МРНТИ 27.01.45
УДК 372.851

https://doi.org/10.51889/9539.2022.20.61.014

Л.Е. Совет1, С.Е. Касенов[2], А.М. Тлеулесова[2], Б.М. Иманбаев[3], Г.Б. Әбен[1]*

[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
[3]JOS қаржы лицейі Алматы қ., Қазақстан
**e-mail:sovet.laura@mail.ru*

ФИГУРАНЫҢ АУДАНЫН ТАБУДА АНЫҚТАЛҒАН ИНТЕГРАЛДЫ ҚОЛДАНУДЫҢ ТИІМДІ ЖОЛДАРЫ

Аңдатпа

Білім беру саласының негізгі міндеті – оқушыны жеке тұлға ретінде қалыптастыру, дамыту барысында, адамзаттың басты құндылықтарын ескере отырып, білім алушыға қажетті жағдайлар жасау. Қазіргі уақытта математика пәнін оқытуда түрлі әдіс-тәсілдер мен оқыту жолдары қолданылуда. Біз бұл мақалада жалпы оқушыларға математика сабақтарында анықталған интеграл тақырыбын түсіндіру кезінде проблемалық әдістерді қолдануға басты назарды аударамыз. Проблемалық әдісті қолдану – оқушының қызығушылығын арттып, өзіндік ізденуге, терең ойлауға және қандайда бір түйінді шешуді, тығырықтан шығу жолдарын үйретуге жол ашады. Ал анықталған интеграл тақырыбына баршамызға мәлім әр түрлі қызықты есептер бар (негізгі теоремасы Ньютон-Лейбниц формуласымен шығарылады). Соның ішінде жазықтағы фигуралардың, қисық сызықты трапецияның ауданы, жалпы фигуралардың ауданын есептеуде осы анықталған интегралды қолданудың тиімді жолдарын оқушыларға белгілі бір проблема қою арқылы үйрету. Осы әдістемені біз өз тақырыбымыға қолданып көрдік және соған байланысты түрлі есептерді қарастырдық.

Түйін сөздер: анықталған интеграл, Ньютон-Лейбниц формуласы, интегралдау әдістері, математикалық оқыту.

Аннотация

Л.Е. Совет[1], С.Е. Касенов[2], А.М. Тлеулесова[2], Б.М. Иманбаев[3], Г.Б. Абен[1]
[1]Казахский национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[3]Финансовый лицей JOS, г. Алматы, Казахстан

ЭФФЕКТИВНЫЕ СПОСОБЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА ПРИ НАХОЖДЕНИИ ПЛОЩАДИ ФИГУРЫ

Задача образовательной сферы – создание необходимых условий для обучающегося в процессе его становления, развития как личности, с учетом главных ценностей человечества. В преподавании математики используются различные методы и способы обучения. В статье мы акцентируем внимание на использовании проблемных методов при объяснении темы определенного интеграла, на уроках математики для учащихся в целом. Использование проблемного метода позволяет повысить интерес учащегося к самостоятельному поиску, глубокому мышлению и решению каких-либо проблем, выходам из тупика. Как известно, на тему определенного интеграла, есть разные интересные задачи (основная теорема выводится по формуле Ньютона-Лейбница). В том числе, при вычислении площади фигур, криволинейной трапеции, научить учащихся эффективным способам использования определенного интеграла, путем постановки задачи. Данную методику мы применили к своей теме и рассмотрели различные связанные с ней задачи.

Ключевые слова: определенный интеграл, формула Ньютона-Лейбница, методы интегрирования, методика математического обучения.

Abstract

EFFECTIVE WAYS TO USE A CERTAIN INTEGRAL WHEN FINDING THE AREA OF A FIGURE

Sovetov L.E.[1], Kasenov S.E.[2], Tleulesova A.M.[2], Imanbayev B.M.[3], Aben G.B.[1]
[1]Kazakh National women's pedagogical University, Almaty, Kazakhstan,
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[3]Financial lyceum JOS, Almaty, Kazakhstan

The main task of the educational sphere is to create the necessary conditions for the student in the process of his formation, development as a person, taking into account the main values of humanity. Currently, various methods and methods of teaching are used in teaching mathematics. In this article, we focus on the use of problem methods in explaining the topic of the integral defined in mathematics lessons for students in general. The use of the problem method allows to increase the student's interest in independent search, deep thinking and solving any problems, ways out of a dead end. As everyone knows, there are various interesting problems on the topic of a certain integral (the main theorem is derived by the Newton-Leibniz formula). In particular, when calculating the area of figures on a plain, a curved trapezoid, to teach students effective ways to use a certain integral by setting a certain task. We applied this methodology to our topic and considered various tasks related to it.

