МРНТИ 27.31.17
УДК 517.956

https://doi.org/10.51889/6758.2022.35.27.002

С.Е. Айтжанов[1], А.С. Қасымбекова[1], Ғ.О. Жұмағұл[2]*

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
**e-mail: Aitzhanov.serik81@gmail.com*

ЛОКАЛДІК ЕМЕС ШЕКАРАЛЫҚ ШАРТТЫ ПСЕВДОГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Бұл жұмыста локалдік емес шекаралық шартты псевдогиперболалық теңдеу үшін шеттік есебінің шешімділігі зерттелінген. Зерттелініп отырған теңдеуді кейде Кирхгоф, Клейн-Гордон жалпы жағдайда Соболев теңдеуі деп те атайды. Бұл жұмыстағы шекаралық шарттың локалдік емес және сызықты еместігімен ерекшеленеді. Қойылған есептің әлсіз жалпылама шешімнің бар және жалғыздығы дәлелденген. Әлсіз жалпыланған шешімнің бар және жалғыздығы үшін уақыт бойынша локалдік теорема дәлелденді. Есептің шешімнің бар және жалғыздығын дәлелдеуде Галеркин әдісі, жуық шешімдерінің априорлық бағалаулары, қажетті интерполяциялық теңсіздіктер, Юнг, Гельдер және Минковский теңсіздіктері, Гронуолла және Бихари леммалары қолданылды. Сызықты емес псевдогиперболалық теңдеу үшін бастапқы-шеттік есептерді қарастыру және зерттеу қажеттілігі практикалық мұқтаждықтардан туындайды. Бұл жұмыста теңдеуге қатысатын шешімнің уақыт бойынша барлық туындыларына $L_2(Q_T)$ кеңістігіне тиісті болатындығы көрсетілді.

Түйін сөздер: псевдогиперболалық теңдеу, шешімділік, жалғыздық, сызықты емес теңдеу, локалдік емес шекаралық шарт.

Аннотация

С.Е. Айтжанов[1], А.С. Касымбекова[1], Г.О. Жумағул[2]
[1]Казахский Национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

В работе исследована разрешимость краевой задачи с нелокальным граничным условием для псевдогиперболического уравнения. Изучаемое уравнение иногда называют уравнением Кирхгофа, Клейн-Гордона, в общем случае – уравнением Соболева. Граничное условие в данной работе отличается нелокальностью и нелинейностью. Доказано существование и единственность слабого обобщенного решения поставленной задачи. Доказана теорема о локальности во времени для существования и единственности слабого обобщенного решения. При доказательстве существования и единственности решения задачи использовались метод Галеркина, априорные оценки приближенных решений, необходимые интерполяционные неравенства, неравенства Юнга, Гелдеря и Минковского, леммы Гронуолла и Бихари. Необходимость рассмотрения и исследования начально-краевых задач для нелинейного псевдогиперболического уравнения вытекает из практических потребностей. В данной работе показано, что все производные по времени решения, участвующего в уравнении, принадлежит пространству $L_2(Q_T)$.

Ключевые слова: псевдогиперболическое уравнение, разрешимость, единственность, нелинейное уравнение, нелокальное граничное уравнение.

Abstract

SOLVABILITY OF A PSEUDOHYPERBOLIC EQUATION WITH A NONLOCAL BOUNDARY CONDITION

Aitzhanov S.E. [1], Kassymbekova A.S. [1], Zhumagul G.O. [2]
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

In the paper the solvability of a boundary value problem with a non-local boundary condition for a pseudo-hyperbolic equation is investigated. The studied equation is sometimes called the Kirchhoff equation, Klein-Gordon equation and in general case, the Sobolev equation. The boundary condition in this paper is distinguished by nonlocality and nonlinearity. The existence and uniqueness of a weak generalized solution of the problem is proved. A time locality theorem is proved for the existence and uniqueness of a weak generalized solution. The Galerkin method, a priori estimates of approximate solutions, the necessary interpolation inequalities, the inequalities of Young, Gelder and Minkowski, the lemmas of Gronwall and Bihari were used to prove the existence and uniqueness of the problem's solution. The need to consider and study initial boundary value problems for a nonlinear pseudo-hyperbolic equation follows from practical needs. In this paper, it is shown that all derivatives of the solution in time involved in the equation belong to the space L.

Keywords: pseudohyperbolic equation, solvability, uniqueness, non-linear equation, non-local boundary equation.

1 Кіріспе

Қазіргі уақытта гиперболалық типтегі теңдеулермен сипатталған сызықтық және сызықтық емес есептер белсенді зерттелуде. Сызықтық гиперболалық теңдеулер жүйелері мен гиперболалық типтегі сызықтық емес теңдеулер иілгіш құрылымдардың тербелісін, реттелетін тұтқыр серпімділік моделін және кері байланысы бартұтқыр демпингті зерттеуде кеңінен қолданылады. Осы тақырыпқа байланысты алғашқы жұмыстардың бірі 20 ғасырдың басында ұсынылған гиперболалық дифференциалдық теңдеулер жүйесімен сипатталған көлденең ығысу деформациясын ескере отырып, Балка динамикасын сипаттайтын Р.С. Тимошенконың [1] жұмысын атауға болады. Ондаған жылдар бойы көптеген зерттеулер осы модельді зерттеуге арналып, жүйенің дұрыстығы мен ұзақ мерзімдегі ерекшеліктеріне қатысты нәтижелер алынды [2-5].

