МРНТИ 27.35.33
УДК 519.87

https://doi.org/10.51889/7822.2022.94.66.003

Ш.Д. Махмудова[1], А.Д. Махмудов[2], А. Н. Уразгалиева[1]*

[1] Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана, г. Уральск, Казахстан
[2] Западно-Казахстанский инновационно-технологический университет, г. Уральск, Казахстан
[*]e-mail: urazgalieva.akmaral@mail.ru

ПРИНЦИП КРОТОВА И РАВНОВЕСНЫЕ СИТУАЦИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ

Аннотация

Основными прикладными задачами, которые привели к появлению теории дифференциальных игр, можно отнести следующие: конфликтные проблемы управления объектами; проблемы регулирования с неопределенной помехой и проблемы управления с неполной информацией. Существует связь между условиями существования равновесных ситуации в теории игр и принципами аналитической механики. Теория игр находит свое применение в экономических науках. Так с помощью теории игр экономисты моделируют все ситуации, в которых возникает стратегическое взаимодействие. В теории отраслевых рынков игры возникают везде, где на рынке присутствует более одной фирмы. В статье приведены исследования достаточных условий существования ситуации равновесия и их связь с принципом оптимальности В.Ф. Кротова. Она состоит в том, что вместо отыскания допустимой пары функций, на которой критерий оптимальности достигает минимума, находится тройка функций, одной из которых является функция Кротова. В данной статье показано, что используемые для доказательства функции можно рассматривать как аналог функции Кротова при определенных условиях.

Ключевые слова: Дифференциальная игра; динамические системы; равновесная ситуация; принцип Кротова; функция Кротова.

Аңдатпа

Ш.Д. Махмудова[1], А.Д. Махмудов[2], А.Н. Уразгалиева[1]
[1]Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті, Орал қ., Қазақстан
[2]Батыс Қазақстан инновациялық-технологиялық университеті, Орал қ., Қазақстан

КРОТОВ ПРИНЦИПІ ЖӘНЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОЙЫНДАРДАҒЫ ТЕППЕ-ТЕҢДІК ЖАҒДАЙЛАР

Дифференциалдық ойындар теориясының пайда болуына әкелген негізгі қолданбалы есептерге мыналар жатады: объектіні басқарудың конфликттік мәселелері; белгісіз кедергілермен басқару мәселелері және толық емес ақпаратпен басқару мәселелері. Ойын теориясындағы тепе-теңдік жағдайларының бар болу шарттары мен аналитикалық механика принциптері арасында байланыс бар. Ойын теориясы экономикалық ғылымдарда өз қолданылуын табады. Осылайша, ойын теориясының көмегімен экономистер стратегиялық өзара әрекеттесу орын алатын барлық жағдайларды модельдейді. Өнеркәсіптік нарық теориясында нарықта біреуден артық фирмалар бар жерлердің барлығында ойындар пайда болады. Бұл мақалада тепе-теңдік жағдайының бар болуының жеткілікті шарттары және олардың В.Ф.Кротовтың оңтайлылық принципімен байланысы туралы зерттеулер келтірілген. Бұл оңтайлылық критерийі минимумға жететін функциялардың рұқсат етілген жұбын табудың орнына функциялардың бірін Кротов функциясының аналогы ретінде қарастыруға болатын функциялардың үштігін табудан тұрады. Бұл мақалада дәлелдеу үшін қолданылатын функцияларды белгілі бір жағдайларда Кротов функциясының аналогы ретінде қарастыруға болатынын көрсетілген.

Түйін сөздер: Дифференциалды ойын; динамикалық жүйелер; тепе-теңдік жағдайы; Кротов принципі; Кротов функциясы.

Abstract

THE KROTOV PRINCIPLE AND EQUILIBRIUM SITUATIONS IN DIFFERENTIAL GAMES

Makhmudova Sh.D. [1], Makhmudov A.D. [2], Urazgalieva A.N. [1]
[1]Zhangir khan west kazakhstan agrarian-technical university, Uralsk, Kazakhstan
[2]West Kazakhstan innovation and technological university, Uralsk, Kazakhstan

The main applied problems that led to the emergence of the theory of differential games include the following: conflict problems of object control; control problems with uncertain interference and control problems with incomplete information. There is a connection between the conditions for the existence of equilibrium situations in game theory and the principles of analytical mechanics. Game theory finds its application in economic sciences. Thus, with the help of game theory, economists model all situations in which strategic interaction occurs. In industry market theory, games occur wherever there is more than one firm in the market. This article presents studies of sufficient conditions for the existence of an equilibrium situation and their connection with the principle of optimality of V.F. Krotov. It consists in the fact that instead of finding an admissible pair of functions on which the optimality criterion reaches a minimum, a triple of functions is found, one of which is the Krotov function. This article shows that the functions used for the proof can be considered as an analogue of the Krotov function under certain conditions.

