УДК 517.956
МРНТИ 27.31.17

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.05

С.Е. Айтжанов[1,2], С.Ж. Сайдалимов[3]

[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан,
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан,
[3]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ТІКТӨРТБҰРЫШТАРҒА КЕЛТІРІЛЕТІН ОБЛЫСТАРДА КВАЗИСЫЗЫҚТЫ ЖЫЛУӨТКІЗГІШТІК ТЕҢДЕУ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН БАСТАПҚЫ-ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Бұл мақалада тіктөртбұрыштарға келтіруге болатын облыстарда квазисызықты жылуөткізгіштік теңдеу үшін қойылған бастапқы - шеттік есебі зерттелді. Нақты әлемде орын алған көптеген үрдістердің математикалық пішіндеуі математикалық физиканың теңдеулері үшін облыстары тікткртбұрыш емес болғанда есептерді зерттеуге әкеледі. Сызықты емес есептер теориясы заманауй дифференциалдық теңдеулер теориясының белсенді дамып келе жатқан саласы. Сызықты емес есептерді қарқынды зерттеу, негізінен, маңызды қолданбалы міндеттердің ауқымды есептерді шешудің математикалық әдістерін дамыту қажеттілігінен туындайды. Сызықты емес теңдеулер теориясында шенелмеген шешімдерді зерттеу ерекше орын алады, немесе басқаша айтқанда, күшейтілген режимдер. Шенелмеген шешімдерді қабылдайтын сызықты емес эволюциялық есептер глобалді шешілмейді: шешімдер ақырлы уақыт аралығында шексіз артады.

Бұл мақалада квазисықты жылуөткізгіштік теңдеу үшін тіктөртбұрыштарға келтіруге болатын облыстарда бастапқы шеттік есептің шешімінің бар болуы, Галеркин әдісімен дәлелденді. Шешімнің жалғыздығы алынған априорлық бағалаулардың көмегімен дәлелденді.

Сонымен қатар, шенелген аймақта ақырлы уақытта шешімдердің қирауының жеткілікті шарты алынған. Уақыттың шексіз өсуінде шешімнің экспоненциалды кемуі дәлелденді. Ақырлы уақыт мезетінде шешімнің локализациялануы, яғни жойылуы (нольге айналуы) дәлелденді.

Түйін сөздер: Квазисызықты теңдеу, шешімнің қирауы, шешімнің жойылуы, Галеркин әдісі, шешімділік, шешімнің жалғыздығы.

Аннотация

С.Е. Айтжанов[1,2], С.Ж. Сайдалимов[3]
[1]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан,
[2]Институт математики и математического моделирования, г.Алматы, Казахстан,
[3]Казахский национальный педагогический университет имени Абая , г.Алматы, Казахстан

РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ОБЛАСТЯХ, КОТОРЫЕ МОЖНО ПРЕОБРАЗОВАТЬ В ПРЯМОУГОЛЬНИКИ

В данной работе исследуется начально-краевая задача для квазилинейного уравнения теплопроводности в областях, приводящихся к прямоугольным. Математическое моделирование многих процессов, происходящих в реальном мире, приводит к изучению задач уравнений математической физики, когда области не являются прямоугольными. Теория нелинейных задач является активно развивающимся разделом теории современных дифференциальных уравнений. В теории нелинейных уравнений особое место занимает исследование неограниченных решений или, другими словами, режимы с обострением. Нелинейные эволюционные задачи, допускающие неограниченные решения, являются глобально неразрешимыми: решения неограниченно возрастают в течение конечного промежутка времени.

В данной работе начально-краевой задачи для квазилинейного уравнения теплопроводности в областях, которые могут быть сведены к прямоугольным, методом Галеркина доказывается существования решения. Единственность решения была доказана полученными априорными оценками. Получены достаточные условия разрушения решения за конечное время в ограниченной области.

Доказано экспоненциальное убывание решения при бесконечном увеличении времени. В конечном времени было доказано, что решение локализуется, т.е. исчезает (обнуляется).