Keywords: definite integral, Newton-Leibniz formula, integration methods, mathematical teaching.

Кіріспе

Қазіргі уақытта білім беру жүйесінің басты алға қойған басты мақсаттарының бірі – бәсекеге қабілетті мамандарды дайындау болып табылады. Ал ол мақсатқа жету жолында, біз білім беру барысында оқытудың түрлі технологияларын қолдана отырып, білімді де білікті жас ұрпақ тәрбиелеуіміз қажет.

Дәстүрлі оқыту барысында негізгі күш-жігер – тек дайын білімді, дағдыларды игеруге бағытталады. Бұл жағдайды өзгерту үшін оқушының одан әрі жоғары білім алуға дайындығын қамтамасыз ететін мектепте математиканы оқытудың жаңа тәсілдері қажет. Осындай тәсілдердің бірі оқушылардың математикалық оқу іс-әрекет тәсілдерін игеруіне бағытталған проблемалық тәсіл болып табылады, ол оқу іс-әрекетінің арнайы түрлерін жобалау және ұйымдастыру арқылы жүзеге асырылады. Осы қиындықтарға қарамастан, қазіргі заманғы мектеп жоғарыда көрсетілген мақсаттарды жүзеге асыруға тырысуда. Осыған байланысты, математиканы оқытудың қалыптасқан мақсаттары көбінесе мазмұнды ғана емес, сонымен бірге жалпы дамуды да ескереді [1].

Проблемалық оқыту дегеніміз – сыныпта оқушылар мұғаліммен бірге кез келген сұраққа шешім табуға (мәселені шешуге) ұмтылып, қиындықтарды жеңіп, осы мақсатқа жету үшін психоәлеуметтік жағдайларды қалыптастырады. Аталмыш оқытудың мәні – оқушылар алған білімнің әр үзіндісі, мысалы, анықтамада, теоремада, дәлелде, алгоритмде болуы қажет:

- есеп пен шешім;
- шешімнің бір бөлігі;
- оқушылар жақсы түсінетін және шешуге ынтасы бар, бұрын қойылған есепті шешуге қадам.

Жалпы оқыту барысында қолданылатын технологиялардың ішінде проблемалық оқыту ерекше орынды алады деуге болады. Бұл технология түрін зерттеуге үлес қосқан ғалымдар деп Сократты, Руссо, Дистерверг, Ушинскийді айтуға болады. Соның ішінде, Дистерверг: «жаман ұстаз ақиқатты айта салады, жақсы ұстаз оны іздеп табуды үйретеді» деген екен [1].

Проблемалық жағдай табиғи түрде пайда болуы мүмкін немесе оны мұғалім өзі құруы мүмкін. Басқа жағдайда да, бұл мәселе заттардың, қатынастардың, құбылыстардың, яғни математикаға қатысы жоқ табиғи жүйенің үзіндісін, сондай-ақ математиканы оқыту кезінде туындайтын мәселелерді білдіруі мүмкін [2].

Оқушыларды белсенділігін арттыру үшін жиі ұсынылатын әдістерінің бірі проблемалық жағдайларды қолдану болып табылады: проблемалық жағдайларды оқытуды бастау, жаңа білімді игерудің бастапқы нүктесін жасау және оны оқу процесінде қолдану ұсынылады. Әдістемелік әдебиеттерде оқытуды ұйымдастырудың ерекше формасы – проблемалық оқыту туралы жиі айтылады. Сонымен қатар, контекстік оқытудағы білім мазмұнының негізгі бірлігі бірдей проблемалық жағдай болып табылады, өйткені ол кез-келген мәселені шешуге қажетті әртүрлі пәндердің білімін интеграциялаудың нақты мүмкіндіктерін жасайды [3].

Сонымен қатар, оқушының белгілі бір фактіні ашуға бағытталған оқыту технологиялары оқушыларға гипотезаларды тұжырымдауға, дәлелдеуге және жоққа шығаруға, қателіктер жіберуге, қарама-қайшылықтардан үйренуге, бір сөзбен айтқанда, білім алу процесіне белсенді қатысуға рұқсат етілген жағдайда тиімдірек болатыны белгілі. Әрине, бұл процесті мұғалім басқаруы керек. Алайда басшылықтың оңтайлы шекаралары – бұл ашық мәселе құрастыру. Ал оған жауап беру мұғалімнің өзіне ұсынылады. Әдебиетте бұл сұраққа жауап берудің көптеген нұсқалары сипатталған: оқушылармен топтардағы диалог жұмысынан бастап, оқушылардың жеке жұмысын ұйымдастыруға дейін.

Зерттеу әдістері

Проблемалық әдістің квадратуралық формулаларында тек функцияның мәндері қолданылады және оның туындыларының мәндері қолданылмайды. Туындыларды қолдана отырып интегралдық бағытқа

Эйлер-Маклорен формуласын және оған сәйкес серияларды қолдануға негізделген проблемалық әдіс жатады [3].