Keywords: Differential game; dynamic systems; equilibrium situation; Krotov's principle; Krotov function.

Введение

К математическим моделям, позволяющим исследовать различные динамические системы, управляемые в условиях неопределенности или конфликта относятся дифференциальные игры нескольких лиц.

Существуют следующие основные направления развития теории дифференциальных игр, предложенные Петросяном Л.А. [1, 2, 3]:

- антагонистические дифференциальные игры с полной информацией,
- общие динамические игры,
- антагонистические игры с неполной информацией типа поиска,
- неантагонистические дифференциальные игры.

В статье рассматривается неантагонистические дифференциальные игры, также условия существования равновесных ситуаций (равновесия по Нэшу) [4, 5, 6] в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц. Неантагонистические дифференциальные игры характеризуются множественностью принципов оптимальности, в отличие от антагонистических дифференциальных игр, где понятие оптимальности определено строго и однозначно.

Выбор ситуации равновесия в качестве объекта исследования оправдывается следующими соображениями:

1) этот принцип оптимальности сравнительно прост, но в то же время обладает рядом существенных черт, присущих другим принципам оптимальности. Поэтому, можно надеяться, что идеи, развитые при исследовании ситуации равновесия, окажутся плодотворными и в других случаях;

2) ситуация равновесия относится к числу динамически устойчивых принципов (устойчивых по времени) и дает игрокам выигрыш не меньший, чем гарантированный;

3) данный принцип оптимальности является, по-видимому, наиболее естественным, с содержательной точки зрения, «симметричным» принципом и наиболее часто используется в прикладных исследованиях.

Равновесные решения дифференциальных бескоалиционных игр обладают рядом особенностей: могут существовать несколько равновесных наборов управляющих воздействий. Следует заметить, что несколько ситуаций равновесия (седловых точек) может быть и в антагонистических играх. При этом они являются эквивалентными и взаимозаменяемыми. Однако эти свойства не сохраняются для равновесных наборов в играх с нулевой суммой.

Исследования проблем равновесия в дифференциальных играх достаточно активно ведутся в самых разных аспектах [7, 8, 9, 10]. Теория дифференциальных игр и ситуация равновесия (равновесия по Нэшу), как математический аппарат исследования, хорошо используется для описания функционирования различных экономик. Необходимость использования конкурентного равновесия, рыночных отношений практически общепризнана. Рынок можно рассматривать как некооперативную игру, решением которой считается точка Нэша (равновесная ситуация).

Рассмотрим дифференциальную игру N лиц, состояние которой характеризуется в каждый момент времени t фазовым вектором $x(t)=\left(x^{(1)}(t),\dots,x^{(n)}(t)\right)$ пространства R^n (R^n – n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|_{R^n}=\left(\sum_{j=1}^{n}x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$), изменяющимся в соответствии с дифференциальным уравнением (связями) в векторной форме:

$$\dot{x}(t)=f\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_i(t),\dots,u_N(t)\right),\ t\in\left[t_0,t_f\right] \tag{1}$$

Или в координатной форме:

$$\dot{x}^{(1)}(t) = f^{(1)}\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.$$
$$\dot{x}^{(n)}(t) = f^{(n)}\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big),$$

При заданных начальных условиях

$$x(t_0) = x_0 \qquad (2)$$

Функция $f\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\big)$ отражает динамические свойства игры и зависит от времени *t,* фазового вектора $x(t)$ и управляющих воздействий $u_1(t) = \left(u_1^{(1)}(t), \dots u_1^{(r_1)}(t)\right)$, …, $u_N(t) = \left(u_N^{(1)}(t), \dots u_N^{(r_N)}(t)\right)$ участников игры. Считается, что продолжительность игры ограничена: она считается в момент времени $t = t_0$ и заканчивается в момент времени $t = t_f$, где $t_0 < t_f < +\infty$.