Ключевые слова: Квазилинейное уравнение, разрушение решения, исчезновение решения, метод Галеркина, разрешимость, единственность решения.

Abstract

SOLVABILITY OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE QUASILINEAR EQUATION OF HEAT CONDUCTIVITY IN DOMAINS THAT CAN BE TRANSFORMED INTO RECTANGLES

Aytzhanov S.E. [1,2], Saidalimov S.Z. [3]

[1]Kazakh National University named after al-Farabi, Almaty, Kazakhstan,

[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan,

[3] Kazakh National Pedagogical University named after Abai, Almaty, Kazakhstan

In this paper, we study the initial-boundary-value problem for the quasilinear heat equation in regions that are reduced to rectangular. Mathematical modeling of many processes taking place in the real world leads to the study of the problems of equations of mathematical physics, when the areas are not rectangular. The theory of nonlinear problems is an actively developing section of the theory of modern differential equations. In the theory of nonlinear equations, a special place is occupied by the study of unbounded solutions or, in other words, modes with exacerbation. Nonlinear evolutionary problems that allow unlimited solutions are globally unsolvable: solutions grow unlimitedly over a finite period of time.

In this paper, the initial-boundary-value problem for the quasilinear heat equation in regions that can be reduced to rectangular ones, the existence of a solution is proved by the Galerkin method. The uniqueness of the solution was proved by the obtained a priori estimates.

Sufficient conditions for the destruction of the solution in a finite time in a bounded domain are obtained. The exponential decay of the solution with an infinite increase in time is proved. In the final time, it was proved that the solution is localized, i.e. disappears (nullifies).

Keywords: quasilinear equation, destruction of a solution, disappearance of a solution, Galerkin method, solvability, uniqueness of a solution.

$Q=\{(x,t):\ 0<t<T,\ \varphi_1(t)<x<\varphi_2(t)\}$ облысында квазисызықты параболалық теңдеуіне қойылған бастапқы – шеттік есепті қарастырайық

$$u_t-\mu u_{xx}=b(x,t)\,|\,u\,|^{p-2}\,u+f(x,t), \tag{1}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\quad x\in(\varphi_1(0),\varphi_2(0)), \tag{2}$$

$$u\big|_{x=\varphi_1(t)}=0,\ \ u\big|_{x=\varphi_1(t)}=0,\ \ 0<t<T. \tag{3}$$

Мұндағы $\varphi_i(t)\in C^1[0,T],\ i=1,2,$ барлық $t\in[0,T]$ үшін $\varphi_1(t)<\varphi_2(t)$ орындалсын және $\varphi(t)=\varphi_2(t)-\varphi_1(t)$ функциясы

$$\text{әрбір } t\in[0,T] \text{ үшін} |\,\varphi'(t)|\le M,\ M>0\,. \tag{4}$$

Тіктөртбұрышқа келтірілетін облыстарда біртекті емес Бюргерс теңдеуі үшін бастапқы - шеттік есептің бірмәнді шешімділігін [1-4] жұмыстарда зертелінген. Сызықты емес параболалық және эволюциялық теңдеулер үшін есептердің жалпыланған шешімдерінің шешімділігі және оның сапалық қасиеттері жайында [5-5] әдебиеттерде зерттелінген.

Енді $Q\to Q_T=(0,T)\times(0,1)$ бейнелейтін алмастыру жасайық, яғни рассказали не могут

$$(x,t)\mapsto(y,t)=\left(\frac{x-\varphi_1(t)}{\varphi_2(t)-\varphi_1(t)},\,t\right),$$

онда $u(x,t)\leftrightarrow v(y,t),\ b(x,t)\leftrightarrow b_1(y,t)$ және $f(x,t)\leftrightarrow g(y,t)$ сәйкес қойылады. Олай болса (1)-(3) есебі $Q_T=\{(y,t):\ 0\le t\le T,\ 0<x<1\}$ тіктөртбұрышында келесі түрде жазылады

$$v_t-\alpha(t)v_{yy}-\gamma(y,t)v_y=b_1(y,t)\,|\,v\,|^{p-2}\,v+g(y,t), \tag{5}$$

$$v(y,0)=v_0(y),\quad y\in(0,1), \tag{6}$$

$$v\big|_{y=0}=0,\ \ v\big|_{y=1}=0,\ \ 0<t<T. \tag{7}$$

Мұндағы $\alpha(t)=\dfrac{\mu}{\varphi^2(t)},\ \gamma(y,t)=\dfrac{\varphi_1'(t)+y\varphi(t)}{\varphi(t)},\ v_0(y)=u_0(\varphi_1(0)+y\varphi(0)).$

