МРНТИ 27.31.17
УДК 517.956

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.04

С.Е. Айтжанов [1,2], Г.Р. Ашурова[1]

[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан,
[2]Институт математики и математического моделирования, г.Алматы, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА

Аннотация

Исследование нелинейных уравнений математической физики, в том числе обратных задач на сегодняшний день является актуальной. Эта работа посвящена фундаментальной проблеме исследованию качественных свойств обратной задачи для псевдопараболических уравнений (называемых также уравнениями соболевского типа) с достаточно гладкой границей. В статье методом Галеркина доказывается существование слабого решения обратной задачи в ограниченной области. Использование теорем вложения Соболева, получены априорные оценки решения. Использование Галеркинских приближений позволяет получить оценку сверху времени существования решения. Получены локальная и глобальная теорема о существовании решения. Рассматриваются вопросы асимптотической поведении решений при $t \to \infty$, а также разрушение за конечное время. Получены достаточные условия "разрушения" решения за конечное время, а также получена оценка снизу разрушения решения.

Ключевые слова: псевдопараболические уравнения, обратная задача, метод Галеркина, существование решения, разрушение решения, асимптотическое поведение решения.

Аңдатпа

С.Е. Айтжанов [1,2], Г.Р. Ашурова[1]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

СОБОЛЕВ ТИПТІ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕРІ ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Математикалық физиканың сызықты емес теңдеулерін, соның ішінде кері есептерді зерттеу бүгінгі күні өзекті болып табылады. Бұл жұмыс жеткілікті тегіс шекарасы бар псевдопараболикалық теңдеулер (сондай-ақ Соболев типтес теңдеулер деп аталатын) үшін кері есептің сапалы қасиеттерін зерттеуге арналған. Мақалада Галеркин әдісімен шенелген аймақтағы кері есептің әлсіз шешімінің болуы дәлелденеді. Соболев салынымы теоремаларын пайдаланып, шешімнің априорлық бағалары алынды. Галеркин жуықтауларын пайдалану, шешімнің болу уақытының жоғарғы бағасын алуға мүмкіндік береді. Шешімнің болуы туралы локальді және глобальдытеорема алынды. Сонымен қатар, шешімдердің асимптотикалық $t \to \infty$ болғандағы тұрпатын, сондай-ақ ақырлы уақытта қирау мәселелері қарастырылды. Ақырлы уақытта шешімнің "қирауының" жеткілікті шарттары алынды, сондай-ақ шешімнің қирауының төменнен бағасы алынды.

Түйін сөздер: Псевдопараболалық теңдеулер, кері есеп, Галеркин әдісі, шешімнің бар болуы, шешімнің қирауы, шешімнің асимптотикалық тұрпаты.

Abstract

THE SOLVABILITY OF THE INVERSE PROBLEM FOR THE SOBOLEV TYPE EQUATION

Aytzhanov S.E. [1,2], Ashurova G.R. [1]

[1]Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan,
[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

The study of nonlinear equations of mathematical physics, including inverse problems, is currently relevant. This work is devoted to the fundamental problem of investigating the qualitative properties of the inverse problem for pseudo-parabolic equations (also called Sobolev-type equations) with a sufficiently smooth boundary. In the article, the Galerkin method proves the existence of a weak solution to the inverse problem in a bounded domain. Using Sobolev embedding theorems, a priori estimates of the solution are obtained. Using Galerkin approximations, you can get a top-down estimate of the existence of the solution. A local and global theorem on the existence of a solution are obtained. We consider the problems of asymptotic behavior of solutions at, as well as blow-up in finite time. Sufficient conditions for $t \to \infty$ the "blow-up" of the solution in a finite time are obtained, and a lower estimate of the blow-up of the solution is obtained.

Keywords: Pseudo-parabolic equations, inverse problem, Galerkin method, existence of a solution, blow up of a solution, asymptotic behavior of a solution.

Моделированию физических процессов, приводящих к уравнениям типа Соболева и, в частности, псевдопараболического типа, посвящены работы [1-7]. Исследованию разрешимости начально-краевых задач для уравнении соболевского типа существенный вклад внесли Осколков А.П., Антонцев С.Н., Кожанов А. И., Свешников А. И., Корпусов М. О. и многие другие ученые.

В работах [8-11] изучались некоторые обратные задачи близкие по постановке нашей.