Сызықтық емес гиперболалық теңдеулерді зерттеуге арналған жұмыстардың ішінде логарифмдік сызықтық емес артта қалған толқындарды сипаттайтын келесі есепті келтіруге болады [6].

Соңғы онжылдықта көптеген зерттеушілер тұрақты көрсеткіштері бар сызықтық емес толқындық теңдеулерге қызығушылық танытты [7] жұмысты келтіруге болады. Мұндай типтегі есептер физиканың ядролық физика, оптика және геофизика сияқты көптеген салаларында кездеседі. Логарифмдік сызықтық емес жағдайлар суперсимметриялық өріс теориясында табиғи түрде пайда болатыны кванттық өріс теориясынан белгілі. Мұндай жүйелер электрореологиялық сұйықтықтарда немесе температураға тәуелді тұтқырлығы бар сұйықтықтарда, сызықтық емес тұтқырлықта, кеуекті орта арқылы сүзу процестерінде пайда болады. [8] жұмыста Ball J. демпингтік мүшенің болмауы $|u_t|^{m-2}u_t, |u|^{p-2}u$ бастапқы мүше, шектеулі уақытта теріс бастапқы энергия шешімдерінің қирауына әкелетінін көрсетті. Haraux A, Zuazua E. [9] бастапқы мүше болмаған кезде демпингтік мүше ерікті бастапқы деректер үшін глобалді шешімділігін дәлелдеді. m = 2 сызықтық әлсіреу жағдайында, Levine H. [10] теріс бастапқы энергия үшін шешімнің шектеулі уақытта жойылуын анықтады.

Cavalcanti жәнебасқа да ғалымдар [11] келесі есепті қарастырды:

$$
\begin{aligned}
&|u_t|^{\rho}u_{tt}-\Delta u-\Delta u_{tt}+\int_0^t g(t-s)\Delta u(s)ds-\gamma\Delta u_t=0,\ (x,t)\in\Omega\times(0,\infty),\\
&u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\ x\in\Omega.
\end{aligned}
\tag{*}
$$

Мұндағы $\Omega - R^n$ $(n\geq 1)$ тиісті шенелген аймақ, $\partial\Omega$-тегіс, шенелген, ρ -кейбір шарттарды қанағаттандыратын оң нақты сан, ал $g(t-s)$- оң экспоненциалды кемитін функция. Олар $\gamma\geq 0$ болғанда глобалді шешімнің және $\gamma>0$ үшін экспоненциалды кемитін шешімінің бар екенін көрсетті.

Ұсынылған жұмыс сызықтық емес шекаралық шарты бар квазисызықты псевдогиперболалық теңдеуді одан әрі іргелі зерттеу болып табылады. Псевдопараболалық және псевдогиперболалық теңдеулерді зерттеуге арналған ғылыми жұмыстар [11-15] (және сондағы әдебиеттерді қараңыз) баршылық, алайда псевдогиперболалық теңдеулер әлі толық зерттелмеген.

$Q_T=\{(x,t): x\in\Omega,\ \Omega\subset R^n,\ 0<t<T\}$ цилиндрда псевдогиперболалық теңдеу үшін

$$u_{tt}-\chi\Delta u_t-a\Delta u+cu+|u_t|^{q-2}u_t=b|u|^{p-2}u+f(x,t), \tag{1}$$

локалді емес шекаралық шартты

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}+K\int_0^t g(t-\tau)|u(\tau)|^{\sigma-2}u(\tau)d\tau\right|_{\Gamma}=0,\quad \Gamma=\partial\Omega\times(0,T), \tag{2}$$

және бастапқы шартты

$$u(x,0)=u_0(x),\ u_t(x,0)=u_1(x),\quad x\in\Omega \tag{3}$$

қанағаттандыратын $u(x,t)$ функцияны табуды қарастырамыз. Мұндағы $\Omega \subset R^n$, $n \geq 3$ шектелген аймақ, $\partial\Omega$ шекарасы жеткілікті тегіс, χ, a, p, σ, b және K оң тұрақтылар.