(5)-(7) есебінің коэффициенттері төмендегі шарттардықанағаттандырсын

$$\begin{aligned}&M_1 \le \alpha(t) \le M_2,\ |\alpha'(t)| \le M_2,\ \forall t \in [0,T],\\ &|\gamma(y,t)| \le M_3,\ |\gamma_y(y,t)| \le M_4,\ \forall (y,t) \in Q_T,\\ &|b_1(y,t)| \le b_1,\ |b_{1t}(y,t)| \le b_2,\ \forall (y,t) \in Q_T,\\ &\int_0^1 |g|^2\,dy \le 2M_5,\ \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{8}$$

Анықтама.(5)-(7) бастапқы-шеттік есептің $v \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ әлсіз жалпылама шешімі деп

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^1 v_t w dydt + \int_0^T\int_0^1 \alpha(t) v_y w_y dydt -\\ &-\int_0^T\int_0^1 \gamma(y,t) v_y w dydt = \int_0^T\int_0^1 b_1(y,t)|v|^{p-2} v w dydt + \int_0^T\int_0^1 g(y,t) w dydt,\end{aligned} \tag{9}$$

мұндағы $w \in \overset{0}{W}{}_2^{0,1}(Q_T)$ интегралдық тепе-теңдікті қанағаттандыратын $v \in \overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ функциясын айтамыз.

(5)-(7) бастапқы - шеттік есептің әлсіз жалпылама шешімінің бар болуын дәлелдеу үшін, біз $L^2(0,l)$ кеңістігінен $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ базисін таңдаймыз.Дәлірек айтсақ, келесі Штурм-Лиувилль есебінің шешімдерін пайдаланамыз

$$-\psi_j'' = \lambda_j \psi_j,\ \psi_j(0) = 0,\ \psi_j(l) = 0, \quad j = 1,2,....$$

Бұл есептің меншікті мәндері мен меншікті функциялары

$$\psi_j(y) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin\frac{j\pi y}{l},\ \lambda_j = \left(\frac{j\pi}{l}\right)^2,\ j = 1,2,.... \tag{10}$$

$\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ функциялар жүйесі $L^2(0,l)$-де ортонормаланған базис болып табылады, ал $\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$-де ортогональды базис болып табылады. Олай болса (5)-(7) есебініңәлсіз жалпылама $v \in L^2(Q_T)$ жуық шешімін келесі түрде іздейміз

$$v_m(y,t) = \sum_{j=1}^{m} C_{mj}(t)\psi_j(y), \tag{11}$$

мұндағы $C_{mj}(t) = (v, \psi_j)_{L^2(0,l)}$ және тізбек $L^2(0,l)$-де жинақталады.

(11) жуық шешімінің белгісіз коэффициенттерін $C_{mj}(t)$ келесі дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін Коши есебіненанықталады

$$\begin{aligned}&\int_0^1 v_{mt}\psi_j dy + \int_0^1 \alpha(t) v_{my}\psi_{jy} dy -\\ &-\int_0^1 \gamma(y,t) v_{my}\psi_j dy = \int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^{p-2} v_m \psi_j dy + \int_0^1 g(y,t)\psi_j dy,\end{aligned} \tag{12}$$

барлық $j = 1,..., m$ және $0 \le t \le T$ үшін орынды.

Бастапқы шарты

$$v_m(0) = v_{m0} = \sum_{j=1}^{m} C_{mj}(0)\psi_j(y) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \psi_j(y), \tag{13}$$

$\overset{0}{W}{}_2^{1}(0,l)$ кеңістігінде $m \to \infty$ ұмтылғанда $v_{m0} \to v_0$ әлді жинақталады.

