МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

МРНТИ 27.31.15, 27.31.21, 27.31.44
УДК 517.927.4, 517.912

https://doi.org/10.51889/5128.2022.50.64.001

П.Б. Абдиманапова[1,3], С.М. Темешева[1,2], А. Жумагазыкызы[1]*

[1]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, г.Алматы, Казахстан
[3]Алматинский технологический университет, г.Алматы, Казахстан
**e-mail: peryzat74@mail.ru*

О ПРИМЕНЕНИИ СЕМЕЙСТВА КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИСТЕМ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аннотация

В статье рассматривается нелинейная нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений. Путем введения новых неизвестных функций нелинейная нелокальная краевая задача для системы гиперболических уравнений сводится к эквивалентной краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения в частных производных. Краевая задача, содержащая семейство задач Коши для системы интегро-дифференциальных уравнений Фредгольма с параметром и неизвестной функции исследуется с помощью метода введения дополнительных функциональных параметров. Предложен модифицированный алгоритм метода параметризации Д.С. Джумабаева нахождения решения семейства краевых задач. Применение метода параметризации приводит к возникновению системы нелинейных неявных интегральных уравнений типа Фредгольма относительно параметров. Для решения этой системы использованы итерационные методы. Установлены достаточные условия существования изолированного решения рассматриваемой нелинейной нелокальной краевой задачи для системы гиперболических уравнений.

Ключевые слова: система гиперболических уравнений, нелинейная краевая задача, нелокальная краевая задача, семейство краевых задач, интегро-дифференциальное уравнение, алгоритм, достаточные условия, изолированное решение.

Аңдатпа

П.Б. Абдиманапова[1,3], С.М. Темешева[1,2], А. Жумагазыкызы[1]
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан
[3]Алматы технологиялық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ИНТЕГРАЛДЫҚ-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІ ҮШІН ШЕТТІК ЕСЕПТЕР ӘУЛЕТІНІҢ ҚОЛДАНЫЛУЫ ТУРАЛЫ

Ұсынылған мақалада гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп қарастырылады. Жаңа белгісіз функция енгізу арқылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есебі дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін эквивалентті шеттік есепке келтіріледі. Параметрлі және белгісіз функциясы бар Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне арналған Коши есептер тобын қамтитын шекті есеп қосымша функционалдық параметрлерді енгізу әдісі арқылы зерттеледі. Әулеттік шеттік есептердің шешімін табу үшін Д.С. Джумабаевтың параметрлеу әдісінің өзгертілген алгоритмі ұсынылған. Параметрлеу әдісін қолдану параметрлерге қатысты Фредгольм түріндегі сызықтық емес айқын емес интегралдық теңдеулер жүйесінің пайда болуына әкеледі. Бұл жүйені шешу үшін итерациялық әдістер қолданылады. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін қарастырылып отырған сызықтық емес бейлокал шеттік есептің оқшауланған шешімінің жеткілікті шарттары анықталды.

Түйін сөздер: гиперболалық теңдеулер жүйесі, сызықтық емес шеттік есеп, бейлокал шеттік есеп, шеттік есеп әулеті, интегралдық-дифференциалдық теңдеу, алгоритм, жеткілікті шарттар, оқшауланған шешім.

Abstract

ON THE APPLICATION OF A FAMILY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SYSTEMS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

Abdimanapova P.B.[1,3], Temesheva S.M.[1,2], Zhumagazykyzy A. [1]
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
[3]Almaty Technological University, Almaty, Kazakhstan

In this paper we consider a nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations. By introducing new unknown functions, the nonlinear nonlocal boundary value problem for a system of hyperbolic equations is reduced to an equivalent boundary value problem for the integral-differential partial differential equation. A boundary value problem containing a family of Cauchy problems for a system of integral-differential Fredholm equations with a parameter and an unknown function is investigated using the method of introducing additional functional parameters. A modified algorithm of D.S. Dzhumabayev's parameterization method of finding the solution of the family of boundary value problems is proposed. Application of the parameterization method leads to a system of non-linear implicit Fredholm-type integral equations with respect to parameters. Iterative methods are used to solve this system. Sufficient conditions for the existence of an isolated solution of the considered nonlinear nonlocal boundary value problem for the system of hyperbolic equations.