$f(x,t)$, $u_0(x)$ және $u_1(x)$ функциялары келесі шарттарды қанағаттандырсын:

$$\begin{aligned} &f \in L_2(Q_T),\ f_t \in L_2(Q_T),\ g(t) \in C^2[0,T], \\ &u_0(x) \in W_2^2(\Omega),\ u_1(x) \in W_2^2(\Omega) \cap L_q(\Omega). \end{aligned} \tag{4}$$

Анықтама. $u(x,t)$ функциясы $u \in L_\infty(0,T;H^1(\Omega))$, $u \in L_\infty(0,T;L_\sigma(\Gamma))$, $\nabla u_t \in L_2(Q_T)$, $u_t \in L_q(Q_T)$, $u_t \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $u_{tt} \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$, $\nabla u_{tt} \in L_2(Q_T)$ болатын және келесі интегралдық тепе-теңдікті қанағаттандыратын

$$\begin{aligned} &\int_0^T\int_\Omega u_{tt}\eta(x)\phi(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega \left(\chi\nabla u_t\nabla\eta + a\nabla u\nabla\eta + cu\eta\right)\phi(t)dxdt + \\ &+\int_0^T\int_0^t\int_\Gamma (aKg(t-\tau) + \chi Kg'(t-\tau))\,|u(\tau)|^{\sigma-2}\,u(\tau)\eta\phi(t)d\Gamma d\tau dt + \\ &+\chi Kg(0)\int_0^T\int_\Gamma |u|^{\sigma-2}\,u\eta\phi(t)d\Gamma dt + \\ &+\int_0^T\int_\Omega |u_t|^{q-2}\,u_t\eta\phi(t)dxdt = \\ &= b\int_0^T\int_\Omega |u|^{p-2}\,u\eta\phi(t)dxdt + \int_0^T\int_\Omega f\eta\phi(t)dxdt, \end{aligned} \tag{5}$$

функцияны (1)-(3) есебінің әлді жалпылама шешімі деп айтамыз, мұндағы $\phi(t) \in L_2(0,T)$, $\eta(x) \in H^1(\Omega)$.

2 Әлсіз жалпылама шешімнің бар болуы

Теорема 1. Айталық (4) және $2 < p < \dfrac{2N}{N-2}$, $2 \leq \sigma \leq \dfrac{2(N-1)}{N-2}$, $N \geq 3$ шарттар орындалсын. Онда $(0,T)$, $T < T_0$, интервалында (1)-(3) есебінің $u(x,t)$ әлді жалпылама шешімі бар.

Дәлелдеуі. $H^1(\Omega)$ кеңістігінен $\{\Psi_j(x)\}$ кейбір функциялар жүйесін алайық, бұлар $H^1(\Omega)$ кеңістігінде базис құрсын. $H^1(\Omega)$ сеперабелді кеңістік болғандықтан, ондай функциялар жүйесі табылады. (1)-(3) есебінің жуық шешімін келесі түрде іздейміз

$$u_m(x,t) = \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t)\Psi_k(x) \tag{6}$$

мұндағы $C_{mk}(t)$ белгісіз коэффициенттер келесі Коши есебінен анықталады:

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{m} C''_{mk}(t)\int_{\Omega}\Psi_k\Psi_j dx+\chi\sum_{k=1}^{m} C'_{mk}(t)\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx+\\
&+a\sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t)\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx+c\sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t)\int_{\Omega}\Psi_k\Psi_j dx+\\
&+\sum_{k=1}^{m}\int_0^t (aKg(t-\tau)+\chi Kg'(t-\tau))C_{mk}(\tau)\int_{\Gamma}|u(\tau)|^{\sigma-2}\,\Psi_k\Psi_j d\Gamma d\tau+\\
&+\chi Kg(0)\sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t)\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma-2}\,\Psi_k\Psi_j d\Gamma+\\
&+\sum_{k=1}^{m} C'_{mk}(t)\int_{\Omega}|u_{mt}|^{q-2}\,\Psi_k\Psi_j dx=b\sum_{k=1}^{m} C_{mk}(t)\int_{\Omega}|u_m|^{p-2}\,\Psi_k\Psi_j dx+\\
&+\int_{\Omega} f\cdot\Psi_j dx,\;\; 1\le j\le m.
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
&u_{m0}=u_m(0)=\sum_{k=1}^{m} C_{mk}(0)\Psi_k=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{0k}\Psi_k,\\
&u_{m1}=u'_m(0)=\sum_{k=1}^{m} C'_{mk}(0)\Psi_k=\sum_{k=1}^{m}\alpha_{1k}\Psi_k
\end{aligned} \tag{8}$$

сонымен бірге $m\to\infty$ өткенде $H^2(\Omega)$ кеңістігінде әлді $u_{m0}\to u_0$ және $u_{m1}\to u_1$. (9)

3 Априорлық бағалаулар

(7) қатысты $C'_{mj}(t)$ көбейтіп, содан соң, шыққан катыстың екі жағынан $j=\overline{1,m}$ қосындыласақ және τ бойынша 0 ден t-ға дейін интегралдасақ, сонда