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t): x \in \Omega,\ \Omega \subset R^n,\ 0 < t < T\}$ обратную задачу для псевдопараболического уравнения

$$u_t - \chi\Delta u_t - \Delta u = b(x,t)|u|^{\beta-2}u + f(t)h(x), \tag{1}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{2}$$

$$u\big|_S = 0, \tag{3}$$

$$\int_\Omega u(x,t)\cdot h(x)dx = \varphi(t). \tag{4}$$

Здесь $\Omega \subset R^n, n \ge 1$ ограниченная область, граница $\partial\Omega$ достаточно гладкая, χ и β положительные константы, которые $\chi > 0,\ \beta > 2$.

Функции $\omega(x)$, u_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$h(x) = \omega(x) - \chi\Delta\omega(x), \quad \int_\Omega h(x)\cdot\omega(x)dx = 1, \tag{5}$$

$$|\varphi'(t)| \le Ce^{\frac{\gamma t}{2}},\ \gamma \le C_2.$$

$$\omega \in L_2(\Omega) \cap L_\beta(\Omega) \cap \overset{0}{W}{}_2^2(\Omega),\ \nabla\omega \in L_2(\Omega),\ \ \beta \ge 2. \tag{6}$$

$$\int_\Omega u_0 \cdot h dx = \varphi(0),\ u_0 \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \cap L_\beta(\Omega). \tag{7}$$

Лемма. Задача (1)-(4) эквивалентна следующей задаче для нелинейного параболического уравнения содержащего нелинейный нелокальный оператор от функции $u(x,t)$

$$u_t - \chi\Delta u_t - \Delta u = b(x,t)|u|^{\beta-2}u + f(t,u)h(x),\ x \in \Omega,\ t > 0, \tag{8}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in \Omega,\quad u\big|_S = 0. \tag{9}$$

Здесь

$$f(t,u) = \varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u \nabla\omega dx - \int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx, \tag{10}$$

Доказательство. Действительно, из уравнения (1) следует, что

$$\int_\Omega u_t\omega dx - \chi\int_\Omega \Delta u_t\omega dx - \int_\Omega \Delta u\omega dx = \int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx + \int_\Omega f(t)h(x)\omega dx, \tag{11}$$

тогда, если выполняется условие (4) и (5), то

$$f(t,u) = \varphi'(t) + \int_\Omega \nabla u \nabla\omega dx - \int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx. \tag{12}$$

Следовательно соотношение (10) выполняется.

Рассмотрим теперь задачу (8)-(9). Если соотношение (10) выполняется, то из него очевидным образом вытекает равенство (12). Тогда

$$f(t,u)=\varphi'(t)-\int_\Omega \nabla u\nabla\omega dx-\int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx=$$
$$=\varphi'(t)-\int_\Omega \Delta u\omega dx-\int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx.$$

В силу (11) получаем, что

$$f(t,u)=\varphi'(t)+\int_\Omega \nabla u\nabla\omega dx-\int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx=$$
$$=\varphi'(t)-\int_\Omega u_t\omega dx+\chi\int_\Omega \Delta u_t\omega dx+\int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx+$$
$$+\int_\Omega f(t)h(x)\omega dx-\int_\Omega b(x,t)|u|^{\beta-2}u\omega dx.$$
$$\varphi'(t)-\int_\Omega u_t(\omega-\chi\Delta\omega)dx=0.$$

Таким образом, $\frac{d}{dt}\left(\varphi(t)-\int_\Omega u(\omega-\chi\Delta\omega)dx\right)=0.$

Обозначим через $v(t)=\varphi(t)-\int_\Omega uh(x)dx$. Тогда функция $v(t)$ может быть найдена как решение задачи Коши : $v'(t)=0,\ v(0)=0.$ ($v(0)=0$ следует из условия согласования (7)). Единственным решением задачи является функция $v(t)=0$, следовательно, $\int_\Omega uh(x)dx=\varphi(t).$ Лемма доказана.

