambda_{1,\nu_2}}{\lambda_{1,2^{n_2-1}}} \, for 2^{n_2-1} \le \nu_2 \le 2^{n_2} - 1, (n_2 = 2,3...),$$

$$\Lambda_{\nu_1,1} = \frac{\lambda_{\nu_1,1}}{\gamma_{\nu_1,1}} = \frac{\lambda_{\nu_1,1}}{\lambda_{2^{n_1-1},1}} \, for 2^{n_1-1} \le \nu_1 \le 2^{n_1} - 1, (n_2 = 2,3...),$$

$$\Lambda_{\nu_1,\nu_2} = \frac{\lambda_{\nu_1,\nu_2}}{\gamma_{\nu_1,\nu_2}} = \frac{\lambda_{\nu_1,\nu_2}}{\lambda_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}}} \, for 2^{n_1-1} \le \nu_1 \le 2^{n_1} - 1, 2^{n_2-1} \le \nu_2 \le 2^{n_2} - 1, \ (n_1, n_2 = 2,3...)$$

Поскольку по определению и свойству GM последовательность $\{\Lambda_{n_1=1,n_2=1}\}^{\infty,\infty}_{n_1=1,n_2=1}$ удовлетворяет условиям леммы 1.6 , то ряд (6) имеет вид функции $\varphi(x_1, x_2) \in L_p$ и $\| \varphi \|_p \le C(\rho, \lambda) \| g \|_p$.

Учитывая (5) и оценки $J_1, J_2, J_3, J_4$ будем иметь:

$$\| \varphi \|_p \le (\lambda^{\theta}_{1,1} \| f \|^{\theta}_p + \sum_{n_1=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{n_1+1,1} - \lambda^{\theta}_{n_1,1}| E^{\theta}_{Q^r_{n_1}}(f)_p + \sum_{n_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{1,n_2+1} - \lambda^{\theta}_{1,n_2}| E^{\theta}_{Q^r_{n_2}}(f)_p$$

$$+ \sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{n_1,n_2} - \lambda^{\theta}_{n_1+1,n_2} - \lambda^{\theta}_{n_1,n_2+1} + \lambda^{\theta}_{n_1+1,n_2+1}| E^{\theta}_{Q^r_{n_1,n_2}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Оценим $E_{Q^r_{m_1+m_2}}(\varphi)_p \le C \| \varphi - S_{\infty,2^{m_2}-1}(\varphi) - S_{2^{m_1}-1,\infty}(\varphi) + S_{2^{m_1}-1,2^{m_2}-1}(\varphi) \|_p$.

Рассмотрим ряд

$$\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda_{n_1,n_2}A^*_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\gamma_{n_1,n_2}\Lambda_{n_1,n_2}A^*_{n_1,n_2}(x_1,x_2),$$

где $A^*_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=0$ ,если $n_1\le 2^{m_1}-1$ и $n_2\le 2^{m_2}-1$, также $A^*_{n_1,n_2}(x_1,x_2)=A_{n_1,n_2}(x_1,x_2)$

Поскольку последовательность $\{\Lambda_{n_1=1,n_2=1}\}_{n_1=1,n_2=1}^{\infty,\infty}$ удовлетворяет условиям леммы 1.6 , то

$$\Big\|\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda_{n_1,n_2}A^*_{n_1,n_2}(x_1,x_2)\Big\|_p\le C\Big\|\sum_{n_1=1}^{\infty}\sum_{n_2=1}^{\infty}\lambda_{2^{n_1-1},2^{n_2-1}}\Delta^*_{n_1n_2}\Big\|_p,$$

где $\Delta^*_{n_1n_2}=0$ , если $n_1\le m_1$ и $n_2\le m_2$, $\Delta^*_{n_1n_2}=\Delta_{n_1n_2}$ в другом случае.

Из леммы 1.5 получим:

$$E_{Q^r_{m_1+m_2}}(\varphi)_p \le \{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\lambda^2_{2^{k_1-1},2^{k_2-1}}\Delta^2_{k_1,k_2}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}}\ . \tag{7}$$

Это легко увидеть

$$\lambda^{\theta}_{2^{k_1-1},2^{k_2-1}}=\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}}+\sum_{\nu_2=m_2+1}^{k_2}(\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-2}})+\sum_{\nu_1=m_1+1}^{k_1}(\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{m_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{m_2-1}})$$
$$+\sum_{\nu_1=m_1+1}^{k_1}\sum_{\nu_2=m_2+1}^{k_2}[\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}}+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}]$$