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\partial_t u_m(t)|^2+a|\nabla u_m(t)|^2+c|u|^2]dx+\frac{\chi Kg(0)}{\sigma}\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma}\,d\Gamma+\\
&+\chi\int_0^t\int_{\Omega}|\nabla\partial_\tau u_m(\tau)|^2\,dxd\tau+\int_0^t\int_{\Omega}|\partial_\tau u_m(\tau)|^q\,dxd\tau=\\
&=\frac{1}{2}\int_{\Omega}[|\partial_t u_m(x,0)|^2+a|\nabla u_m(x,0)|^2+c|u_m(x,0)|^2]dx+\\
&+\frac{\chi Kg(0)}{\sigma}\int_{\Gamma}|u_m(x,0)|^{\sigma}\,d\Gamma+b\int_0^t\int_{\Omega}|u_m|^{p-2}\,u_m\partial_\tau u_m(\tau)dxd\tau-\\
&-\int_0^t\int_0^{\tau}(aKg(\tau-s)+\chi Kg'(\tau-s))\int_{\Gamma}|u_m(s)|^{\sigma-2}\,u_m(s)\partial_\tau u_m(\tau)d\Gamma ds d\tau+\\
&+\int_0^t\int_{\Omega} f\partial_\tau u_m(\tau)dxd\tau.
\end{aligned} \tag{10}$$

Лемма 1 (O.A. Ladyzhenskaia, V.A. Solonnikov, N.N. Uraltseva, Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type Translations of Mathematical Monographs, 23. Providence, RI: American Mathematical Society, 1968. Zbl 0174.15403.**)**. Кез келген $u\in W_2^1(\Omega)$ функциясы үшін

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{p,\Omega}^{p}\le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\theta p}{2}}\|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)p}\le\\
&\le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\theta p}{2}+\frac{(1-\theta)p}{2}}\le C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\|u\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{p}{2}},
\end{aligned}$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы

$$C_1=\left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\theta p},\ \theta=\frac{(p-2)n}{2p},\ 0<\theta<1,\ 2<p<\frac{2n}{n-2},\ n\geq 3.$$

$$\|u\|_{q,\Gamma}^{q}\leq C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta q}{2}}\|u\|_{2,\Omega}^{(1-\theta)q}\leq$$

$$\leq C_1\left(\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{\theta q}{2}+\frac{(1-\theta)q}{2}}\leq C_1\max\{1;\ \chi\}\left(\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2}+\|u\|_{2,\Omega}^{2}\right)^{\frac{q}{2}},$$

теңсіздігі орындалады, мұндағы

$$C_1=\left(\frac{2(n-1)}{n-2}\right)^{\theta q},\ \theta=\frac{(q-2)n+2}{2q},\ 0<\theta<1,\ 2<q<\frac{2(n-1)}{n-2},\ n\geq 3.$$

Лемма 2. (Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972, 588 б. 20 беттегі лемма 1.2). Егер $f\in L_p(0,T;X)$ және $\frac{\partial f}{\partial t}\in L_p(0,T;X),\ 1\leq p\leq\infty$, онда f функциясы $[0,T]\to X$ үзіліссіз бейнелеу болады, $(0,T)$ аралығында нөлдік өлшеммен өзгеруі мүмкін.

Енді (10) тепе-теңдіктің оң жағына 1 лемманы, Юнг және Гельдер теңсіздіктерін, сонымен бірге Бихари леммасын қолдансақ, нәтижеде априорлық бағалауды аламыз

$$\|u_{mt}\|_{2,\Omega}^{2}+a\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2}+c\|u_m\|_{2,\Omega}^{2}+\frac{2\chi Kg(0)}{\sigma}\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma}\,d\Gamma\leq$$

$$\leq\frac{y(0)+C_4}{\left[1-C_5(p-2)t\left(y(0)+C_4\right)^{p-2}\right]^{\frac{1}{p-2}}}.$$

Осы бағалаудан $T_0>0$ бар және барлық $t\in[0,T],\ T<T_0$, үшін

$$\|u_{mt}\|_{2,\Omega}^{2}+a\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^{2}+c\|u_m\|_{2,\Omega}^{2}+\frac{2\chi Kg(0)}{\sigma}\int_{\Gamma}|u_m|^{\sigma}\,d\Gamma\leq C_6,\qquad(11)$$

орындалады, мұндағы C_6 тұрақтысы $m\in N$ тәуелсіз.

(10) қатыстан және (11) ескере отырып, тағы бір бағалауды аламыз:

$$\chi\int_0^T\int_{\Omega}|\nabla\partial_t u_m|^2\,dxdt+\int_0^T\int_{\Omega}|\partial_t u_m|^q\,dxdt\leq C_7.\qquad(12)$$

(7) қатыстан келесі теңдік алынады

$$\sum_{k=1}^{m}C''_{mk}(0)\int_{\Omega}\Psi_k\Psi_j dx+\chi\sum_{k=1}^{m}C'_{mk}(0)\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx+$$
$$+a\sum_{k=1}^{m}C_{mk}(0)\int_{\Omega}\nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx+c\sum_{k=1}^{m}C_{mk}(0)\int_{\Omega}\Psi_k\Psi_j dx+$$
$$+\chi Kg(0)\sum_{k=1}^{m}C_{mk}(0)\int_{\Gamma}|u_m(0)|^{\sigma-2}\,\Psi_k\Psi_j d\Gamma+\qquad(13)$$
$$+\sum_{k=1}^{m}C'_{mk}(0)\int_{\Omega}|u_{mt}(0)|^{q-2}\,\Psi_k\Psi_j dx=b\sum_{k=1}^{m}C_{mk}(0)\int_{\Omega}|u_m(0)|^{p-2}\,\Psi_k\Psi_j dx+$$
$$+\int_{\Omega}f(0)\cdot\Psi_j dx,\ \ 1\leq j\leq m.$$