Определение. Слабым обобщенным решением задачи (8)-(9) называется функция $u(x,t)$ из пространства $W_2^1(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i}+\frac{\partial u}{\partial t}v+\nabla u\nabla v-b(x,t)|u|^{p-2}uv\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega f(t,u)hvdxdt, \tag{13}$$

для всех $v(x,t)\in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)).$

Выберем в $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ некоторую систему функций $\{\Psi_j(x)\}$ образующую базис в данном пространстве. Такая система заведомо существует, поскольку $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ - сеперабельное пространство. Будем искать приближенное решение задачи (8)-(9) в виде

$$u_m(x,t)=\sum_{k=1}^m C_{mk}(t)\Psi_k(x) \tag{14}$$

где коэффициенты $C_{mk}(t)$ ищутся из условий

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^m C'_{mk}(t)\left\{\int_\Omega\left[\Psi_k\Psi_j+\chi\sum_{i=1}^m\frac{\partial\Psi_k}{\partial x_i}\cdot\frac{\partial\Psi_j}{\partial x_i}\right]dx+\int_\Omega\nabla u_m\nabla\Psi_j dx-\right.\\&\left.-\int_\Omega b(x,t)|u_m|^{\beta-2}u_m\Psi_j dx\right\}=\int_\Omega f(t,u_m)h(x)\Psi_j dx.\end{aligned} \tag{15}$$

$$u_{m0} = u_m(0) = \sum_{k=1}^{m} C_{mk}(0)\Psi_k = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \Psi_k \tag{16}$$

причем

$$u_{m0} \to u_0 \text{ сильно в } \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega) \text{ при } m \to \infty \tag{17}$$

введем обозначения

$$\vec{C}_m \equiv \{C_{1m}(t),\dots,C_{mm}(t)\}^T,\ \vec{\alpha} \equiv \{\alpha_1,\dots,\alpha_m\}^T,\ a_{kj} = \int_\Omega \left[\Psi_k\Psi_j + \left(\nabla\Psi_k, \nabla\Psi_j\right)\right]dx,$$

$$b_{kj} = \int_\Omega \nabla\Psi_k \nabla\Psi_j dx + \int_\Omega b(x,t)\,|u_m|^{\beta-2}\,\Psi_k\Psi_j dx + \int_\Omega f(t,u_m)h(x)\Psi_j dx,$$

$$A_m\left(\vec{C}_m\right) \equiv \left\{a_{jk}\left(\vec{C}_m\right)\right\},\ \vec{G}_m\left(\vec{C}_m\right) \equiv \left\{b_{jk}\left(\vec{C}_m\right)\right\}\vec{C}_m.$$

Тогда система уравнений (15) и условие (16) принимает матричный вид

$$A_m\vec{C}'_m \equiv \vec{f}_m\left(\vec{C}_m\right),\ \vec{C}_m(0) = \vec{\alpha}. \tag{18}$$

Умножим обе части равенства (15) на $C_{mj}(t)$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j = \overline{1,m}$.

В результате получим равенство

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega [|u_m|^2 + \chi|\nabla u_m|^2]dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^2\,dx = \int_\Omega b(x,t)\,|u_m|^\beta\,dx + \int_\Omega f(t,u_m)hu_m dx. \tag{19}$$

Оценим правую часть (19), применим следующее интерполяционное неравенство

$$\|u\|_{\beta,\Omega}^2 \le C_0^2\|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2\alpha}\|u\|_{2,\Omega}^{2(1-\alpha)} \le \|\nabla u\|_{2,\Omega}^{2\alpha q_1} + C_1(\alpha,\beta)C_0^{2q_1'}\|u\|_{2,\Omega}^{2(1-\alpha)q_1'} \le$$
$$\le \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + C_1\|u\|_{2,\Omega}^2,$$

где $\alpha = \dfrac{(\beta-2)N}{2\beta},\ 0 < \alpha < 1,\ \ 2 < \beta < \dfrac{2N}{N-2},\ N \ge 3,\ C_1 = (1-\alpha)\alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}C_0^{\frac{2}{1-\alpha}}.$

Тогда правая часть оценивается следующим образом

$$\left|\int_\Omega b(x,t)\,|u_m|^\beta\,dx\right| \le b_0\|u_m\|_{\beta,\Omega}^\beta \le b_0\left(\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + C_1\|u_m\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\beta}{2}}, \tag{20}$$

$$\left|\varphi'(t)\int_\Omega hu_m dx\right| \le |\varphi'|\,\|h\|_{2,\Omega}\|u_m\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{4}|\varphi'|^2\,\|h\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m\|_{2,\Omega}^2, \tag{21}$$

$$\left|\int_\Omega hu_m dx\int_\Omega b(x,t)\,|u_m|^{\beta-2}\,u_m\cdot\omega dx\right| \le b_0\|u_m\|_{\beta,\Omega}^\beta\|\omega\|_{\beta,\Omega}\|h\|_{\frac{\beta}{\beta-1},\Omega} \le$$
$$\le b_0\|\omega\|_{\beta,\Omega}\|h\|_{\frac{\beta}{\beta-1},\Omega}\left(\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + C_1\|u_m\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\beta}{2}}. \tag{22}$$

$$\left|\int_\Omega hu_m dx \int_\Omega \nabla u_m \cdot \omega dx\right| \le \|h\|_{2,\Omega}\|u_m\|_{2,\Omega}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega} \le \frac{1}{2}\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\left(\|h\|_{2,\Omega}\|\omega\|_{2,\Omega}\right)^2\|u_m\|_{2,\Omega}^2. \tag{23}$$