Предполагается, что правая часть дифференциального уравнения (1) удовлетворяет следующим условиям:

а) вектор-функция $f\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\big)$ определена и непрерывна на $[t_0, t_f] \times R^n \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_N}$,

б) вектор-функция $f\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\big)$ непрерывно дифференцируема по x на R^n при любых значениях $t \in T$, $u_i(t) \in R^{r_i}$, $i = 1, 2$, причем

$$\frac{\partial f^{(j)}}{\partial x} = \left(\frac{\partial f^{(j)}}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x^{(n)}}\right), \; j = \overline{1, n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}}, \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}} \dots, \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(1)}} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \\ \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(n)}}, \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(n)}} \dots, \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(n)}} \end{pmatrix},$$

в) существует константа $C > 0$, такая, что для всех $\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\big) \in\times R^n \times R^{r_1} \times \dots \times R^{r_N}$, т.е. функция $f\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\big)$ удовлетворяет условию Липшица с константой C.

Условия а)-в) гарантируют существование абсолютно непрерывного решения дифференциального уравнения (1) на $[t_0, t_f]$, соответствующего начальным условиям (2) и любым кусочно-непрерывным управляющим воздействиям $u_i(t)$, $u_i(t) \in R^{r_i}$, $i = \overline{1, N}$ при $t_0 \leq t \leq t_f$.

Программная стратегия $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ i – го участника является допустимой, если $u_i(t)$ - кусочно-непрерывная функция. Значения стратегии $u_i(t)$ в каждый момент времени *t* принадлежит некоторому заданному компактному множеству $U_i(t)$ в евклидовом пространстве R^{r_i} (удовлетворяет «геометрическому» ограничению):

$$u_i(t) \in U_i(t), \; t \in [t_0, t_f], \; i = \overline{1, N}. \qquad (3)$$

Определим множество

$$D = \{u_i(\cdot) \,/\, u_i\,(t) \in U_{\,i}(t), i = \overline{1, N}, t \in T, u(\cdot) \mapsto x(\cdot)\}, \qquad (4)$$

где $u(\cdot) \mapsto x(\cdot)$ означает, что ситуация $u(\cdot)$ порождает в соответствии с условиями (1) и (2) траекторию $x(\cdot)$.

На множестве D зададим функционал

$$J_i\big(u(\cdot)\big) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} h_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big)dt, \qquad (5)$$

который примем за функцию выигрыша i - го игрока.

Определим множество

$$D_i\big(u^p(\cdot)/u_i(\cdot)\big) = \{u^p(\cdot) \parallel u_i\,(\cdot) \in D\}, \; i = \overline{1, N}.$$

Тогда ситуация равновесия определяется следующим образом.

Ситуация $u^p(\cdot)$ определяет ситуацию равновесия на множестве D в игре (1) – (5), если справедливо отношение

$$J_i(u^p(\cdot)) = \max_{u_i(\cdot)\in D_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} J_i\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}. \tag{6}$$

Условие (6) означает, что ни один из игроков не заинтересован в отклонении от ситуации равновесия $u^p(\cdot)$, если остальные игроки ее придерживаются.

Материалы и методы исследования

Ситуацию равновесия (6) можно сформулировать в эквивалентном виде. Выигрыш i-го участника можно определить на множестве пар $\big(x(\cdot), u_i(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, где

$$\widetilde{D} = \{x(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot) | u_i(t) \in U_i(t), i = \overline{1,N}, u(\cdot) \mapsto x(\cdot)\} \tag{7}$$

Как функционал

$$\tilde{J}_i\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} h_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big)dt\,,\ i = \overline{1,N} \tag{8}$$

Ситуацией равновесия в игре (1)-(3), (7), (8) на множестве $\widetilde{D}$ будем называть пару $\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, такую, что

$$\widetilde{J}_i(x^p(\cdot), u^p(\cdot)) = \max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\widetilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} \widetilde{J}_i\big(x(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}. \tag{9}$$

где

$$\widetilde{D}_i\big(u^p(\cdot)|u_i(\cdot)\big) = \big\{x(\cdot), u_i(\cdot)|u_i(t) \in U_i(t), \big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big) \mapsto x(\cdot)\big\},\ i = \overline{1,N} \tag{10}$$

Задачи (1)-(6) и (1)-(3), (7)-(9) как не трудно показать эквивалентны. Действительно, если $\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big) \in D$, то $\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot), x(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, и наоборот, если $\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot), x(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, то $\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big) \in D$.