Бұл үрдісте маңызды деп табатынымыз:

- проблемаларды байқау, анықтау және нақтылау қабілеттерін қалыптастыру;
- эвристикалық мәселелерді шешу барысында қолдану қабілетін қалыптастыру;
- математикалық эксперимент барысында ғана емес, теориялық жолмен де кіріктірілген гипотезаларды тексеру қабілеті мен іскерлігін дамыту;
- оқушыларды талқыланған есептермен қызықтырып, барлық оқушылар оларды жақсы түсініп, шешуге қызығушылықтары артады [4].

Проблемалық оқыту теориясының негізін қалаушы ғалымдар – оқудағы ойлану қызметі тек қана жаңа білімді үйреніп, меңгеріп қана қоймай, алға қойған мақсатқа жетудің жаңа әдістерін үнемі үйреніп отыру деп есептейді. А.М. Матюшкиннің анықтамасы бойынша, «оқытудағы ойланудың негізгі қызметі оның жаңа білім алып, жаңа әрекет етуге мүмкіндік беретіндігіне. Адам өміріндегі барлық білім жүйесі мен іс-әрекеті оның ойлау қабілетінің нәтижесі. Адамның білімі оның ойлануының көрінісі, яғни негізгі танымдық құралы» [5].

Енді анықталған интеграл ұғымына анықтама беріп өтсек. Анықталған интеграл математикалық талдаудың негізгі ұғымдарының бірі. Анықтама бойынша анықталған интеграл – бұл ерекше түрдегі қосындылардың (интегралдық қосындылардың) шегіне тең сан. Берілген функциялардың анықталған интегралдарын жуықтап есептеу теориясы сандық талдауда маңызды орын алады және практикалық тұрғыдан, атап айтқанда математикалық модельдеу үшін маңызды. Осы интегралдарды есептеудің кеңінен танымал әдісі – проблемалық оқыту әдісі болып табылады. Әдіскерлер үшін проблемалық оқыту дегеніміз – математиканы оқыту үрдісін ұйымдастыру, онда проблемаларды ұсыну, оларды шешу және тексеру, сонымен қатар проблемалық жағдайларды байқауға, проблемаларды табуға және анықтауға қызығушылықты арттыруға бағытталған барлық әрекеттер [6].

Оқушыларға анықталған интегралдарды зерттеуде математика сабақтарына қойылатын проблемалық жағдайлар келесіге бағытталуы мүмкін:

- интегралдың кіріспе ұғымының анықтамасын тұжырымдау;
- берілген математикалық теореманы анықтау және тұжырымдау;
- математикалық дәлелдемелерді, интегралдың шешімін іздеу және табу.

Оқушылардың мәселелерді шешуін ұйымдастыру әдістемесімен қатар интегралды есептерді таңдауға және құрастыруға, сондай-ақ оларды ұсыну реттілігіне көп көңіл бөлу қажет [7].

Анықталған интегралды оқытудағы кеңейтілген проблемалық сұлба алты кезеңнен тұрады:

1. Интегралды анықтау мәселесін ашу және тұжырымдау. Мұғалім проблемалық жағдай туғызады, оқушылар оны зерттейді, сұрақтар қояды, тапсырмаларды тұжырымдайды.
2. Тапсырманы түсіну. Оқушы тапсырманы талдайды, деректерді, ізденетін шамаларды, деректерді байланыстыратын және анықталған интегралды шешуді толық түсінуге тырысады.
3. Шешім жоспарының сызбасы. Оқушы интегралды шешу әдісін іздейді, оны шешу жоспарын жасайды.
4. Жоспарды іске асыру. Егер жоспар шешімге әкелмесе, жұмысты үшінші, тіпті екінші кезеңнен бастау керек.
5. «Артқа қарау». Шешімдер сізді өткен жол туралы ойлануға мәжбүр етуі керек, таңдалған әдіс неге сенімді екендігі, қателіктер, баяулау, не көмектесе алатындығы, сурет, модель, процедура қандай рөл атқарғаны туралы сұраққа оқушы жауап беруі керек.
6. «Алға қарау». Тапсырманы немесе қолданылатын әдісті қалай өзгерту керектігін ойланамыз, құрылымы, шарттары, сызбалары жағынан күрделі есептерді іздейміз [8].