Подставляя полученные неравенства (20)-(23) в тождество (19), получим

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}\int_\Omega [|u_m|^2 + \chi|\nabla u_m|^2]dx + \int_\Omega |\nabla u_m|^2\, dx \le \\ \le C_2\left(\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right) + C_3\left(\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2\right)^{\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}|\varphi'|^2\,\|h\|_{2,\Omega}^2.\end{gathered} \tag{24}$$

Обозначим через $y(t) \equiv \|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2$, тогда (24) примет вид

$$\frac{dy(t)}{dt} \le C_2 y(t) + C_3[y(t)]^{\frac{\beta}{2}} + \frac{1}{2}|\varphi'|^2\,\|h\|_{2,\Omega}^2.$$

Обозначим через $z(t) \equiv e^{-C_2 t} y(t),$

$$\frac{dz(t)}{dt} \le C_3 e^{\frac{\beta-2}{2}C_2 t}[z(t)]^{\frac{\beta}{2}} + e^{-C_2 t}\frac{1}{2}|\varphi'|^2\,\|h\|_{2,\Omega}^2.$$

Интегрируем от 0 до t, получим

$$z(t) \le z(0) + C_3\int_0^t e^{\frac{\beta-2}{2}C_2 s}[z(s)]^{\frac{\beta}{2}}ds + \frac{1}{2}\|h\|_{2,\Omega}^2\int_0^t e^{-C_2 s}\,|\varphi'(s)|^2\,ds.$$

Применим условие (5)

$$z(t) \le z(0) + \frac{C^2\|h\|_{2,\Omega}^2}{2(C_2-\gamma)} + C_3\int_0^t e^{\frac{\beta-2}{2}C_2 s}[z(s)]^{\frac{\beta}{2}}ds.$$

Применив к которому лемму Гронуолла-Беллмана-Бихари [12], если

$$\frac{C_3}{C_2}\left(e^{\frac{\beta-2}{2}C_2 t} - 1\right) < \frac{1}{\left(z(0) + \dfrac{C^2\|h\|_{2,\Omega}^2}{2(C_2-\gamma)}\right)^{\frac{\beta-2}{2}}}, \quad 0 \le t < T,$$

тогда справедливо неравенство

$$\begin{gathered}\|u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m(x,t)\|_{2,\Omega}^2 \le \\ \le \frac{\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \dfrac{C^2\|h\|_{2,\Omega}^2}{2(C_2-\gamma)}}{\left[1 - \left(\|u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m(x,0)\|_{2,\Omega}^2 + \dfrac{C^2\|h\|_{2,\Omega}^2}{2(C_2-\gamma)}\right)^{\frac{\beta-2}{2}}\dfrac{C_3}{C_2}\left(e^{\frac{\beta-2}{2}C_2 t} - 1\right)\right]^{\frac{2}{\beta-2}}}.\end{gathered} \tag{25}$$

Из этой оценки можно сделать вывод, что существует $T_0 > 0$ такое, что

$$\|u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u_m\|_{2,\Omega}^2 \le C_4, \text{ для всех } t \in [0,T],\ T < T_0, \tag{26}$$

где C_4 постоянная не зависит от $m \in \mathrm{N}$.

Возвращаясь к (24) и учитывая (26), получим еще одно неравенство:

$$\int_0^T \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dxdt \le C_5. \tag{27}$$

Теперь умножим равенство (15) на $C'_{mj}(t)$ и просуммируем по $j=\overline{1,m}$. В результате получим

$$\begin{aligned} &\|\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx = \frac{1}{\beta}\frac{d}{dt}\int_\Omega b(x,t)|u_m|^\beta \, dx - \\ &-\frac{1}{\beta}\int_\Omega b_t(x,t)|u_m|^\beta \, dx + \int_\Omega f(t,u_m)h(x)\partial_t u_m dx. \end{aligned} \tag{28}$$