Кроме того,

$$\widetilde{J}_i\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big) = J_i\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}$$

Это непосредственно следует из определений множеств D и $\widetilde{D}$ в (4) и (7) соответственно.

Пусть существует некоторая допустимая стратегия $\bar{u}_i(\cdot)$ i-го игрока, такая что $\bar{u}_i(\cdot) \in D_i\big(u^p(\cdot)|u_i(\cdot)\big)$, $i = \overline{1,N}$, для которой выполнено условие (6):

$$J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) = \max_{u_i(\cdot)\in D_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} J_i\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Покажем, что пара $\big(\bar{x}(\cdot), \bar{u}(\cdot)\big) \in \widetilde{D}_i\big(u^p(\cdot)|u_i(\cdot)\big)$, где $\big(u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) \mapsto \bar{x}(\cdot)$ доставляет максимум функционалу $\widetilde{J}_i\big(x(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big)$ (9) на множестве $\widetilde{D}_i\big(u^p(\cdot)|u_i(\cdot)\big)$.

Для этого предположим противное, т.е. пусть существует некоторая пара $\big(\tilde{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, где $\big(\tilde{x}(\cdot), \tilde{u}_i(\cdot)\big) \neq \big(\bar{x}(\cdot), \bar{u}_i(\cdot)\big)$ и такая, что

$$\widetilde{J}_i\big(\tilde{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) = \max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\widetilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} \widetilde{J}_i\big(x(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big) > \widetilde{J}_i\big(\bar{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) \tag{12}$$

Из определений (5), (9) соответственно функционалов $J_i\big(u_i(\cdot)\big)$, $\widetilde{J}_i\big(x(\cdot), u_i(\cdot)\big)$ имеем:

$$\widetilde{J}_i\big(\bar{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) = J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big),$$
$$\widetilde{J}_i\big(\tilde{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) = J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}$$

В силу условия (12) и последних двух равенств получим следующее неравенство:

$$J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) > J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N},$$

Которое противоречит условию (11), а значит наше предположение (12) неверно. Следовательно, можно утверждать, что пара $\big(\bar{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$ удовлетворяет условию:

$$\widetilde{J_i}\big(\bar{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \bar{u}_i(\cdot)\big) = \max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\widetilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} \widetilde{J_i}\big(x(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),$$

т.е. стратегия $\bar{u}_i(\cdot) \in D_i\big(u^p(\cdot)|\bar{u}_i(\cdot)\big)$, $i = \overline{1,N}$ удовлетворяет определению (9).

Аналогично можно показать, что если пара $\big(\tilde{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, удовлетворяет определению (9):

$$\widetilde{J_i}\big(\tilde{x}(\cdot), u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) = \max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\widetilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} \widetilde{J_i}\big(x(\cdot), u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N},$$

то ситуация $\big(u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) \in D$ удовлетворяет определению (6):

$$J_i\big(u^p(\cdot) \parallel \tilde{u}_i(\cdot)\big) = \max_{u_i(\cdot)\in D_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))} J_i\big(u^p(\cdot) \parallel u_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N}.$$

Таким образом, мы показали, что решение задачи (1)-(6) является решением задачи (1)-(3), (7)-(10) и наоборот, следовательно, эти задачи эквивалентны.

Введем следующие обозначения

$$F_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big) = \frac{\partial K_i(t,x)}{\partial t} + \frac{\partial K_i(t,x)}{\partial t} f\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big) +$$
$$+ h_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big),\ i = \overline{1,N}, \tag{13}$$

где скалярные функции $K_i(t,x)$, $i = \overline{1,N}$ определены и непрерывны на $T \times R^n$ и имеют непрерывные частные производные при всех t, x.