Keywords: system of hyperbolic equations, nonlinear boundary value problem, nonlocal boundary value problem, family of boundary value problems, integral-differential equation, algorithm, sufficient conditions, isolated solution.

Кіріспе

Қолданбалы математиканың көптеген бөлімдерінде дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер пайда болады. Әдетте, бұл есептер сызықтық емес. Сызықтық емес шеттік есептердің шешілімділік мәселелерін зерттеу және шешімдерін табудың жуық әдістерін құру елеулі қиындықтармен бірге жүретіні белгілі. Сондықтан көбіне әртүрлі процестерді модельдеуге қатысатын кейбір шамалардың аздығын болжайды және бастапқы есепті сызықтық шеттік есеппен ауыстырады. Бірақ сызықтандырылған есепті талдау негізінде сызықтық емес шеттік есептермен сипатталатын процестердің көптеген қасиеттерін толық анықтау мүмкін емес.

Математиктер қарастырған алғашқы дербес туындылы теңдеулердің бірі – гиперболалық типті теңдеу болып табылады. XVIII ғасырдың басында Ж.Л. Даламбер, Л. Эйлер, Д. Бернулли математика классиктерінің еңбектерінде жан-жақты зерттелген ішектің тербеліс теңдеуін Тейлор шығарған. Жылу беру және сұйықтық қозғалысын зерттеуге байланысты пайда болған жылуөткізгіштік теңдеуі мен Лаплас теңдеуі кейінірек зерттеле бастады. Алайда, бұған қарамастан эллиптикалық және параболалық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясы бүгінгі күнге дейін гиперболалық теңдеулер үшін шеттік есептер теориясына қарағанда көбірек дамыған. Шамасы, бұл эллиптикалық және параболалық теңдеулер үшін шеттік есептерді зерттеуге қолданылатын функционалдық анализдің көптеген әдістері гиперболалық типті теңдеулерге қолданылмайтындығына байланысты болған.

Д.С. Джумабаев пен А.Т. Асанованың [1-4] еңбектерінде Джумабаевтың параметрлеу әдісі аралас туындылы сызықтық гиперболалық теңдеулер жүйелері үшін бейлокал шеттік есептерге қолданылған. Жаңа белгісіз функцияларды енгізу арқылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін бейлокал шеттік есеп жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін екі нүктелі шеттік есептер әулетін қамтитын эквивалентті есепке келтірілген. Гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық бейлокал шеттік есептің корректілі шешілімділігінің және сәйкес жәй дифференциалдық теңдеулер жүйелері үшін екі нүктелі шеттік есептер әулетінің корректілі шешілімділігінің эквиваленттілігі анықталған. Сызықтық емес бейлокал шеттік есептің корректілі шешілімділігінің коэффициенттік критерийлері алынған. Жәй дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық шеттік есептер әулетінің және аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық бейлокал шеттік есептің фредгольмдық еместігін көрсететін мысалдар құрылған. Сызықтық емес бейлокал шеттік есептер үшін шешімін табудың алгоритмдері ұсынылған және жинақталуын қамтамасыз ететін жеткілікті шарттары құрылған, және осы шарттар бастапқы есептің шешімінің бар болуын қамтамасыз ететінін көрсеткен. Ұсынылып отырған мақалада аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есеп зерттеледі [6, 7].

Жаңа белгісіз функцияны енгізу арқылы бұл есеп дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеуі үшін эквивалентті шеттік есепке келтіріледі, ал соңғы есепті сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулеті деп қарастыруға болады.

Сондықтан интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулетін зерттеу өз алдына қызығушылық тудырды. Мақалада параметрлеу әдісі негізінде интегралдық-дифференциалдық теңдеулер үшін шеттік есептер әулетінің шешімдерін табудың тиімді алгоритмдерін құрылып, оқшауланған шешімдердің бар болудың жеткілікті шарттары алынды.