Проинтегрируем по τ от 0 до t, тогда получим соотношение

$$\begin{aligned} &\int_0^t \left(\|\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u_m(x,0)|^2 \, dx - \\ &-\frac{1}{\beta}\int_\Omega b(x,0)|u_m(x,0)|^\beta \, dx + \frac{1}{\beta}\int_\Omega b(x,t)|u_m|^\beta \, dx - \\ &-\frac{1}{\beta}\int_0^t\int_\Omega b_\tau(x,\tau)|u_m|^\beta \, dxd\tau + \int_0^t\int_\Omega f(t,u_m)h(x)\partial_\tau u_m dxd\tau. \end{aligned} \tag{29}$$

Оценивая правую часть (29), получим следующую оценку

$$\int_0^T \left(\|\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla\partial_\tau u_m\|_{2,\Omega}^2\right)d\tau + \int_\Omega |\nabla u_m|^2 \, dx \le C_6. \tag{30}$$

Из полученных оценок (26), (27), (30) вытекают соответственно следующие утверждения:

$$u_m \text{ ограниченно в } L_\infty(0,T;H^1(\Omega)), \tag{31}$$

$$\nabla u_m \text{ ограниченно в } L_2(Q_T),\ Q_T = \Omega\times(0,T), \tag{32}$$

$$\partial_t u_m \text{ ограниченно в } L_2(0,T;H^1(\Omega)), \tag{33}$$

Кроме того, в силу поставленных условий на β:

$$|u_m|^{\beta-2} u_m \text{ ограниченно в } L_\infty(0,T;L_{\frac{\beta}{\beta-1}}(\Omega)),\ 2<\beta<\frac{2N}{N-2},\ N\ge 3. \tag{34}$$

Из (31) следует, что существует подпоследовательность u_{m_k} последовательности u_m, *-слабо сходящаяся к некоторому элементу $u\in L_\infty(0,T;H^1(\Omega))$, т.е.

$$u_{m_k} \to u \quad \text{*-слабо в } L_\infty(0,T;H^1(\Omega)).$$

Аналогичным образом, из (32)-(34) вытекает, что существует такая последовательность $\{u_{m_k}\}\subset\{u_m\}$, что $u_{m_k} \to u$ слабо в $L_2(0,T;H^1(\Omega))$,

В силу теоремы Реллиха-Кондрашова, вложение $W_2^1(Q_T)$ в $L_2(Q_T)$ компактно. Это означает, что последовательность $u_{m_л}$ можно выбрать так, что $u_{m_k} \to u$ в норме $L_2(Q_T)$, а значит сходящейся почти всюду [13].

Приведенные рассуждения позволяют перейти к пределу в (15). Но сначала умножим каждое из равенств (15) на $d_j(t)\in C[0,T]$ и просуммируем обе части получившегося равенства по $j=\overline{1,m}$. Затем проинтегрируем по t от 0 до T, получим

$$\int_0^T\int_\Omega\left(\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 u_m}{\partial t\partial x_i}\frac{\partial\mu}{\partial x_i}+\frac{\partial u_m}{\partial t}\mu+\nabla u_m\nabla\mu-b(x,t)\,|\,u_m\,|^{\phi-2}\,u_m\mu\right)dxdt=\int_0^T\int_\Omega f(t,u_m)\mu dxdt, \tag{35}$$

где $\mu(x,t)=\sum_{j=1}^m d_j(t)\Psi_j(x)$.

Учитывая полученные включения и сходимости, перейдем в (40) к пределу при $m\to\infty$ и получим (13) для $v=\mu$. Так как множество всех функций $\mu(x,t)$ плотно в $W_2^1(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$, то предельное соотношение выполняется для всех $v(x,t)\in L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega))$.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (4), а также* $2<\beta<\dfrac{2N}{N-2},\ N\geq 3.$

Тогда на интервале $(0,T),\,T<T_0$, *существует слабое обобщенное решение* $u(x,t)$ *задачи (8)-(9), причем имеют место следующие включения:*

$$u\in L_\infty(0,T;H^1(\Omega)),\ \ \nabla u\in L_2(Q_T),\ Q_T=\Omega\times(0,T),$$

$$u_t\in L_2(0,T;H^1(\Omega)),\ |\,u\,|^{\beta-2}\,u\in L_\infty(0,T;L_{\frac{\beta}{\beta-1}}(\Gamma)).$$

Теорема 2. *Пусть выполняются условия (4), а также* $0<b_0\leq -b(x,t)\leq b_1<\infty, 1<\beta<\infty$, *либо* $0<b_0\leq b(x,t)\leq b_1<\infty,\ 1<\beta\leq 2,\ N\geq 3.$

Тогда на интервале $(0,T),$ существует глобально слабое обобщенное решение $u(x,t)$ задачи (8)-(9).