Составим вспомогательный функционал i-го участника вида:

$$I_i\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = \int_{t_0}^{t_f} F_i\big(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\big)dt + \Phi_i\big(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f\big),\ i = \overline{1,N} \tag{14}$$

где

$$\Phi_i\big(x(t_0), x(t_f), t_0, t_f\big) = g_i\Big(x\big(t_f\big)\Big) - K_i\Big(t_f, x\big(t_f\big)\Big) + K_i\big(t_0, x(t_0)\big),\ i = \overline{1,N} \tag{15}$$

Так как рассматривается случай, когда время t_0, t_f фиксированы, и задано начальное условие (2), то функция $\Phi_i(*)$ зависит только от $x(t_f)$, поэтому ниже будем писать $\Phi_i\Big(x\big(t_f\big)\Big)$.

Функционал $I_i(*)$ из (15) определен на расширенном множестве

$$\tilde{E} = \{x(\cdot), u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot) | u_i(t) \in U_i(t), i = \overline{1,N}, x(t) \in R^n, t \in T\},$$

где $x(t), t \in T$ - множество всех кусочно-гладких (непрерывных, кусочно-дифференцируемых) функций со значениями в R^n. Множество $\tilde{E}$ отличается от множества $\widetilde{D}$ из (7) тем, что на $\tilde{E}$ переменные $x(\cdot), u(\cdot)$ уже не связаны дифференциальным уравнением (1). Очевидно, что $\widetilde{D} \subseteq \tilde{E}$.

Результаты исследования

Сформулируем достаточное условие существования ситуации равновесия в игре (1)-(3), (7)-(8).

Теорема 1. Для того, чтобы пара $\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$ реализовала ситуацию равновесия в дифференциальной игре (1)-(3), (7)-(8) достаточно, существования гладких функций $K_i(t,x)$, $i = \overline{1,N}$, таких, что

$$F_i\big(t, x^p(t), u^p(t)\big) = \max_{x(t)\in R^n} \max_{u_i(t)\in U_i(t)} F_i\big(t, x(t), u^p(t) \| u_i(t)\big),\ i = \overline{1,N} \tag{16}$$

$$\Phi_i\Big(x^p\big(t_f\big)\Big) = \max_{x(t)\in R^n} \Phi_i\Big(x\big(t_f\big)\Big),\ i = \overline{1,N} \tag{17}$$

($F_i(*)$ определены в (13), а - в (15)).

Доказательство. Покажем, что если пара $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, то

$$I_i\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) = \widetilde{J_i}\big(x(\cdot), u(\cdot)\big),\ i = \overline{1,N} \tag{18}$$

где $\widetilde{D}$, $\widetilde{J_i}(*)$, $I_i(*)$ определены в (7), (8), (14) соответственно.

Если $\big(x(\cdot), u(\cdot)\big) \in \widetilde{D}$, то функцию $F_i(*)$ из (13) можно переписать в виде

$$F_i\big(t,x(t),u(t)\big)=\frac{\partial K_i(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial K_i(t,x)}{\partial t}\dot{x}(t)+h_i\big(t,x(t),u(t)\big),\ i=\overline{1,N}$$

Тогда функционал $I_i(*)$ из (14) с учетом определения $\Phi_i(*)$ в (15) принимает вид

$$I_i\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)=K_i\left(t_f,x(t_f)\right)-K_i\big(t_0,x(t_0)\big)+g_i\left(x(t_f)\right)-K_i\left(t_f,x(t_f)\right)+K_i\big(t_0,x(t_0)\big)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}h_i\big(t,x(t),u(t)\big)dt=g_i\left(x(t_f)\right)+\int_{t_0}^{t_f}h_i\big(t,x(t),u(t)\big)dt=\tilde{J}_i\big(x(\cdot),u(\cdot)\big),\ i=\overline{1,N}.$$

Пусть существует пара $\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\in\tilde{D}$, такая, что выполняются условия (16), (17). Покажем, что она реализует ситуацию равновесия на множестве $\tilde{E}$ в игре с функциями выигрышей $I_i\big(x(\cdot),u(\cdot)\big)$, $i=\overline{1,N}$ из (14).