Есептің қойылымы және зерттеу әдісі

$\overline{\Omega}=[0,\omega]\times[0,T]$ облысында аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есепті қарастырамыз

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}=f(x,t,u,\frac{\partial u}{\partial x}),\quad u\in\mathbb{R}^n, \tag{1}$$

$$u(0,t)=0,\quad t\in[0,T], \tag{2}$$

$$g(x,u_x(x,0),u_x(x,T))=0, \tag{3}$$

мұндағы $f:\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}^n$, $g:[0,\omega]\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ – үзіліссіз функциялар.

(1)- (3) есебінің шешімі деп $\overline{\Omega}$-да өзінің $u_x^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, $u_{xt}^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ дербес туындыларымен бірге (1)-ші сызықтық емес гиперболалық теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын, $x=0$ сипаттамасында (2)-ші шартты қанағаттандыратын және $u_x^*(x,0)$, $u_x^*(x,T)$ $u_x^*(x,0)$, $u_x^*(x,T)$ мәндері үшін (3) теңдік орындалатын $u^*(x,t)\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ функциясын айтамыз.

Жаңа белгісіз $v(x,t)=u_x(x,t)$ функциясының көмегімен (1)–(3) есебінен дербес туындылы интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін эквивалентті шеттік есепке көшеміз

$$\frac{\partial v}{\partial t}=f(x,t,\int_0^x v(\xi,t)d\xi,v),\quad (x,t)\in\overline{\Omega},\quad v\in\mathbb{R}^n, \tag{4}$$

$$g\big(x,v(x,0),v(x,T)\big)=0,\quad x\in[0,\omega]. \tag{5}$$

Мұндағы (2)-ші шарт

$$u(x,t)=\int_0^x v(\xi,t)d\xi,\quad (x,t)\in\overline{\Omega} \tag{6}$$

қатынасында ескерілген, енді $[0,\omega]$ аралығында өзгеретін x шамасын әулет параметрі ретінде қарастырсақ болады.

Егер $u^*(x,t)$ функциясы (1)–(3) есебінің шешімі болса, онда $v^*(x,t)=u_x^*(x,t)$ функциясы (4), (5) есебінің шешімі болады. Және де, егер $v(x,t)$ – (4), (5) есебінің шешімі болса, онда (6)-шы теңдікпен анықталатын $u(x,t)$ функциясы (1)- (3) есебінің шешімі болады.

Келесі белгілеулерді қолданамыз:

$C(\overline{\Omega},\Omega_r,\mathbb{R}^{nN})$ – нормасы $\|v\|_2=\max\limits_{r=\overline{1,N}}\sup\limits_{(x,t)\in\Omega_r}\|v_r(x,t)\|$ болатын $v(x,[t])=(v_1(x,t),v_2(x,t),\ldots,v_N(x,t))$ функциялар жүйелерінің кеңістігі, мұндағы $v_r:\Omega_r\to R^n$ функциясы үзіліссіз және $[0,\omega]$ аралығында өзгеретін әр бір x-ке қарағанда бірқалыпты $t\to rh-0$ ақырлы шегі бар $(r=\overline{1,N})$;

$C([0,\omega],\mathbb{R}^{n(N+1)})$ – нормасы $\|\lambda\|_3=\max\limits_{x\in[0,\omega]}\max\limits_{r=\overline{1,N+1}}\|\lambda_r(x,t)\|$ болатын $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_{N+1}(x))$ функциялар кеңістігі, мұндағы $\lambda_r:[0,\omega]\to R^n$ функциясы үзіліссіз, $r=\overline{1,N+1}$;

$[0,\omega]\times[0,T)=\bigcup\limits_{r=1}^{N}\Omega_r$, мұндағы $\Omega_r=[0,\omega]\times[(r-1)h,rh)$, $r=\overline{1,N}$, $h>0:Nh=T$ $(N\in\mathbb{N})$;

Интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйелерінің әулеті үшін (4), (5) шеттік есебін Джумабаевтың параметрлеу әдісі көмегімен зерттейміз.