Осылайша, алтыншы кезең жалғыз және жаңа міндетке айналады. Дәл осындай математикалық-проблемалық әрекеттің даму мәні бар. Проблемалық оқыту кезінде оқушылар проблемалық жағдайдың аясында мұғалімнің көмегінсіз мәселені байқай, бөліп көрсете және тұжырымдай алатын сәт өте маңызды және құнды болып табылады. Берілген функциядан анықталған интегралды табудың проблемалық бір тәсілі – бұл функцияны ауыстыруға байланысты әдіс, екіншісі анықталған мағынада қарапайым және осы жеңілдетілген функцияның интегралын кейінгі есептеу.

Берілген функциядан интегралдың шамаланған мәні ретінде оны жақындататын функциядан интегралдың мәні алынады. Алайда әлі де қолдану мүмкіндігімен және осындай проблемалық тәсілдің қателігін бағалаумен байланысты көптеген сұрақтар туындайды [9].

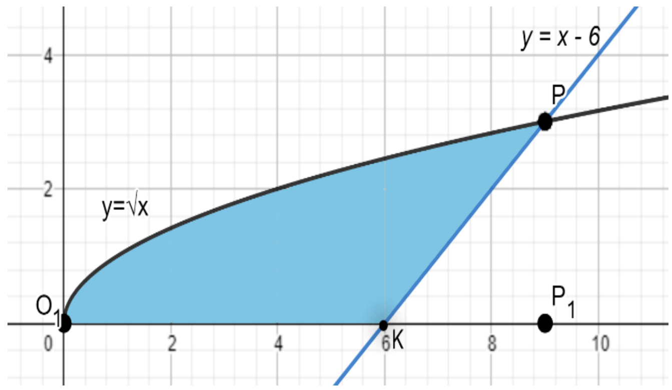
Зерттеу нәтижелері мен талқылау

Келесі кезекте, осы анықталған интегралға есептер қарастырайық. Бірақ басты назарда жоғарыда тоқталып өткен проблемалық әдісті қолдану екенін ұмытпаймыз, яғни есеп шығару барысында біз өз алдымызға белгілі бір мәселе қойып алдық, яғни біздің төмендегі қарастыратын есептер де мектеп бағдарламасынан алынған ерекше есептер:

1-мысал: $y = \sqrt{x}$, $y = x - 6$, $y = 0$, сызықтарымен шектелген фигураның ауданын табуымыз қажет.

Шешуі: Мұндағы есепті шығаруда басты проблема фигураның стандартты болмауында, осы фигураның ауданын табу үшін, ең алдымен берілген сызықтардың қиылысу нүктелерін көрсетеміз $O(0;0), P\ (9;3), \mathrm{P}_1(9;0)$.

Фигура қисық трапеция мен тікбұрышты үшбұрыштан тұрады. Әдетте оқушылар үшбұрыш немесе тіктөртбұрыш сияқты қарапайым фигуралардың ауданын қарастырады, мұндағы басты проблема осында, демек бала фигураны сызғанда, нүктелердің орналасуын көргенде, біршама қиындықтарға тап болады. Енді осы нүктелерді суретке түсіретін болсақ *(Сурет 1).*



Сурет 1. $y = \sqrt{x}$, $y = x - 6$ *сызықтарымен шектелген фигураның графигі*

$S_{\text{фигура}} = S_{OPP_1} - S_{\Delta KPP_1}$ осы формуладан алдымен S_{OPP_1} тауып алайық:

$$S_{OPP_1} = \int_0^9 \sqrt{x}\,dx = \int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \left.\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1}\right|_0^9 = \frac{2}{3}\cdot\left. x^{\frac{3}{2}}\right|_0^9 = \frac{2}{3}\cdot\left(9^{\frac{3}{2}} - 0\right) = \frac{2}{3}\cdot 27 = 18$$

Тағы бір проблема оқушы фигураның ауданын табатын формуланы білмегендіктен, осы жерде тоқтап қалады, ол үшін біз жалпы ауданды табатын жолды көрсетуіміз қажет, жалпы ауданды табу үшін бірінші $S_{\Delta KPP_1}$ табамыз:

$$S_{\Delta KPP_1} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 3 = 4.5$$

Ал жалпы фигураның ауданы жоғарыда көрсеткен формуладағы, яғни $S_{OPP_1}, S_{\Delta KPP_1}$ айырымына тең. $S_{\text{фигура}} = 18 - 4.5 = 13.5$ шаршы бірлік (кв. бірлік)

Жауабы: Демек, берілген сызықтармен шектелген фигураның ауданы біздің есептеуіміз бойынша 13.5 шаршы бірлікке тең болды. Жоғарыда талданған есепті шешуде, бала қай жерде қиналатынын көрсетіп өттік, осы сынды есептер балаға өз ерекшелігімен, стандартты емес болуымен қиындық туғызады, біздің басты мақсат осы тектес есептер келгенде фигураның стандартты болмауынан баланың қорықпай формулалармен жұмыс жасауы үшін жол көрсету.