$\frac{\partial f}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ болғандықтан және 2 леммадан $f(0) \in L_2(\Omega)$, сонымен бірге $W_2^2(\Omega)$ кеңістігінде $u_{0m} \to u_0$ әлді, $|\Delta u_{0m}| \le const$, $W_2^2(\Omega)$ кеңістігінде $u_{1m} \to u_1$ әлді, $u_0 \in W_2^2(\Omega)$, $u_1 \in W_2^2(\Omega) \cap L_q(\Omega)$ $q > 2,\ 2 < p < \frac{2(n-1)}{n-2},\ \sigma \le \frac{2n-3}{n-2},\ N \ge 3,$ $|u_{1m}|^{q-2} u_{1m}, |u_{0m}|^{p-2} u_{0m}$ және $|u_{0m}|^{\sigma-2} u_{0m}$ функциялары $L_2(\Omega)$ кеңістігінде тиісті. Бұдан (13) теңдікті $C''_{mj}(0)$ көбейтіп $j = \overline{1,m}$ бойынша қосындыласақ, нәтижеде

$$\begin{aligned}&\int_\Omega |u''_m(0)|^2 dx \le a\int_\Omega |\Delta u_{0m}|^2 dx + \chi\int_\Omega |\Delta u_{1m}|^2 dx + \chi K g(0)\int_\Gamma |u_{0m}|^{2(\sigma-1)} d\Gamma + \\ &+c\int_\Omega |u_{0m}|^2 dx + \int_\Omega |u_{1m}|^{2(q-1)} dx + b\int_\Omega |u_{0m}|^{2(p-1)} dx + \int_\Omega |f(0)|^2 dx \le C.\end{aligned} \tag{14}$$

Бұдан біз (7) қатсыты дифференциалдауға негіз болатындығын аламыз. Енді (7) қатысты t бойынша дифференциалдайық

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^m C'''_{mk}(t)\int_\Omega \Psi_k \Psi_j dx + \chi\sum_{k=1}^m C''_{mk}(t)\int_\Omega \nabla\Psi_k \nabla\Psi_j dx + \\ &+a\sum_{k=1}^m C'_{mk}(t)\int_\Omega \nabla\Psi_k\nabla\Psi_j dx + c\sum_{k=1}^m C'_{mk}(t)\int_\Omega \Psi_k\Psi_j dx + \\ &+\sum_{k=1}^m (aKg(0) + \chi K g'(0))C_{mk}(t)\int_\Gamma |u(t)|^{\sigma-2}\, \Psi_k\Psi_j d\Gamma d\tau + \\ &+\sum_{k=1}^m \int_0^t (aKg'(t-\tau) + \chi K g''(t-\tau))C_{mk}(\tau)\int_\Gamma |u(\tau)|^{\sigma-2}\, \Psi_k\Psi_j d\Gamma d\tau + \\ &+\chi K g(0)(\sigma-1)\int_\Gamma |u_m|^{\sigma-2} u_{mt}\Psi_j d\Gamma + (q-1)\int_\Omega |u_{mt}|^{q-2} u_{mtt}\Psi_j dx = \\ &= b(p-1)\int_\Omega |u_m|^{p-2} u_{mt}\Psi_j dx + \int_\Omega f_t \cdot \Psi_j dx,\quad 1 \le j \le m.\end{aligned} \tag{15}$$

(15) қатысты $C''_{mj}(t)$ көбейтіп, оны $j = \overline{1,m}$ бойынша қосындыласақ

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |u_{mtt}(t)|^2 dx + \chi\int_\Omega |\nabla u_{mtt}(t)|^2 dx + (q-1)\int_\Omega |u_{mt}(t)|^{q-2}|u_{mtt}(t)|^2 dx + \\ &+a\int_\Omega \nabla u_{mt}(t)\nabla u_{mtt}(t)dx + c\int_\Omega u_{mt}(t)u_{mtt}(t)dx + \\ &+(aKg(0) + \chi K g'(0))\int_\Gamma |u_m(t)|^{\sigma-2} u_m(t)u_{mtt}(t)d\Gamma + \\ &+\int_0^t (aKg'(t-\tau) + \chi K g''(t-\tau))\int_\Gamma |u_m(\tau)|^{\sigma-2} u_m(\tau)u_{mtt}(t)d\Gamma d\tau + \\ &+\chi K g(0)(\sigma-1)\int_\Gamma |u_m|^{\sigma-2} u_{mt}u_{mtt}(t)d\Gamma + \\ &= b(p-1)\int_\Omega |u_m(t)|^{p-2} u_{mt}(t)u_{mtt}(t)dx + \int_\Omega f'(t)u_{mtt}(t)dx.\end{aligned} \tag{16}$$

Осы (16) теңдікке Юнг және Гельдер теңсіздіктерін, 1 лемманы, сонымен бірге (11) және (12) бағалауларды қолдансақ, нәтижеде бізге қажетті априорлық бағалау алынады

$$ess.\sup_{0\le t\le T}\int_\Omega |u_{mtt}(t)|^2\,dx+\chi\int_0^T\int_\Omega |\nabla u_{mtt}(t)|^2\,dxdt+(q-1)\int_0^T\int_\Omega |u_{mt}(t)|^{q-2}|u_{mtt}(t)|^2\,dxdt\le C_{12}. \quad (17)$$

Осы алынған (11), (12) және (17) бағалаулардан (7) қатысты 0 ден Т-ға дейін интегралдап, шекке көшуге болады, нәтижеде біз әлді жалпылама шешімнің анықтамасындағы тепе-теңдікке келеміз.