Белгісіз $v(x,t)$ функциясының Ω_r -ға тарылуын $v_r(x,t)$ арқылы белгілейміз, яғни $v_r(x,t)=v(x,t)$, $(x,t)\in\Omega_r$, $r=\overline{1,N}$. Онда (4), (5) шеттік есебі

$$\frac{\partial v_r}{\partial t}=f(x,t,\int_0^x v_r(\xi,t)d\xi,v_r),\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N}, \tag{7}$$

$$g(x,v_1(x,0),\lim_{t\to Nh-0}v_N(x,t))=0,\quad x\in[0,\omega]. \tag{8}$$

$$\lim_{t\to sh-0}v_s(x,t)=v_{s+1}(x,sh),\quad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,N-1}, \tag{9}$$

параметр енгізілген эквивалентті көп нүктелі шеттік есептер әулетіне көшеді.
Мұндағы (9) – бөліктелген $\overline{\Omega}$ аймақтың ішкі сызықтарындағы шешімнің үзіліссіздік шарты және $\lim\limits_{t\to rh-0}v_r(x,t)$ біржақты шектері $[0,\omega]$ аралығында өзгеретін әр бір x-ке қатысты бірқалыпты ұзіліссіз, $r=\overline{1,N}$. (7)-(9) есебі $x\in[0,\omega]$ бекітілген мәндерінде Фредгольмнің интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес көп нүктелі шеттік есептер әулеті екенін байқаймыз.

Ω_r-да $\tilde v_r(x,t)=v_r(x,t)-\lambda_r(x)$, $(x,t)\in\Omega_r$ алмастыруын енгіземіз, мұндағы $\lambda_r(x)=v_r(x,(r-1)h)$, $x\in[0,\omega]$, $r=\overline{1,N}$, $\lambda_{N+1}(x)=\lim\limits_{t\to T-0}v_N(x,t)$ және функционалдық параметрлі эквивалентті есепке көшеміз

$$\frac{\partial\tilde v_r}{\partial t}=f(x,t,\int_0^x\lambda_r(\xi)d\xi+\int_0^x\tilde v_r(\xi,t)d\xi,\lambda_r(x)+\tilde v_r),\quad (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N}, \tag{10}$$

$$\tilde v_r(x,(r-1)h)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad r=\overline{1,N}, \tag{11}$$

$$g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))=0,\quad x\in[0,\omega], \tag{12}$$

$$\lambda_s(x)+\lim_{t\to sh-0}\tilde v_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0,\quad x\in[0,\omega],\quad s=\overline{1,N}. \tag{13}$$

(10)-(13) есебінің шешімі деп элементтері $\lambda^*(x)=(\lambda_1^*(x),\lambda_2^*(x),\ldots,\lambda_{N+1}^*(x))\in C([0,\omega],R^{n(N+1)})$, $v^*(x,[t])=(v_1^*(x,t),v_2^*(x,t),\ldots,v_{N+1}^*(x,t))\in C(\overline{\Omega},\Omega_r,R^{nN})$ болатын, барлық $t\in[(r-1)h,rh)$ үшін үзіліссіз дифференциалданатын $v_r^*(x,t)$ функциясы (10)-шы теңдікті қанағаттандыратын, $\tilde v_r^*(x,(r-1)h)=0,\quad r=\overline{1,N},$ шарты және λ_r^* үшін $\lambda_s(x)+\lim\limits_{t\to sh-0}\tilde v_s(x,t)-\lambda_{s+1}(x)=0,\quad s=\overline{1,N},$ (12), (13) теңдіктері орындалатын ($\lambda^*(x),\tilde v^*(x,[t])$) жұбын айтамыз.