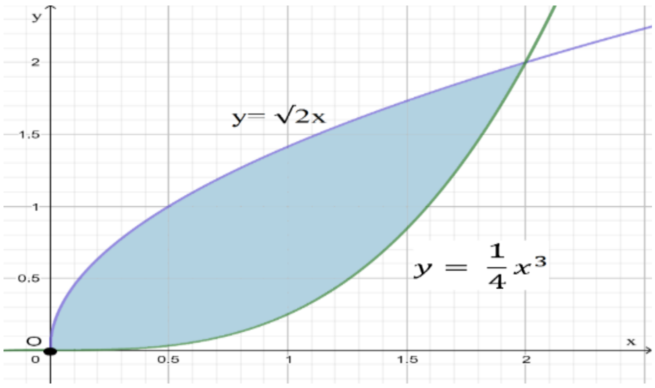
2-мысал: $y = \frac{1}{4}x^3$ және $y = \sqrt{2x}$ функциялар графигімен шектелген фигураның ауданын табуымыз қажет.

Шешуі: Ең алдымен осы графиктердің қиылысу нүктелерін тауып аламыз. Олардың координаттары мына теңдеуді қанағаттандырады:

$$\frac{1}{4}x^3 = \sqrt{2x} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^6}{16} = 2x$$

яғни, бұдан әрі біз x_1 мен x_2-ні есептеп аламыз:

$$x^6 - 32x = 0$$
$$x(x^5 - 32) = 0$$
$$x_1 = 0; \quad x_2 = 2$$



Сурет 2. $y = x^3/4$, $y = \sqrt{2x}$ *функцияларының графигі*

Осыдан интегралдау шегін тауып алдық, енді төмендегі формула бойынша фигураның ауданын табамыз. Мұндағы басты проблема фигураның құдды жапыраққа ұқсауы баланы шатастырады. Біз бұл проблеманы шешуде оқушыға формулаларды жаттатуымыз қажет және осы тектес фигураларды көргенде бірден Ньютон-Лейбниц формуласы еске түсу қажеттігін үнемі еске салып отыруымыз қажет.

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))\, dx$$

Енді осы берілген формулаға тиісті мәндерді қойып ауданды есептейміз, бұл балаға еш қиындық тудырмайды.

$$S_{\text{фигура}} = \int_0^2 \left(\sqrt{2x} - \frac{x^3}{4}\right) dx = \int_0^2 \left(\sqrt{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{4} \cdot x^3\right)\, dx = \left(\sqrt{2} \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - \frac{1}{4} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1}\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= \left(\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot \sqrt{x^3} - \frac{x^4}{16}\right)\Bigg|_0^2 = \frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{16}{16} = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3} = 1\frac{2}{3}$$

Жауабы: біздің есептеуіміз бойынша берілген фигураның ауданы $1\frac{2}{3}$ шаршы бірлікке тең.

3-мысал: Ох осімен *(4;0)* және *(1;3)* нүктелер арқылы өтетін түзумен және $y = 4x - x^2$ берілген параболамен шектелген фигураның ауданын есептейік.

Шешуі: Екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуі келесі түрде анықталады:

$$\frac{x-4}{1-4} = \frac{y-0}{3-0} \Rightarrow \frac{x-4}{-3} = \frac{y}{3}\Big| \cdot 3$$
$$y = 4 - x$$
$$4x - x^2 = 4 - x$$
$$x^2 - 5x + 4 = 0$$
$$x_1 = 1; \quad x_2 = 3$$

Демек, A (1;3) және B(4;0) екенін көрсеттік, енді S_{OAC} және S_{ACB} есептеп алайық:

$$S_{OAC} = \int_0^1 (4x - x^2)\, dx = \left(2x^2 - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = 2 - \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$S_{ACB} = \int_1^4 (4-x)\,dx = (4x - \frac{x^2}{2})\Big|_1^4 = (16-8) - \left(4 - \frac{1}{2}\right) = 8 - 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{2} = 4.5$$

немесе

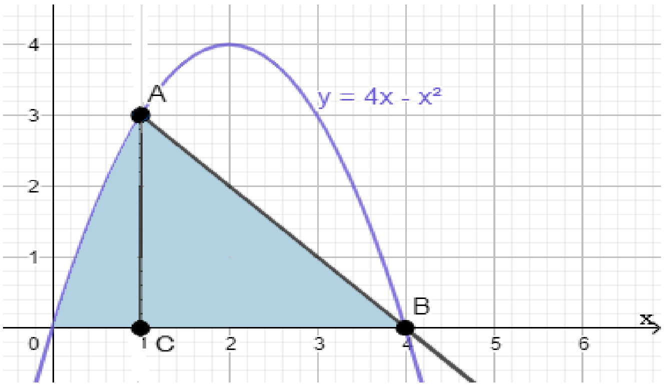
$$S_{ACB} = \frac{1}{2}\,BC * AC = \frac{1}{2} * 3 * 3 = \frac{9}{2} = 4.5$$