Теперь докажем разрушение слабого обобщенного решения обратной задачи (1)-(4). Чтобы не было громоздких вычислений положим $\varphi(t)=1,\ b(x,t)=1$.

Теорема 3. *Пусть выполняются условия* $\beta>2$, *тогда решение обратной задачи (1) - (4) разрушается за конечное время* T, *ограниченное снизу* t_1, *определяемое как*

$$t_1=\int_{\rho(0)}^\infty\frac{d\xi}{\theta_1\xi^{\frac{\beta}{2}}+\theta_3}, \tag{36}$$

где $\theta_1=2^{\frac{\beta}{2}}C^\beta C_1^{\frac{\beta}{2}},\ \ \theta_3=\dfrac{1}{4}\|\nabla\omega\|_{2,\Omega}^2+C(\beta)\|\omega\|_{\beta,\Omega}^\beta,\ \ C_1=\max\left\{\dfrac{\theta^2}{\chi},(1-\theta)^2\right\},\ \theta=\dfrac{(\beta-2)n}{2\beta}<1.$

Доказательство. Обозначим через $\rho(t)=\dfrac{1}{2}\left(\|u\|_{2,\Omega}^2+\chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right)$ Умножим последовательно уравнение (1) на функции $\omega(x)$, $u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$f(t)=\int_\Omega\nabla u\nabla\omega dx-\int_\Omega|\,u\,|^{\beta-2}\,u\omega dx, \tag{37}$$

$$\rho'(t)+\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2=\|u\|_{\beta,\Omega}^\beta+f(t). \tag{38}$$

Подставляя соотношение (37) в тождество (38), получим

$$\rho'(t)=\|u\|_{\beta,\Omega}^\beta-\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2+\int_\Omega\nabla u\nabla\omega dx-\int_\Omega|\,u\,|^{\beta-2}\,u\omega dx. \tag{39}$$

Оценим правую часть

$$\left|\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \omega dx\right| \le \left(\int_\Omega |\nabla u|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_\Omega |\nabla \omega|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{1}{4}\|\nabla \omega\|_{2,\Omega}^2,$$

$$\left|\int_\Omega |u|^{\beta-2}\, u \cdot \omega dx\right| \le \left(\int_\Omega |u|^\beta\, dx\right)^{\frac{\beta-1}{\beta}} \left(\int_\Omega |\omega|^\beta\, dx\right)^{\frac{1}{\beta}} \le \|u\|_{\beta,\Omega}^\beta + C(\beta)\|\omega\|_{\beta,\Omega}^\beta,$$

где $C(\beta) = \dfrac{1}{\beta\left(\dfrac{\beta}{\beta-1}\right)^{\beta-1}}.$

Подставляя полученные оценки в (39)

$$\rho'(t) \le 2\|u\|_{\beta,\Omega}^\beta + \frac{1}{4}\|\nabla \omega\|_{2,\Omega}^2 + C(\beta)\|\omega\|_{\beta,\Omega}^\beta. \tag{40}$$

Теперь применим неравенство Гальярдо-Ниренберга

$$\|u\|_{\beta,\Omega} \le C\|\nabla u\|_{2,\Omega}^\theta \|u\|_{2,\Omega}^{1-\theta} \le C\left(\theta\|\nabla u\|_{2,\Omega} + (1-\theta)\|u\|_{2,\Omega}\right),$$

где $\theta = \dfrac{(\beta-2)n}{2\beta} < 1,$ возведем в квадрат полученное неравенство

$$\|u\|_{\beta,\Omega}^2 \le C^2\left(\theta\|\nabla u\|_{2,\Omega} + (1-\theta)\|u\|_{2,\Omega}\right)^2 \le 2C^2\left(\theta^2\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + (1-\theta)^2\|u\|_{2,\Omega}^2\right) \le$$
$$\le 2C^2 C_1\left(\|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right),$$

где $C_1 = \max\left\{\dfrac{\theta^2}{\chi}, (1-\theta)^2\right\},$

Возведем в степень $\dfrac{\beta}{2}$, получим

$$\|u\|_{\beta,\Omega}^\beta \le 2^{\frac{\beta}{2}} C^\beta C_1^{\frac{\beta}{2}} \rho^{\frac{\beta}{2}}(t).$$