($\lambda^*(x),\tilde v^*(x,[t])$) – (10)-(13) есебінің шешімі болсын. Онда

$$v^*(x,t)=\begin{cases}\lambda_r^*(x)+\tilde v_r^*(x,t), & (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},\\ \lambda_{N+1}^*(x), & (x,t)\in[0,\omega]\cup\{T\}\end{cases}$$

функциясы (4), (5) сызықтық емес шеттік есебінің шешімі, ал $u^*(x,t)=\int_0^x v^*(\xi,t)d\xi,\quad (x,t)\in\overline{\Omega}$ функциясы (1)-(3) есебінің шешімі болады. Барлық $r=\overline{1,N+1}$ және $x\in[0,\omega]$ үшін $\lambda_r(x)$ функционалдық параметрлері белгілі болсын деп ұйғарамыз. Онда $\tilde v_r(x,t)$ функциясын, Ω_r облысында (10), (11) Коши есебінен анықтауға болады $(r=\overline{1,N})$. Бұл есеп әрбір бекітілген $x\in[0,\omega]$ үшін аралас типтегі интегралдық теңдеулер жүйесі әулетіне эквивалентті болады

$$\tilde v_r(x,t)=\int_{(r-1)h}^t f(x,\tau,\int_0^x\lambda_r(\xi)d\xi+\int_0^x\tilde v_r(\xi,\tau)d\xi,\lambda_r(x)+\tilde v_r(x,\tau))d\tau. \tag{14}$$

(14)-тен $\lim\limits_{t\to rh-0}\tilde v_r(x,t)$ шектерді анықтап, табылған мәндерді (12)-ші және (13)-ші теңдеулерге қойып,

$\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x),\ldots,\lambda_{N+1}(x))$ параметріне қатысты сызықтық емес функционалдық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$g(x,\lambda_1(x),\lambda_{N+1}(x))=0, \tag{15}$$

$$\lambda_s(x)+\int_{(s-1)h}^{sh} f\left(x,t,\int_0^x\left(\lambda_s(\xi)+\tilde{v}_s(\xi,\tau)\right)d\xi,\lambda_s(x)+\tilde{v}_s(x,t)\right)dt-\lambda_{s+1}(x)=0,\quad s=\overline{1,N}. \tag{16}$$

(15), (16) функционалдық теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз

$$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x\lambda(\xi)d\xi,\tilde{v})=0,\quad \lambda(x)\in\mathrm{R}^{n(N+1)},\quad x\in[0,\omega]. \tag{17}$$

Шарт 1. Кейбір $h>0: Nh=T\ \ (N\in\mathrm{N})$ *үшін* $\lambda(x)$ *параметріне қатысты Фредгольм типті айқын емес сызықтық емес теңдеулер жүйесі әулетінің*

$$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x\lambda(\xi)d\xi,0)=0 \tag{18}$$

$\lambda^{(0)}(x)=(\lambda_1^{(0)}(x),\lambda_2^{(0)}(x),\ldots,\lambda_{N+1}^{(0)}(x))$ шешімі бар.

1-ші шарт орындалсын. (10), (11) Коши есебінің $\lambda_r(x)=\lambda_r^{(0)}(x)$ болғанда шешімін $\tilde{v}_r^{(0)}(x,t)$ арқылы белгілейміз. $\tilde{v}^{(0)}(x,[t])=(\tilde{v}_1^{(0)}(x,t),\tilde{v}_2^{(0)}(x,t),\ldots,\tilde{v}_N^{(0)}(x,t))$ функциялар жүйесін құрып аламыз. Енді

$$v^{(0)}(x,t)=\begin{cases}\lambda_r^{(0)}(x)+\tilde{v}_r^{(0)}(x,t), & (x,t)\in\Omega_r,\quad r=\overline{1,N},\\ \lambda_{N+1}^{(0)}(x), & (x,t)\in[0,\omega]\cup\{T\},\end{cases}$$

және

$$u^{(0)}(x,t)=\int_0^x v^{(0)}(\xi,t)d\xi,\quad (x,t)\in\overline{\Omega}$$

функцияларды құрып аламыз.