AB түзуінің теңдеуі:

$$S_{OAB} = S_{OAC} + S_{ACB} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6}$$

Қысқаша жазып көрсетер болсақ төмендегідей болады:

$$S_{OAB} = \int_0^1 (4x - x^2)\ dx + \int_1^4 (4-x)\,dx = 6\frac{1}{6}$$



Сурет 3. Ox осімен (4;0) және (1;3) нүктелер арқылы өтетін түзімен және $y = 4x - x^2$ *берілген фигураның графигі*

Жауабы: берілген фигурамыздың ауданы $6\frac{1}{6}$ шаршы бірлікке тең.

4-мысал: Негізі a және биіктігі h болатын шеңбер сегментінің ауданын есептейік. Шеңбер радиусы r-ға тең.

Шешуі: Координаталар осін төменгедідей орналастырамыз *(Сурет 4)*. *ABCDE* қисықсызықты трапецияның ауданы төмендегідей болады:

$$S_{ABCDE} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{r^2 - x^2} + r^2 \arcsin\frac{x}{r}\right]$$

Енді осы формуланы ашып көрсетейік:

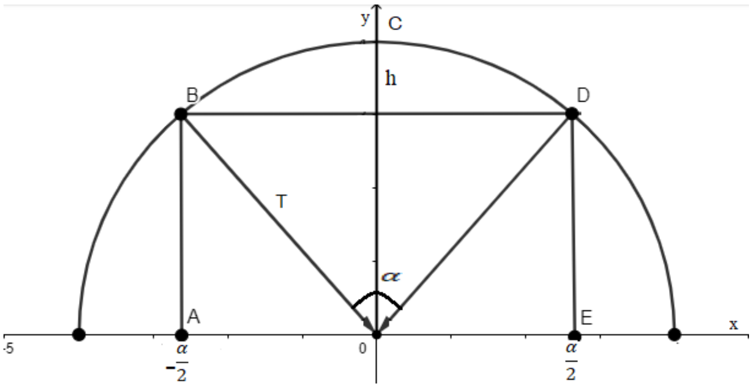
$$\int \sqrt{r^2 - x^2}\ dx = r\cdot cost \cdot r \cdot cost\ dt = \left| \begin{matrix} x = r\cdot \sin t \\ \sqrt{r^2 - x^2} = r\ \cdot \cos t \end{matrix} \quad dx = \cos t\, dt \right| =$$

$$= r\cdot cost\cdot r\cdot cost\ dt =$$

$$= \frac{r^2}{2}\int (1 + cos2t)dt = \frac{r^2}{2}\cdot\left(t + \frac{1}{2}sin2t\right) = \frac{r^2}{2}\cdot(t + sint\ \cdot cost) =$$

$$= \frac{r^2}{2}\left(arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{r}\cdot\ \sqrt{1 - \frac{x^2}{r^2}}\right) = \left(\frac{r^2}{2}\cdot arcsin\frac{x}{r} + \frac{x}{2}\sqrt{r^2 - x^2}\right) =$$

$$= \frac{\alpha}{2}\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} + r^2\cdot arc\,sin\frac{x}{2r}$$



Сурет 4. Шеңбер сегменті

Суретте көріп отырғанымыздай $\sqrt{r^2 - \frac{a^2}{4}} = r - h,$ ал $arcsin\frac{a}{2r} = \frac{\alpha}{2}$

Мұндағы α – шеңбер негізіне сүйене орналасқан орталық бұрыш, демек

$S_{ABCDE} = \frac{a}{2}(r-h) + \frac{ar^2}{2}$

Сол себепті бізге қажетті шеңбер алаңын табу үшін, $ABCDE$ қисықсызықты трапециясының ауданынан $ABCD$ тіктөртбұрышының ауданын шегеру қажет, осылайша

$$S_{BCD} = S_{ABCDE} - S_{ABDE} = \frac{a}{2}(r-h) + \frac{ar^2}{2} - a\,(r-h) = \frac{ar^2}{2} - \frac{a}{2}\,(r-h)$$

бұдан байқайтынымыз:

$$a = 2r\ \cdot sin\frac{\alpha}{2}, r - h = r\cdot\ cos\frac{\alpha}{2}$$

Енді орындарына қойып, төмендегідей

$$S_{BCD} = \frac{ar^2}{2} - \frac{r^2}{2}\cdot 2sin\frac{\alpha}{2}\cdot cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r^2}{2}\,(a - sin\alpha)$$

Бұл формула қарапайым математикадан жақсы таныс, оны геометриялық жолмен алуға болады [10].