Подставляя в (40), находим

$$\rho'(t) \le \theta_1 \rho^{\frac{\beta}{2}}(t) + \theta_3.$$

Интегрируем последнее неравенство от 0 до t, получим

$$\int_0^t \frac{\rho'(\xi)d\xi}{\theta_1[\rho(\xi)]^{\frac{\beta}{2}} + \theta_3} \le t,$$

Полагая, что $t \to T$ в последнем неравенстве, докажем, что конечное время T имеет нижнюю границу t_1, которая определяется формулами

$$\int_{\rho(0)}^{\rho(t)} \frac{d\xi}{\theta_1\xi^{\frac{\beta}{2}} + \theta_3} \le t, \quad \int_{\rho(0)}^{\infty} \frac{d\xi}{\theta_1\xi^{\frac{\beta}{2}} + \theta_3} = t_1 \le T.$$

Рассмотрим в цилиндре $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega,\, \Omega \subset R^n,\, 0 < t < \infty\}$ следующую обратную задачу для уравнения соболевского типа

$$u_t - \chi\Delta u_t - a_0\Delta u + |u|^{\beta-2}\, u = f(t)\omega(x), \tag{41}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{42}$$

$$u\big|_S = 0, \tag{43}$$

$$\int_\Omega u(x,t)\cdot\omega(x)dx = \varphi(t). \tag{44}$$

Умножим уравнение (41) на функции $\omega(x)$, $u(x,t)$ и проинтегрируем по области Ω:

$$f(t) = \varphi'(t) + a_0\int_\Omega \nabla u \nabla \omega dx + \int_\Omega |u|^{\beta-2}\, u\omega dx, \tag{45}$$

$$\rho'(t) + a_0\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{\beta,\Omega}^\beta = \varphi(t)f(t), \tag{46}$$

Подставляя соотношение (45) в тождество (46), получим

$$\rho'(t) + a_0\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{\beta,\Omega}^\beta = \varphi(t)\varphi'(t) + a_0\varphi(t)\int_\Omega \nabla u\nabla\omega dx + \varphi(t)\int_\Omega |u|^{\beta-2}\, u\omega dx. \tag{47}$$

Оценивая правую часть (47), получим

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right) + a_0\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \|u\|_{\beta,\Omega}^\beta \le 2\varphi(t)(\varphi'(t) + \theta_4). \tag{48}$$

Неравенство Пуанкаре дает $\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 \ge \lambda_1\|u\|_{2,\Omega}^2$. Тогда, имеем

$$\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 = \frac{1}{1+\chi\lambda_1}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 + \frac{\lambda_1\chi}{1+\chi\lambda_1}\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2 \ge \frac{\lambda_1}{1+\chi\lambda_1}\left(\|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2\right). \tag{49}$$

Используя только второе слагаемое в левой части (48), рассмотрим случай, когда

$$\varphi(t) \le C_\varphi \exp(-\mu t),\ \ \mu \ge C_\lambda,\ C_\lambda = \frac{a_0\lambda_1}{1+\chi\lambda_1}. \tag{50}$$

В неравенстве (48) используя (49), тогда получим дифференциальное неравенство для функции $\rho(t) = \|u\|_{2,\Omega}^2 + \chi\|\nabla u\|_{2,\Omega}^2$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) + C_\lambda\rho(t) \le C_\varphi \exp(-\mu t).$$

Из этого неравенства получаем оценки

$$\rho(t) \le \exp(-C_\lambda t)\left(\rho(0) + \frac{C_\varphi}{\mu - C_\lambda}\right),\ \ \mu > C_\lambda; \tag{51}$$

$$\rho(t) \le \exp(-C_\lambda t)\left(\rho(0) + tC_\varphi\right),\ \ \mu = C_\lambda. \tag{52}$$

Теорема 4. *Пусть выполнены условия*

$\omega \in L_\beta(\Omega),\ \nabla\omega \in L_2(\Omega),\ \beta \ge 1.\ \int_\Omega u_0\cdot\omega dx = \varphi(0),\ u_0 \in H^1(\Omega)$ *и (50).*

Тогда решение задачи (41)-(44) удовлетворяет оценке (51) или (52).

Список использованной литературы:

1 Соболев С. Л. Об одной новой задаче математической физики // Изв. АН СССР. Сер. мат. -1954. -№ 18. - С. 3-50.