$\rho_\lambda>0$, $\rho_{\tilde{v}}>0$, $\rho_v>0$, $\rho_u>0$ сандарын таңдап, жиындарды анықтаймыз:

$$S(\lambda^{(0)}(x),\rho_\lambda)=\{\lambda(x)\in C([0,\omega],\mathrm{R}^{n(N+1)}):\left\|\lambda-\lambda^{(0)}\right\|_3=\max_{x\in[0,\omega]}\max_{r=\overline{1,N+1}}\left\|\lambda_r(x)-\lambda_r^{(0)}(x)\right\|<\rho_\lambda\},$$

$$S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]),\rho_{\tilde{v}})=\{\tilde{v}(x,[t])\in C(\overline{\Omega},\Omega_r,\mathrm{R}^{nN}):\left\|\tilde{v}-\tilde{v}^{(0)}\right\|_2<\rho_{\tilde{v}}\},$$

$$S(v^{(0)}(x,t),\rho_v)=\{v(x,t)\in C(\overline{\Omega},\mathrm{R}^n):\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\left\|v(x,t)-v^{(0)}(x,t)\right\|<\rho_v\},$$

$$S(u^{(0)}(x,t),\rho_u)=\{u(x,t)\in C(\overline{\Omega},\mathrm{R}^n):\max_{(x,t)\in\overline{\Omega}}\left\|u(x,t)-u^{(0)}(x,t)\right\|<\rho_u\},$$

$$G_f(x,\rho_u,\rho_v)=\{(x,t,u,v)\in\overline{\Omega}\times\mathrm{R}^{2n}:(x,t)\in\overline{\Omega},\left\|u-u^{(0)}(x,t)\right\|<\rho_u,\left\|v-v^{(0)}(x,t)\right\|<\rho_v\},$$

$$G_g(x,\rho_\lambda)=\{(x,w_1,w_2)\in[0,\omega]\times\mathrm{R}^{2n}:\left\|w_1-v^{(0)}(x,0)\right\|<\rho_\lambda,\left\|w_2-v^{(0)}(x,T)\right\|<\rho_\lambda\}.$$

Шарт 2. (i) $f(x,t,u,v)$ *функциясы үшін* $G_f(x,\rho_u,\rho_v)$ *жиынында бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары* $\dfrac{\partial f}{\partial u}$, $\dfrac{\partial f}{\partial v}$ *бар және келесі теңсіздіктер орындалады*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial u}\right\|\le L_1,\quad \left\|\frac{\partial f}{\partial v}\right\|\le L_2,\quad (x,t,u,v)\in G_f(x,\rho_u,\rho_v)$$

(ii) $g(x,w_1,w_2)$ *функциясы үшін,* $G_g(x,\rho_\lambda)$ *жиынында бірқалыпты үзіліссіз дербес туындылары* $\dfrac{\partial g}{\partial w_1}$, $\dfrac{\partial g}{\partial w_2}$ *бар және келесі теңсіздіктер орындалады*

$$\left\|\frac{\partial f}{\partial w_1}\right\|\le L_3,\quad \left\|\frac{\partial f}{\partial w_2}\right\|\le L_4,\quad (x,w_1,w_2)\in G_g(x,\rho_\lambda)$$

мұндағы L_i *–тұрақты* $(i=\overline{1,4})$.

$\lambda^{(0)}(x)$ және $\tilde{v}^{(0)}(x,[t])$ алайық және төмендегі алгоритм бойынша $\lambda^{(k)}(x)$ және $\tilde{v}^{(k)}(x,[t])$, $k \in \mathrm{N}$ тізбектерін құрастырамыз.

Қадам-1.

$a)$ Сызықтық емес теңдеулер жүйелерінің әулетінен

$$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(0)}) = 0, \quad \lambda(x) \in \mathrm{R}^{n(N+1)}, \quad x \in [0,\omega],$$

$\lambda^{(1)}(x) = \left(\lambda_1^{(1)}(x), \lambda_2^{(1)}(x), \ldots, \lambda_{N+1}^{(1)}(x)\right)$ параметрін табамыз.

$b)$ $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(1)}(x)$ болғанда (10), (11) Коши есептерінің әулетін шеше отырып, $\tilde{v}^{(1)}(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^{(1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(1)}(x,t), \ldots, \tilde{v}_N^{(1)}(x,t)\right)$ функциялар жүйесін табамыз, $x \in [0,\omega]$, $r = \overline{1,N}$.

Табылған функциялар бойынша

$$v^{(1)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(1)}(x) + \tilde{v}_r^{(1)}(x,t), & (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(1)}(x), & (x,t) \in [0,\omega] \cup \{T\}, \end{cases}$$

және

$$u^{(1)}(x,t) = \int_0^x v^{(1)}(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}$$

функцияларды құрып аламыз.