Из условия (16), определения (14), с учетом (15) имеем:

$$I_i\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)=\int_{t_0}^{t_f}F_i\big(t,x^p(t),u^p(t)\big)dt+\Phi_i\left(x^p(t_f)\right)=$$
$$=\int_{t_0}^{t_f}\max_{x(t)\in R^n}\max_{u_i(t)\in U_i(t)}F_i\big(t,x(t),u^p(t)\|u_i(t)\big)_i\,dt+\max_{x(t)\in R^n}\Phi_i\left(x(t_f)\right).$$

Используя

$$\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t)\|u_i(t),\psi_i(t)\big),\ [11,12]$$

получаем

$$I_i\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)=\max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\tilde{E}_i}\int_{t_0}^{t_f}F_i\big(t,x(t),u^p(t)\|u_i(t)\big)dt+\max_{x(t)\in R^n}\Phi_i\left(x(t_f)\right)\geq$$
$$\geq\max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\tilde{E}_i}\left[\int_{t_0}^{t_f}F_i\big(t,x(t),u^p(t)\|u_i(t)\big)dt+\Phi_i\left(x(t_f)\right)\right]=$$
$$=\max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\tilde{E}_i}I_i\big(x(\cdot),u^p(\cdot)\|u_i(\cdot)\big),\ i=\overline{1,N},$$

здесь

$$\tilde{\mathrm{E}}=\{\mathrm{x}(\cdot),\mathrm{u_i}(\cdot)|\mathrm{u_i}(\mathrm{t})\in\mathrm{U_i}(\mathrm{t}),\mathrm{x}(\mathrm{t})\in\mathrm{R^n},\mathrm{t}\in\mathrm{T}\},\ \mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{N}}.$$

Покажем теперь, что ситуация $\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\in\tilde{D}$ реализует ситуацию равновесия в игре (1)-(3), (7)-(8). Так как по условию $\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\in\tilde{D}$, то из определения (7) следует, что $\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\in\tilde{D}_i\big(u^p(\cdot)|u_i(\cdot)\big)$, где $\tilde{D}_i(*)$ из (10).

Таким образом из системы дифференциальных уравнений в частных производных относительно функции $S_i(t,x)$, $\mathrm{i}=\overline{1,\mathrm{N}}$ и равновесных стратегии [13, 14], следует, что

$$\tilde{J}_i\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\ =I_i\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)=\max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\tilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))}I_i\big(x(\cdot),u^p(\cdot)\parallel u_i(\cdot)\big)=$$
$$=\max_{(x(\cdot),u_i(\cdot))\in\tilde{D}_i(u^p(\cdot)/u_i(\cdot))}\tilde{J}_i\big(x(\cdot),u^p(\cdot)\parallel u_i(\cdot)\big),\ i=\overline{1,N},$$

т.е. справедливо (9). Следовательно, пара $\big(x^p(\cdot),u^p(\cdot)\big)\in\tilde{D}$ реализует ситуацию равновесия в дифференциальной игре (1)-(3), (7)-(8).

Замечание.

Теорему, доказанную в [11]:

1^0. В дифференциальной игре (1) - (5) при всех $t\in T$ равновесная траектория $u^p(\cdot)=\left(u_1^p(\cdot),\dots,u_N^p(\cdot)\right)$ и соответствующая равновесная траектория $x^p(\cdot)$ удовлетворяют условию принципа максимума Понтрягина для i-го участника относительно $\psi_i(\cdot)$:

$$\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\prod\nolimits_i\big(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big)$$

где

$$\psi_i(t) = \frac{\partial S_i\left(t, x^p(t)\right)}{\partial \dot{x}},\ t\epsilon\left[t_0, t_f\right),\ i = \overline{1, N},$$

$$\psi_i\left(t_f\right) = \frac{\partial S_i\left(x^p\left(t_f\right)\right)}{\partial \dot{x}},\ i = \overline{1, N},$$

Причем

$$\frac{\partial S_i\left(t, x^p(t)\right)}{\partial \dot{x}} = -\prod_i\left(t, x^p(t), u^p(t), \psi_i(t)\right) = \max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}} \prod_i\left(t, x^p(t), u^p(t)//u_i(t), \psi_i(t)\right),\ t \in T,\ i = \overline{1, N}.$$

2^0. Функция $S_i(t, x)$ из (18) удовлетворяет дифференциальному уравнению Гамильтона-Якоби в частных производных

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} f\left(t, x(t), u(t)//u_i(t)\right) + h_i\left(t, x(t), u(t)//u_i(t)\right)\right] = 0$$

с граничным условием $S_i\left(t_f, x\left(t_f\right)\right) = g_i\left(x\left(t_f\right)\right),\ i = \overline{1, N}$.