Подставим эту оценку для (7) и получим:

$$E_{Q^r_{m_1+m_2}}(\varphi)_p\le(\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}}\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\Delta^2_{k_1,k_2}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\Delta^2_{k_1,k_2}(\sum_{\nu_1=m_1+1}^{k_1}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{m_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{m_2-1}}|)^{\frac{2}{\theta}}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\Delta^2_{k_1,k_2}(\sum_{\nu_2=m_2+1}^{k_2}|\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-2}}|)^{\frac{2}{\theta}}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}}$$
$$+\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\Delta^2_{k_1,k_2}(\sum_{\nu_1=m_1+1}^{k_1}\sum_{\nu_2=m_2+1}^{k_2}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}}$$
$$-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}}+\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}|)^{\frac{2}{\theta}}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}})=:L_1+L_2+L_3+L_4\,.$$

Оценим $L_1$ как $J_1$

$$L_1\le\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}}\{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}[\sum_{k_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{k_2=m_2+1}^{\infty}\Delta^2_{k_1,k_2}]^{\frac{p}{2}}dx_1,dx_2\}^{\frac{1}{p}}\ll\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}}E_{Q^r_{m_1+m_2}}(f)_p\,.$$

У нас также есть

$$L_2\le(\sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty}|\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{m_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{m_2-1}}|E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+m_2-1}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}},$$
$$L_3\le(\sum_{\nu_2=m_2+1}^{k_2}|\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}-\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-2}}|E^{\theta}_{Q^r_{m_1+\nu_2-1}}(f)_p)^{\frac{1}{\theta}},$$

$$L_4 \le \Big(\sum_{\nu_1=m_1+1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2+1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-2}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-2},2^{\nu_2-2}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$

Принимая во внимание оценки для $L_1, L_2, L_3, L_4$ получаем

$$E_{Q^r_{m_1+m_2}}(\varphi)_p \le \Big(\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{m_2-1}} E^{\theta}_{Q^r_{m_1+m_2}}(f)_p + \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{m_2-1}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{m_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+m_2-1}}(f)_p$$

$$+ \sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{m_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{m_1+\nu_2-1}}(f)_p + \sum_{\nu_1=m_1}^{\infty}\sum_{\nu_2=m_2}^{\infty} |\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2}} - \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2}}$$

$$-\lambda^{\theta}_{2^{\nu_1},2^{\nu_2-1}} + \lambda^{\theta}_{2^{\nu_1-1},2^{\nu_2-1}}| E^{\theta}_{Q^r_{\nu_1+\nu_2-2}}(f)_p\Big)^{\frac{1}{\theta}}.$$


*Список использованной литературы:*

*1 Бабенко К. И. Приближение тригонометрическими полиномами в некоторых классах периодических функций нескольких переменных. — ДАН СССР, 1960, 132, № 5,с. 982—985.*

*2 Бабенко К. Л. О приближении периодических функций многих переменных тригонометрическими многочленами. — ДАН СССР, 1960, 132, № 2, с. 247—250.*

*3 Теляковский С. А . Об оценках производных тригонометрических полиномов многих переменных // Сиб. мат. жур., 1963, 4, № 6, с 1404—1411.*

*4 Теляковский С. А . Некоторые оценки для тригонометрических рядов с квазивыпуклыми коэффициентами // Мат. сб., 1964, 63 (105), с. 426—444.*

*5 Бугров Я. С. Приближение класса функций с доминирующей производной// Матем.сб., 1964, 64 (106), с. 410-418.*

*6 Бугров Я. С. Конструктивная характеристика классов функций с доминирующей смешанной производной // Труды МИАН СССР, 1974, 131, с. 25—32.*

*7 Никольская Н. С. Приближение дифференцируемых функций многих переменных суммами Фурье в метрике* $L_p$.

*8 Митягин В .С . Приближение функций в пространствах Lν и С на торе // Матем. сб. 1962. Т. 58 (100). С. 379-414.*

*9 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной // Труды МИАН. 1986. Т. 178.*

*10 Temlyakov V .N . Approximation of periodic functions. NY: Nova SciencePublishers, Inc., 1993.*

*11 Потапов М.К., Об одной теореме вложения, Mathematica, 14 (1972), 123–146.*

*12 Бугров Я.С., Приближение тригонометрическими полиномами функций многих переменных, Труды Научного Объединения Преподавателей Физико - математических Факультетов Педагогических Институтов Дальнего Востока, Хабаровск, 1962, 28–49.*

*13 Jumabayeva A., Liouville-Weyl derivatives, best approximations, and moduli of smoothness, Acta Math.Hungar., 145 (2) (2015), 369–391.*

*14 Tikhonov S., Trigonometric series with general monotone coefficients, J. Math. Anal. Appl., 326 (2007),721–735.*

*15 Nikolskii S.M., Approximation of Functions of Many Variables and Imbedding Theorems. Nauka, M., 1969. English translation: S.M. Nikolskii, Approximation of Functions of Several Variables and Imbedding Theorems, Springer-Verlag, New York, 1975.*