4 Шешімнің жалғыздығы

Теорема 2. Айталық (4) және $p\le 2+\dfrac{2}{N-2},\ \ \sigma\le 2+\dfrac{1}{N-2},\ \ N\ge 3$ шарттар орындалсын. Онда (1)-(3) есебінің $(0,T)$ интервалында әлді жалпылама шешімі жалғыз.

Дәлелдеуі. Кері жорияық, (1)-(3) есебінің шешімі екеу $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ болсын. Онда олардың айырымы $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ біртекті бастапқы шарттарды $u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0$ және келесі интегралдық тепе-теңдікті қанағттандырады

$$\begin{aligned}&\int_0^t\int_\Omega u_{\tau\tau}\eta(x)\phi(\tau)dxd\tau+\int_0^t\int_\Omega\big(\chi\nabla u_\tau\nabla\eta+a\nabla u\nabla\eta+cu\eta\big)\phi(\tau)dxd\tau+\\&+\int_0^t\int_0^\tau\int_\Gamma(aKg(\tau-s)+\chi Kg'(\tau-s))\Big(|u_1(s)|^{\sigma-2}u_1(s)-|u_2(s)|^{\sigma-2}u_2(s)\Big)\eta(x)\phi(\tau)d\Gamma dsd\tau+\\&+\chi Kg(0)\int_0^t\int_\Gamma\Big(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\Big)\eta(x)\phi(\tau)d\Gamma d\tau+\\&+\int_0^t\int_\Omega\Big(|u_{1\tau}|^{q-2}u_{1\tau}-|u_{2\tau}|^{q-2}u_{2\tau}\Big)\eta(x)\phi(\tau)dxd\tau=b\int_0^t\int_\Omega\Big(|u_1|^{p-2}u_1-|u_1|^{p-2}u_1\Big)\eta(x)\phi(\tau)dxd\tau.\end{aligned}\quad (18)$$

Бұл (18) қатыс кез келген $\phi(t)\in L_2(0,T)$ функциясы үшін орындалатындықтан, онда бекітілген $\tau\in(0,t)$ үшін

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{tt}\eta(x)dx+\int_\Omega\big(\chi\nabla u_t\nabla\eta+a\nabla u\nabla\eta+cu\eta\big)dx+\\&+\int_0^t\int_\Gamma(aKg(t-\tau)+\chi Kg'(t-\tau))\Big(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\Big)\eta(x)d\Gamma ds+\\&+\chi Kg(0)\int_\Gamma\Big(|u_1(t)|^{\sigma-2}u_1(t)-|u_2(t)|^{\sigma-2}u_2(t)\Big)\eta(x)d\Gamma+\\&+\int_\Omega\Big(|u_{1t}|^{q-2}u_{1t}-|u_{2t}|^{q-2}u_{2t}\Big)\eta(x)dx=b\int_\Omega\Big(|u_1|^{p-2}u_1-|u_1|^{p-2}u_1\Big)\eta(x)dx\end{aligned}$$

теңдік орынды.

$\eta(x)\in W_2^1(\Omega)$ болғандықтан, $\eta=u_t(x,t)$ деп алайық, сонда

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u_{tt}u_tdx+\int_\Omega\big(\chi\nabla u_t\nabla u_t+a\nabla u\nabla u_t+cuu_t\big)dx+\\&+\int_0^t\int_\Gamma(aKg(t-\tau)+\chi Kg'(t-\tau))\Big(|u_1(\tau)|^{\sigma-2}u_1(\tau)-|u_2(\tau)|^{\sigma-2}u_2(\tau)\Big)u_t(t)d\Gamma ds+\\&+\chi Kg(0)\int_\Gamma\Big(|u_1(t)|^{\sigma-2}u_1(t)-|u_2(t)|^{\sigma-2}u_2(t)\Big)u_t(t)d\Gamma+\\&+\int_\Omega\Big(|u_{1t}|^{q-2}u_{1t}-|u_{2t}|^{q-2}u_{2t}\Big)u_t(t)dx=b\int_\Omega\Big(|u_1|^{p-2}u_1-|u_1|^{p-2}u_1\Big)u_t(t)dx\end{aligned}\quad (19)$$

қатысты аламыз.

Келесі теңсіздіктерді қолданайық

$\left| |u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2 \right| \le (q+1)\left(|u_1|^q + |u_2|^q\right)|u_1 - u_2|$, мұндағы $q > 0$,

$\left|\left(|u_1|^q u_1 - |u_2|^q u_2\right)(u_1 - u_2)\right| \ge |u_1 - u_2|^{q+2}$, мұндағы $q > 0$.