Можно переформулировать в следующей форме, содержащей принцип сведения динамического равновесия к статистическому.

Теорема 2. Для того, чтобы пара $\left(x^p(\cdot), u^p(\cdot)\right) \in \widetilde{D}$ реализовала ситуацию равновесия в дифференциальной игре (1)-(3), (7)-(8) достаточно существование гладких функций $K_i(t, x)$, $i = \overline{1, N}$, таких, что в каждый момент времени $t \in T$ пара $\left(x^p(\cdot), u^p(\cdot)\right) \in E(t)$, где $E(t) = \{x(t), u_1(t), \dots, u_N(t) | u_i(t) \in U_i(t), i = \overline{1, N}, x(t) \in R^n\}$, реализовывала ситуацию равновесия в статистической игре с функциями выигрыша $F_i\left(t, x(t), u(t)\right)$, $i = \overline{1, N}$ из (13) на множестве $E(t)$, т.е., чтобы выполнялись условия (16) и условие (17).

Заключение

Достаточные условия существования ситуации равновесия в бескоалиционной дифференциальной игре (1)-(3), (7)-(8), сформулированные в данной статье, аналогичны принципу оптимальности В.Ф. Кротова, который представляет аппарат достаточных условий в задачах оптимального управления. Отметим, что функции [11]

$$S_i(t, x) = g_i\left(x\left(t_f\right)\right) + \int_t^{t_f} \max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[h_i\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) + \psi_i(\tau)\left(f\left(\tau, x(\tau), u(\tau)\right) - \dot{x}(\tau)\right)\right] d\tau,\ \ i = \overline{1, N}$$

Могут быть рассмотрены как аналог функций Кротова $K_i(t, x)$ (в предположении гладкости $S_i(t, x)$), тогда утверждения (16), (17) теоремы 2 переходят соответственно в утверждения

$$\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} + \max_{u_i(\tau)\in\vartheta_{i(\tau)}}\left[\frac{\partial S_i(t, x)}{\partial t} f\left(t, x(t), u(t)//u_i(t)\right) + h_i\left(t, x(t), u(t)//u_i(t)\right)\right] = 0, \quad (*)$$

$$S_i\left(t_f, x\left(t_f\right)\right) = g_i\left(x\left(t_f\right)\right),\ i = \overline{1, N} \qquad (**)$$

из теоремы 2 в [13, 15].

Список использованных источников:

1 Петросян А.А. Дифференциальные игры. Современное состояние и проблемы // Многошаговые, дифференциальные, бескоалиционные и кооперативные игры. – Калинин: 1983. С. 26-31.

2 Воробьев Н.Н. Теория игр. – М.: Наука, 1985. - 408 с.

3 Разумихин Б.С. Физические модели и методы теории равновесия в программировании и экономике. – М.: Наука, 1975. – 304 с.

4 Никольский С.М. Курс математического анализа. Т.1. – М.: Наука, 2001. – 464 с.

5 Мкртычев, О.В. Теоретическая механика: Уч. / О.В. Мкртычев. - М.: Вузовский учебник, 2019. - 320 с.

6 Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решить / В. А.Гордин – М.: Учебники Высшей школы экономики, 2016. – 235 с.

7 Сорокин В. А., Сизов Н. А., Дурандин Д. П., Боган М. В. Сравнение принципов оптимальности для кооперативных игр на графах // Молодой ученый. 2019. №26(264). С. 14-16.

8 Павловская Е.Я., Поспелов И.Г., Скрипкин К.Г. Точка Нэша и общественно необходимые затраты труда в хозяйстве // Сообщения по прикладной математике. – М.: ВЦ АН СССР, 1988. – 63 с.

9 Чистяков Ю.Е. Задача о ситуациях равновесия по Нэшу в игре многих лиц с памятью // Прикладная математика и механика. 1987. №2. С.201 - 214.

10 Петров А.А., Поспелов И.Г. Математические модели экономики России // Вестник РАН, т.79, №6, 2009. С. 492-506.

11 Махмудова Ш.Д. Главная функция Гамильтона и необходимые условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби/ Ш.Д.Махмудова, А.Н.Уразгалиева// Вестник КазНПУ им.Абая - 2021. - №1. - С. 31.