Қадам-2.

$a)$ Сызықтық емес теңдеулер жүйелерінің әулетінен

$$Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(1)}) = 0, \quad \lambda(x) \in \mathrm{R}^{n(N+1)}, \quad x \in [0,\omega],$$

$\lambda^{(2)}(x) = \left(\lambda_1^{(2)}(x), \lambda_2^{(2)}(x), \ldots, \lambda_{N+1}^{(2)}(x)\right)$ параметрін табамыз.

$b)$ $\lambda_r(x) = \lambda_r^{(2)}(x)$ болғанда (10), (11) Коши есептерінің әулетін шеше отырып, $\tilde{v}^{(2)}(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^{(2)}(x,t), \tilde{v}_2^{(2)}(x,t), \ldots, \tilde{v}_N^{(2)}(x,t)\right)$ функциялар жүйесін анықтаймыз, $x \in [0,\omega]$, $r = \overline{1,N}$.

Табылған функциялар бойынша

$$v^{(2)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(2)}(x) + \tilde{v}_r^{(2)}(x,t), & (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(2)}(x), & (x,t) \in [0,\omega] \cup \{T\}, \end{cases}$$

және

$$u^{(2)}(x,t) = \int_0^x v^{(2)}(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}$$

функцияларды құрып аламыз.

Т.с.с. $\lambda^{(k-1)}(x) = \left(\lambda_1^{(k-1)}(x), \lambda_2^{(k-1)}(x), \ldots, \lambda_{N+1}^{(k-1)}(x)\right)$ және $\tilde{v}^{(k-1)}(x,[t]) = \left(\tilde{v}_1^{(k-1)}(x,t), \tilde{v}_2^{(k-1)}(x,t), \ldots, \tilde{v}_N^{(k-1)}(x,t)\right)$ белгілі деген болжаммен k-шы қадамда $\lambda^{(k)}(x)$ және $\tilde{v}^{(k)}(x,[t])$ табамыз. Табылған функциялар бойынша

$$v^{(k)}(x,t) = \begin{cases} \lambda_r^{(k)}(x) + \tilde{v}_r^{(k)}(x,t), & (x,t) \in \Omega_r, \quad r = \overline{1,N}, \\ \lambda_{N+1}^{(k)}(x), & (x,t) \in [0,\omega] \cup \{T\}, \end{cases}$$

және

$$u^{(k)}(x,t) = \int_0^x v^{(k)}(\xi,t)d\xi, \quad (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

функцияларды құрып аламыз.

Шарт 3. (i) Кейбір $h > 0 : Nh = T$ $(N \in \mathrm{N})$, $\rho_\lambda > 0$, $\rho_{\tilde{v}} > 0$, $\rho_v > 0$, $\rho_u > 0$ сандары үшін Шарт 1 және Шарт 2 орындалады, (ii) барлық $(\lambda(x), \tilde{v}(x,[t])) \in S(\lambda^{(0)}(x), \rho_\lambda) \times S(\tilde{v}^{(0)}(x,[t]), \rho_{\tilde{v}})$ үшін

$(n(N+1)\times n(N+1))$ өлшемді $\dfrac{\partial Q_{1,h}(x,\tilde{w}_1,\tilde{w}_2,\tilde{v})}{\partial \tilde{w}_1}$ Якоби матрицасының кері матрицасы бар (мұндағы $\tilde{w}_1=\lambda(x)$, $\tilde{w}_2=\int_0^x \lambda(\xi)d\xi$).