5-мысал

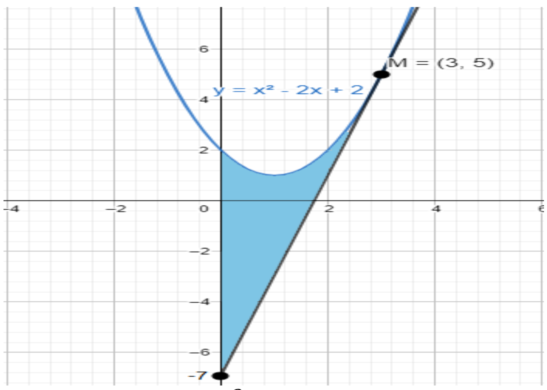
$y = x^2 - 2x + 2$ параболасы мен оған жанама орналасқан *M(3;5)* нүкте, ордината осімен шектелген фигураның ауданын табайық.

$y_0 = 3^2 - 6 + 2 = 5$

$y' = 2x - 2$

$y'(3) = 2\cdot 3 - 2 = 4$

$y = 5 + 4(x-3) = 5 - 4x - 12 = 4x - 7$



Сурет 5. $y = x^2 - 2x + 2$ *параболасы*
және оған жанама орналасқан M(3;5) нүкте графигі

Бұл есепте оқушы жанама теңдеуін еске салуы қажет:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x)\cdot(x - x_0)$$

Енді осы алаңның ауданын есептейміз, ол үшін:

$$S = \int_0^3 (x^2 - 2x + 2 - 4x + 7)\, dx == \int_0^3 (x^2 - 6x + 9)\, dx = \int_0^3 (x-3)^2\, d\,(x-3) = \left.\frac{(x-3)^3}{3}\right|_0^3$$

$$= 0 - \frac{(-27)}{3} = 9$$

Жауабы: берілген парабола мен оған жанама орналасқан нүкте арасындағы аудан 9-ға тең. Аталмыш есепте оқушы тап болатын басты проблемы параболла мен жанама арасындағы фигураны дұрыс сызу, және жанама теңдеуін дұрыс қолдану. Біз бұл есептерді проблемалық әдіс арқылы шештік деуіміздің себебі, фигуралардың стандартты болмауы мен әр түрлі орналасуы болп табылады. Демек бала түрлі, күнделікті көріп жүрген фигуралар мен басқаша орналасуын көргенде қиындыққа тап болмас үшін, оқушылардың көзін үйрету, оларға формулалар арқылы жол көрсету.

Қорытынды

Дарынды оқушылар сыныптан тыс жұмыстарда, әсіресе үйірмелер мен олимпиадаларға дайындық кезінде, сондай-ақ зерттеу жүргізу кезінде анықталған интегралдардың көптеген қолданыстарына тап болады.

Есептердің бұл типологиясының негізі олардың шешімін мұқият талдау және осы мәселенің негізгі белгілерінің бірін қабылдау болып табылады, ол қазіргі уақытта математикалық мазмұнды оқыту процесіне ең қолайлы белгі. Берілген гипотезаларды тексеру, шын мәнінде, шешімнің идеяларын бағалау мен таңдауға дейін азаяды, яғни бағалауды осы мақсатта жүргізілген математикалық эксперименттермен (эмпирикалық ойлау), сондай-ақ теориялық жолмен (индуктивті пайымдау, формальды пайымдау) жасауға болады. Жүргізілген әдістемелік зерттеулер көрсеткендей, қазіргі заманғы әдістемелік құралдар осы процесте үлкен оң рөл атқара алады. Олар осы процесстегі қиындықтарды жеңуге ғана емес, сонымен қатар әртүрлі проблемалық жағдайларды жасауға өте жақсы көмектеседі. Оқушыларға жаңа қызықты шешімдер идеяларын ұсына алады, гипотезаларын тез және нақты тексеруге мүмкіндік береді. Бір сөзбен айтқанда, олар оқушы өзінің математикасын жасаушы бола алатын жағдай жасайды.

Гипотезалардың пайда болу процесі және оларды тексеру оқушылардан белгілі бір қабілеттерді қажет етеді. Олардың біріншісі - проблемаларды байқау қабілеті, ойлау қабілеті бірдей маңызды рөл атқарады. Бұл қабілеттердің дамуы қазіргі мектептің басты мақсаттарының бірі болып табылады. Өйткені, проблемалық оқыту - олардың дамуымен бірге жүретін қолайлы жағдай. Осы бағыттағы жұмысты жалғастыру тұрғысынан жақындау қателігін азайту үшін интеграл сегментінің ұштарындағы туындылардың максималды бұйрықтарының таралуын оңтайландыру мәселесін қарастыру қызықты болып көрінеді.