Онда (19) қатысты келесі түрде жазамыз

$$\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\, dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)dx + \chi\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_\tau|^2 dx d\tau + \int_0^t\int_\Omega |u_\tau|^q dx d\tau \le$$
$$\le \int_0^t\int_0^\tau\int_\Gamma g_1(\tau - s)\left(|u_1(s)|^{\sigma-2} u_1(s) - |u_2(s)|^{\sigma-2} u_2(s)\right)u_\tau(\tau) d\Gamma ds d\tau + \chi K g(0)\int_0^t\int_\Gamma \left(|u_1(\tau)|^{\sigma-2} u_1(\tau) - \right. \quad (20)$$
$$\left. - |u_2(\tau)|^{\sigma-2} u_2(\tau)\right)u_\tau(\tau) d\Gamma d\tau + b\int_0^t\int_\Omega \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_1|^{p-2} u_1\right)u_\tau(\tau) dx d\tau.$$

(20) теңсіздіктің оң жағына Гельдер және Минковский теңсіздіктерін, сонымен қатар Соболев кеңістігінде енгізу теоремаларын $H^1(\Omega) \subset L_r(\Omega)$ және $H^1(\Omega) \subset L_{2r(p-2)/(r-2)}(\Omega)$, $r = \dfrac{2N}{N-2}$, $p \le 2 + \dfrac{2}{N-2}$, $N \ge 3$. $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ функцияларының тегістік қасиеттерін қолданып келесі бағалау алынады

$$\left| b\int_0^t\int_\Omega \left(|u_1|^{p-2} u_1 - |u_1|^{p-2} u_1\right)u_\tau(\tau) dx d\tau \right| \le \frac{1}{6}\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau) dx d\tau + C_{13}\int_0^t \left(a\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + c\|u(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau. \quad (21)$$

Осыған ұқсас оң жақтағы қалған қосылғыштар $\sigma \le 2 + \dfrac{1}{N-2}$, $N \ge 3$ үшін бағаланады

$$\left| \chi K g(0)\int_0^t\int_\Gamma \left(|u_1(\tau)|^{\sigma-2} u_1(\tau) - |u_2(\tau)|^{\sigma-2} u_2(\tau)\right)u_\tau(\tau) d\Gamma d\tau \right| \le$$
$$\le \frac{1}{6}\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau) dx d\tau + C_{14}\int_0^t \left(a\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + c\|u(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau.$$

$$\left| \int_0^t\int_0^\tau\int_\Gamma g_1(\tau - s)\left(|u_1(s)|^{\sigma-2} u_1(s) - |u_2(s)|^{\sigma-2} u_2(s)\right)u_\tau(\tau) d\Gamma ds d\tau \right| \le$$
$$\le \frac{1}{6}\int_0^t\int_\Omega u_\tau^2(\tau) dx d\tau + C_{15}\int_0^t \left(a\|\nabla u(\tau)\|_{2,\Omega}^2 + c\|u(\tau)\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau. \quad (22)$$

Алынған (21) және (22) теңсіздіктерден

$$\int_\Omega |u_t|^2\, dx + \int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)dx + 2\chi\int_0^t\int_\Omega |\nabla u_\tau|^2 dx d\tau + 2\int_0^t\int_\Omega |u_\tau|^q dx d\tau \le$$
$$\le C_{16}\int_0^t \left(\int_\Omega u_\tau^2(\tau) dx + \int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)dx\right)d\tau,$$

шығады, бұдан Грануолла леммасынан $(0,T)$ интервалының барлық жерде дерлік уақытында

$\int_\Omega |u_t|^2\, dx + \int_\Omega \left(a|\nabla u|^2 + c|u|^2\right)dx = 0$ теңдігі алынады. Осыдан (1)-(3) есебінің әлді жалпылама шешімі жалғыздығы шығады.

Қорытынды

Жұмыста псевдогиперболалық теңдеу үшін сызықты емес динамикалық шекаралық шартты шеттік есебі зерттелген. Бқл есептің қиындығы теңдеудің өзі сызықты емес және шекаралық шарты сызықты емес, сонымен қатар локалді еместігінде. Сызықты емес есептерді зерттеу қазіргі таңда математиктер, механиктер мен физиктердің қызығұшылығын тудыруда. Себебі сызықты емес есептердің қолданылулар аумағы өте кең.

Бұл жұмыста шеттік есептің шешімі бар және жалғыздығы соболев кеңістігінде дәлелденді. Бұл жұмыста алынған нәтижелер мен әдістер басқа да сыызықты емес есептерде қолданыстарын табады.