12 Зеликин, М.И. Оптимальное управление и вариационное исчисление / М.И. Зеликин. - М.: Ленанд, 2017. - 160 с.

13 Махмудова Ш.Д. Достаточные условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби/ Ш.Д. Махмудова, А.Д. Махмудов, А.Н. Уразгалиева// Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан -2022. - № 2(84). - С. 183-194.

14 Ландау, Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. - М.: Физматлит, 2018. - 224 с.

15 Бертяев, В.Д. Теоретическая и аналитическая механика. Учебно-исследовательская работа студентов: Учебное пособие / В.Д. Бертяев, В.С. Ручинский. - СПб.: Лань, 2019. - 424 с.

References:

1 Petrosyan A.A. (1983) Differentsial'nyye igry. Sovremennoye sostoyaniye i problem [differential games. Current state and problems] Mnogoshagovyye, differentsial'nyye, beskoalitsionnyye i kooperativnyye igry [Multi-step, differential, non-cooperative and cooperative games]. - Kalinin[in Russian]

2 Vorob'ev N.N. (1985) Teorija igr. [Game theory]. M.: Nauka [in Russian].

3 Razumihin B.S. (1975) Fizicheskie modeli i metody teorii ravnovesija v programmirovanii i jekonomike [Physical models and methods of equilibrium theory in programming and economics]. M.: Nauka [in Russian].

4 Nikolsky S.M.(2001) Kurs matematicheskogo analiza[Course of mathematical analysis]. T.1. M.: Nauka [in Russian].

5 Mkrtychev O.V. (2019). Teoreticheskaja mehanika [Theoretical mechanics]. M.: Vuzovskij uchebnik. [in Russian].

6 Gordin V. A. (2016). Differencial'nye i raznostnye uravnenija. Kakie javlenija oni opisyvajut i kak ih reshit [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. M.: Uchebniki Vysshej shkoly jekonomiki. [in Russian].

7 Sorokin V. A., Sizov N. A., Durandin D. P.,Bogan M. V. (2019) Sravneniye printsipov optimal'nosti dlya kooperativnykh igr na grafakh [Comparison of the principles of optimality for cooperative games on graphs] Young scientist[in Russian].

8 Pavlovskaya E.Ya., Pospelov I.G., Skripkin K.G. (1988) Tochka Nesha i obshchestvenno neobkhodimyye zatraty truda v khozyaystve [The Nash point and socially necessary labor costs in the economy] Reports on applied mathematics. Young scientist [in Russian].

9 Chistyakov Yu.E. (1987) Zadacha o situatsiyakh ravnovesiya po Neshu v igre mnogikh lits s pamyat'yu [The problem of Nash equilibrium situations in a game of many persons with memory] Applied Mathematics and Mechanics. Young scientist [in Russian].

10 Petrov A.A., Pospelov I.G. (2009) Matematicheskiye modeli ekonomiki Rossii [Mathematical models of the Russian economy] Bulletin of the Russian Academy of Sciences, vol. 79[in Russian].

11 Makhmudova, Sh.D. (2021). Osnovnaya funktsiya Gamil'tona i neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v vide uravneniy Gamil'tona-Yakobi [Hamilton's principal function. Necessary conditions for the existence of equilibrium in the form of hamilton-jacobi equations] Vestnik KazNPU imeni Abaya [in Russian].

12 Zelikin M.I. (2017). Optimal'noe upravlenie i variacionnoe ischislenie [Optimal control and calculus of variations]. M.: Lenand. [in Russian].

13 Makhmudova Sh.D. (2022) Dostatochnyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v forme uravneniy Gamil'tona-Yakobi [Sufficient conditions for the existence of an equilibrium situation in the form of the Hamilton-Jacobi equations] Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan [in Russian].

14 Landau L.D. & Livshic E.M. (2018). Teoreticheskaja fizika v 10 tomah. t.1. Mehanika[Theoretical physics in 10 volumes] V.I. M.: Fizmatlit. [in Russian].

15 Bertjaev V.D. & Ruchinskij V.S. (2019). Teoreticheskaja i analiticheskaja mehanika. Uchebno-issledovatel'skaja rabota studentov: Uchebnoe posobie [Theoretical and analytical mechanics. Educational and research work of students: Textbook]. SPb.: Lan. [in Russian].