Ұстаз осы проблемалық оқыту барысында оқушылардың ойына, пікір алмасуда қарама-қайшылықтарына дұрыс бағдар жасай отырып, қойылған мәселенің жауабын табу әдістерін, жолдарын үйретеді. Сонымен, проблемалық оқытудың ең басты ерекшелігінің бірі: оқушыға дайын білім берілмей, одан кез келген проблеманы өзара ізденіс арқылы шешу, табу талап етіледі.

Бұдан шығатын қорытынды анықталған интеграл тақыры болсын, басқада жалпы кез келген тақырыпта, яғни математиканы оқыту барысында оқушының алдына белгілі бір проблеманы қойып, оны шешуге жол көрсету арқылы, баланың қызығушылығын, ізденімпаздығын, ойлау қабілетін арттыруға көмектеседі, өздігінен жұмыс жасауға және берік білім мен оқытудың жоғары нәтижесіне қол жеткізеді. Ал проблемалық оқыту технологиясы таптырмас қолайлы да, ұтымды жол десек артық айтпас едік.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Бабичева И.В. Подготовка к олимпиадам. Дифференциальное и интегральное исчисления: Учебное пособие, Лань, 2017. 95 с.

2 Молодцова Т.Д., Шалова С.Ю., Кобышева Л.И. Проблемная лекция как средство формирования исследовательской компетентности будущих педагогов. Современные проблемы науки и образования, 2017. – № 4

3 Петров А.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. - М.: Наука, 2010. - 326 с.

4 Ф.Б.Бөрібекова,Н.Ж.Жанатбекова. Қазіргі заманғы педагогикалық технологиялар. Оқулық.-Алматы: 2014. 174-б.

5 Алпысбаева А.Ә. Проблемалық оқыту әдісі. – Алматы, 2015. – 59 б.

6 Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. - М.: Наука, 1967. - 216 с.

7 Жайлашева Ж. Оқытуда жаңа педагогикалық технологияларды қолдану // Матемаатика және физика ғылыми-әдістемелік журналы, 2014, №1, 50-53 бет.

8 Жеңісов Ә.Д. Есептерді шешу құрылымы. – Алматы: Талап, 2016. – 68 б.

9 Абылкасымова А.Е., Кучер Т.П., Жумагулова З.А. Решебник к учебнику:Математика, Ч-1. – Алматы, 2018. 184с.

10 Н.Я. Виленкин, К.А. Бохан және т.б. Задачник по курсу математического анализа. Москва 1971. Ч-1. – Издательство «Просвещение»

References

1 Babicheva I.V. (2017) Podgotovka k olimpiadam. Differencial'noe i integral'noe ischislenija. [Preparation for the Olympiads. Differential and integral calculus] Lan, 95 p.(In Russian)

2 Molodcova T.D., Shalova S.Ju., Kobysheva L.I.(2017) Problemnaja lekcija kak sredstvo formirovanija issledovatel'skoj kompetentnosti budushhih pedagogov // Sovremennye problemy nauki i obrazovanija [Problem lecture as a means of forming the research competence of future teachers // Modern problems of science and education] (In Russian)

3 Petrov A.S. (2010) Kurs differencial'nogo i integral'nogo ischislenija [Course of differential and integral calculus] Nauka, p. 326 (In Russian)

4 F.B.Boribekova,N.Zh.Zhanatbekova. (2014) Qazirgi zamanǵy pedagogıkalyq tehnologıalar [Pedagogical technologies of our time] Almaty: p. 174 (In Kazakh)

5 Alpysbaeva A.Á. (2015) Problemalyq oqytý ádisi [Problem-based learning method] Almaty,p. 59 (In Kazakh)

6 Krylov V. I. (1967) Priblizhennoe vychislenie integralov [Approximate calculation of integrals] (In Russian)

7 Zhajlasheva Zh. (2014) Oqytýda jańa pedagogıkalyq tehnologıalardy qoldaný [Application of new pedagogical technologies in teaching] scientific and methodological Journal of Mathematics and physics, №1,p. 50-53 (In Kazakh)

8 Jeńisov Á.D. (2016) Esepterdi sheshý qurylymy [Problem solving structure] Talap, p. 68 (In Kazakh)

9 Abylkasymova A.E., Kucher T.P., Zhumagulova Z.A. (2018) Reshebnik k uchebniku: Matematika [The answer book to the textbook:Mathematics] Part 1. (In Russian)

10 N. Ia. Vılenkın, K. A. Bohan jáne t.b. Zadachnik po kursu matematicheskogo analiza. [A problem book for the course of mathematical analysis. Publishing House "Enlightenment"] Moscow, Part 1(In Russian)