Жұмыс ҚР БҒМ АР 08052425 жобасын гранттық қаржыландыру есебінен орындалды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Timoshenko P.S. On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. J. Sci.-1921.-41.-P.744–746. https://doi.org/10.1080/14786442108636264*

2 *Feng D., Shi D., and Zhang W. Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation // Sci. China Math.-1998.- 4.-P.483–490. https://doi.org/10.1007/BF02879936*

3 *Kim J.U. and Renardy Y. Boundary control of the Timoshenko beam // SIAM J. Contr. Optim.-1987-25.-P. 1417–1429.*

4 *Messaoudi S.A. and Mustafa M.I. On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams // Nonlin. Diff. Eq. Appl. -2008.-15.-P. 655–671. https://doi.org/10.1007/s00030-008-7075-3*

5 *Raposo C., Ferreira J., Santos M. and Castro N. Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings // Appl. Math. Lett. -2005. -Vol.18,-P. 535–541. https://doi.org/10.1016/j.aml.2004.03.017*

6 *Kafini M. and Messaoudi S.A. Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay // Appl Anal.-2018. -Vol. 46. -P.530-547. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1504029*

7 *Ghegal S., Hamchi I. Messaoudi S. A. Global existence and stability of a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // Appl Anal.-2018.-P.1333-1343. https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1530760*

8 *Ball J. Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations // Quart J Math. -1977. -Vol. 28. -P. 473–486.*

9 *Haraux A, Zuazua E. Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems // Arch Ration Mech Anal. -1988. -Vol.150, -P. 191–206. https://doi.org/10.1007/BF00282203*

10 *Levine H. Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations // SIAM J Math Anal.-1974. -Vol. 5, -P. 138–146. https://doi.org/10.1137/0505015*

11 *Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math Methods Appl Sci.-2001. - Vol.24, -P. 1043–1053.* http://dx.doi.org/10.1002/mma.250

12 *Korpusov M.O. On blow up of solutions to a Kirchhoff type dissipative wave equation with a source and positive energy // Sib Math J. -2012. -Vol.53, 702–717. https://doi.org/10.1134/S003744661204012X*

13 *Showalter R. E. Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space // SIAM J. Math. Anal.-1972. -Vol.3, № 3. -P. 527-543.*

14 *Korpusov M.O. Blow-up of ion-sound waves in plasma with non-linear sources on the boundary // Izv.: Mathematics. -2012. -Vol. 76(2). -P.310-345. https://doi.org/10.1070/IM2012v076n02ABEH002584*

15 *Айтжанов С.Е., Бекенаева К.С., Жумагул Г.О. Разрешимость псевдогиперболического уравнения с нелинейным граничным условием// Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. 2020. -Т.108. №4. -С. 26-37. https://doi.org/10.26577/JMMCS.2020.v108.i4.03*

Reference:

1 *Timoshenko P.S. (1921) On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars // The London, Edinburgh, and Dublin Philos. Mag. J. Sci. 41, P.744-746.*

2 *Feng D., Shi D., and Zhang W. (1998) Boundary feedback stabilization of Timoshenko beam with boundary dissipation // Sci. China Math. 41,-P.483–490.*

3 *Kim J.U. and Renardy Y. (1987) Boundary control of the Timoshenko beam // SIAM J. Contr. Optim. 25, -P. 1417–1429.*

4 *Messaoudi S.A. and Mustafa M.I. (2008) On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams Nonlin.// Diff. Eqs. Appl. 15 -P. 655–671.*

5 *Raposo C., Ferreira J., Santos M. and Castro N. (2005) Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings // Appl. Math. Lett.18,-P. 535–541.*

6 Kafini M.and Messaoud S.A. (2018) Local existence and blow up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay // Appl Anal. -P.530-547.

7 Ghegal S., Hamchi I. Messaoudi S. A. (2018) Global existence and stability of a nonlinear wave equation with variable-exponent nonlinearities // Appl Anal. -P.1333-1343.

8 Ball J. (1977) Remarks on blow-up and nonexistence theorems for nonlinear evolution equations // Quart J Math. 28, -P. 473–486.

9 Haraux A, Zuazua E. (1988) Decay estimates for some semilinear damped hyperbolic problems // Arch Ration Mech Anal. 150, -P. 191–206.

10 Levine H. (1974) Some additional remarks on the nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations // SIAM J Math Anal.5, -P. 138–146.

11 Cavalcanti M.M., Domingos Cavalcanti V.N., Ferreira J. (2001) Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping // Math Methods Appl Sci.24, -P. 1043–1053.

12 Korpusov M.O.(2012) On blow up of solutions to a Kirchhoff type dissipative wave equation with a source and positive energy // Sib Math J. -Vol.53, 702–717.

13 Showalter R. E. (1972) Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banachspace // SIAM J. Math. Anal. -3, № 3. -P. 527-543.

14 Korpusov M.O. (2012) Blow-up of ion-sound waves in plasma with non-linear sources on the boundary // Izv.: Mathematics. -Vol. 76(2). -P.310-345.

15 Aitzhanov S.E., Bekenayeva K.S., Zhumagul G.O. Razreshimost' psevdogiperbolicheskogo uravneniya s nelineynym granichnym usloviyem [Solvability of a pseudo-hyperbolic equation with a nonlinear boundary condition]. Vestnik KazNU. Seriya matematika, mekhanika, informatika. 2020. -T.108. №4. -C. 26-37. (In Russian)