Негізгі нәтиже

Функционалдық параметрлі (10)–(13) шеттік есептің оқшауланған шешімінің бар болуын қамтамасыз ететін ұсынылған алгоритмнің орындылығы мен жинақтылығының жеткілікті шарттары

Теорема 1. Шарт 3 және *келесі теңсіздіктер орындалсын:*

[i] $\left\| \left(\dfrac{\partial}{\partial \tilde{w}_1} Q_{1,h}(x,\lambda(x),\int_0^x \lambda(\xi)d\xi,\tilde{v}) \right)^{-1} \right\| \le \gamma_1(h)$, $x\in[0,\omega]$, $\gamma_1(h)-const$,

[ii] $(L_1\omega+L_2)h<1$,

[iii] $q_1(h)=\gamma_1(h)e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\dfrac{(L_1\omega+L_2)^2h^2}{1-(L_1\omega+L_2)h}<1$,

[iv] $\dfrac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\max\limits_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(0)})\right\|<\rho_\lambda$,

[v] $\dfrac{\gamma_1(h)}{1-q_1(h)}e^{\gamma_1(h)hL_1\omega}\cdot\dfrac{(L_1\omega+L_2)h}{1-(L_1\omega+L_2)h}\max\limits_{x\in[0,\omega]}\left\|Q_{1,h}(x,\lambda^{(0)}(x),\int_0^x \lambda^{(0)}(\xi)d\xi,\tilde{v}^{(0)})\right\|<\rho_{\tilde{v}}$,

[vi] $\rho_\lambda+\rho_{\tilde{v}}<\rho_v$, $(\rho_\lambda+\rho_{\tilde{v}})\omega<\rho_u$.

Онда алгоритм бойынша анықталған $u^{(k)}(x,t)$ функциялар тізбегі $S(u^{(0)}(x,t),\rho_u)$ шарына тиісті және (1)–(3) есебінің $S(u^{(0)}(x,t),\rho_u)$ шарында $u^*(x,t)$ оқшауланған шешіміне жинақталады. Бұл теорема [5]-і еңбектегі 1-ші теореманың дәлелдеу сұлбасы бойынша дәлелденді.

Қорытынды

Сонымен, (4), (5) сызықтық емес интегралдық-дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін шеттік есептер әулетін зерттеу арқылы (1) – (3) аралас туындылы гиперболалық теңдеулер жүйесі үшін сызықтық емес бейлокал шеттік есептің шешімі бар және оқшауланған болудың жеткілікті шарттары алынды.

References:

1 *Dzhumabaev D.S., Asanova A.T., "Priznaki korrektnoj razreshimosti linejnoj nelokal'noj kraevoj zadachi dlya sistem giperbolicheskih uravnenij [Indications of correct solvability of linear nonlocal boundary value problems for systems of hyperbolic equations]" Dopovidi (Doklady) NAN Ukraine, 4 (2010), 7–11. [in Russian]*

2 *Asanova A. T., Dzhumabaev D. S., "Periodic solutions of systems of hyperbolic equations bounded on a plane" Ukr. Math. J., 56:4 (2004), 682 - 694.*

3 *Asanova A.T. , "A Nonlocal Boundary Value Problem for Systems of Quasilinear Hyperbolic Equations" Doklady Mathematics, 74:3 (2006), 787-790.*

4 *Asanova A.T. , Dzhumabaev D. S. , "Well-Posed Solvability of Nonlocal Boundary Value Problems for Systems of Hyperbolic Equations" Differ. Equ., 41:3 (2005), 352-363.*

5 *Dzhumabaev D. S. , Temesheva S. M. , "A parametrization method for solving nonlinear two-point boundary value problems" Comput. Math. Math. Phys., 47:1 (2007), 37–61.*

6 *Temesheva S.M., Abdimanapova P.B., Borisov D.I. "Ob odnom metode resheniya semejstva nelinejnyh kraevyh zadach dlya obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [On a method for solving a family of nonlinear boundary value problems for ordinary differential equations]" Vestnik KazNPU imeni Abaya, «Fiziko-matematicheskie nauki», 73:1(2021), 70-76.*

7 *Temesheva S.M., Abdimanapova P.B. "O vybore nachal'nogo priblizheniya nelinejnoj nelokal'noj kraevoj zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya [On the choice of an initial approximation of a nonlinear nonlocal boundary value problem for a hyperbolic equation] " Tradicionnaya aprel'skaya mezhdunarodnaya matematicheskaya konferenciya v chest' Dnya rabotnikov nauki Respubliki Kazahstan. Tezisy dokladov, 2022, 107-108.*