2 Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems // Pliilos. Trans. Roy. Soc. London A. 1972. V. 272. № 1220. P. 47 - 78 .

3 Showalter R. E. Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space// SIAM J. Math. Anal. -1972.-Vol.3. -№ 3. -P. 527-543.

4 Showalter R. E., Ting T. W. Pseudoparabolic partial differential equations// SIAM J. Math. Anal. -1970. -№ 1. - P. 1–26.

5 Осколков А. П. Начально-краевые задачи для уравнений движения жидкостей Кельвина-Фойгта ижидкостей Олдройта// Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. -1988. -Т.179. -С. 126-164.

6 Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю.Д. Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа, М.: Физматлит, 2007. -642 с.

7 Antontsev S.N., H.B.de Oliveira, Kh. Khompysh Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids // Communications in Mathematical Sciences. -2019. -Vol.17. -№7. -P.1915-1948.

8 Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition // Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. -2019. -Vol.60. -№ 2. -P.265-277.

9 Abylkairov U.U., Khompysh K.An inverse problem of identifying the coefficient in kelvin-voight equations // Applied Mathematical Sciences. -2015. -Vol.9. -№ 101-104. -P. 5079-5088.

10 Yaman M., Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation // Journal of Inequalities and Applications. -2012. -Vol.2012. -№ 274. -P.1-8.

11 Кожанов А.И., Намсараева Г.В.Линейные обратные задачи для одного класса соболевского типа // Челяб. физ.-матем. журн. -2018. -Т.3. -№ 2. -С.153-171.

12 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.:Наука, 1967.

13 Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972. 588с.

References:

1. *Sobolev S. L.(1954) Ob odnoj novoj zadache matematicheskoj fiziki [One new problem in mathematical physics]. Izv. AN SSSR. Ser. mat. № 18. 3-50. (In Russian)*
2. *Benjamin T.B., Bona J.L., Mahony J.J. (1972) Model equations for long waves in nonlinear dispersive system. Pliilos. Trans. Roy. Soc. London A.. V. 272. № 1220. 47 - 78 .*
3. *Showalter R. E.(1972) Existence and representation theorems for a semilinear Sobolev equation in Banach space. SIAM J. Math. Anal. Vol.3. № 3. 527-543.*
4. *Showalter R. E., Ting T. W.(1970) Pseudoparabolic partial differential equations. SIAM J. Math. Anal. № 1. 1–26.*
5. *Oskolkov A. P. (1988) Nachal'no-kraevye zadachi dlja uravnenij dvizhenija zhidkostej Kel'vina-Fojgta izhidkostej Oldrojta [Initial-boundary value problems for the equations of motion of Kelvin-Voigt fluids and Oldroyd fluids]. Tr. Mat. in-ta im. V. A. Steklova AN SSSR. T.179. 126-164. (In Russian)*
6. *Sveshnikov A. G., Al'shin A. B., Korpusov M. O., Pletner Ju.D. (2007) .Linejnye i nelinejnye uravnenija sobolevskogo tipa [Linear and nonlinear sobolev-type equations], M.: Fizmatlit, 642. (In Russian)*
7. *Antontsev S.N., H.B.de Oliveira, Kh. (2019) Khompysh Generalized Kelvin-Voigt equations for nonhomogeneous and incompressible fluids. Communications in Mathematical Sciences.. Vol.17. №7. P.1915-1948.*
8. *Antontsev S.N., Aitzhanov S.E. (2019) Inverse problem for an equation with a nonstandard growth condition. Journal of Applied Mechanics and Technical Physics. Vol.60. № 2. 265-277.*
9. *Abylkairov U.U., Khompysh K (2015).An inverse problem of identifying the coefficient in kelvin-voight equations. Applied Mathematical Sciences. Vol.9. № 101-104. 5079-5088.*
10. *Yaman M.,(2012) Blow-up solution and stability to an inverse problem for a pseudo-parabolic equation. Journal of Inequalities and Applications. Vol.2012. № 274. 1-8.*
11. *Kozhanov A.I., Namsaraeva G.V (2018) Linejnye obratnye zadachi dlja odnogo klassa sobolevskogo tipa [Linear inverse problems for one class of Sobolev type].Cheljab. fiz.-matem. zhurn. T.3. № 2. 153-171. (In Russian)*
12. *Demidovich B.P.(1967) Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. M.:Nauka (In Russian)*
13. *Lions Zh.-L (1972) Nekotorye metody reshenija nelinejnyh kraevyh zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]. M.: Nauka,. 588. (In Russian)*