Мынадай белгілеулер енгізейік:

$$\vec{C}_m \equiv \{C_{1m}(t),..., C_{mm}(t)\}^T,\ a_{kj} = \int_{\Omega} \psi_k \psi_j dx,$$

$$b_{kj} = \int_0^1 \alpha(t)\psi_{ky}\psi_{jy}dy + \int_0^1 \gamma(y,t)\psi_{ky}\psi_j dy + \int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^{p-2}\psi_k\psi_j dy + \int_0^1 g\psi_j dy,$$

$$A_m(\vec{C}_m) \equiv \{a_{jk}(\vec{C}_m)\},\ \vec{G}_m(\vec{C}_m) \equiv \{b_{jk}(\vec{C}_m)\}\vec{C}_m.$$

Онда (12), (13) Коши есебін келесі матрицалық түрде жазуға болады

$$A_m\vec{C}'_m \equiv \vec{G}_m(\vec{C}_m),\ \vec{C}_m(0) = \vec{\alpha}. \tag{14}$$

(12) теңдіктің екі жағын $C_{mj}(t)$ көбейтіп және $j = \overline{1,m}$ бойынша қосындылайық. Нәтижеде төмендегі теңдікті аламыз

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_m\|^2_{L_2(0,1)} + \alpha(t)\int_0^1 |v_{my}|^2 dy = \int_0^1 \gamma(y,t)v_{my}v_m dy + \int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^p dy + \int_0^1 g(y,t)v_m dy.$$

Бұған (8) шартты қолданайық, сонда

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|v_m\|^2_{L_2(0,1)} + M_1\int_0^1 |v_{my}|^2 dy \le \int_0^1 \gamma(y,t)v_{my}v_m dy + \int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^p dy + \int_0^1 g(y,t)v_m dy. \tag{15}$$

(15) теңсіздіктің оң жағын Юнг, Гельдер және енгізу теоремаларындағы теңсіздіктерді қолданып, бағалайық

$$\left|\int_0^1 \gamma(y,t)v_{my}v_m dy\right| \le M_5\int_0^1 |v_{my}||v_m| dy \le M_5\left(\int_0^1 |v_{my}|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |v_m|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \le$$
$$\le \frac{M_1}{4}\int_0^1 |v_{my}|^2 dy + \frac{M_5^2}{M_1}\int_0^1 |v_m|^2 dy, \tag{16}$$

$$\left|\int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^p dy\right| \le b_1 2^{\frac{p-2}{2}}\|v_{my}\|^{\frac{p-2}{2}}_{L_2(0,1)}\|v_m\|^{\frac{p+2}{2}}_{L_2(0,1)} \le \frac{M_1}{4}\|v_{my}\|^2_{L_2(0,1)} + C_1\|v_m\|^{\frac{2(p+2)}{6-p}}_{L_2(0,1)},$$
$$C_1 = \frac{(6-p)(p-2)^{\frac{p-2}{6-p}}}{4M_1^{\frac{p-2}{6-p}}}\left(b_1 2^{\frac{p-2}{2}}\right)^{\frac{4}{6-p}},\ 2 < p < 6. \tag{17}$$

$$\left|\int_0^1 g(y,t)v_m dy\right| \le \left(\int_0^1 |g(y,t)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 |v_m|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}} \le \int_0^1 |v_m|^2 dy + \frac{1}{4}\int_0^1 |g(y,t)|^2 dy. \tag{18}$$

Алынған (16)-(18) бағалауларды (15) теңсіздікке қойсақ

$$\frac{d}{dt}\|v_m\|^2_{L_2(0,1)} + M_1\int_0^1 |v_{my}|^2 dy \le 2\left(1 + \frac{M_5^2}{M_1}\right)\int_0^1 |v_m|^2 dy + 2C_1\|v_m\|^{\frac{2(p+2)}{6-p}}_{L_2(0,1)} + \frac{1}{2}\int_0^1 |g|^2 dy, \tag{19}$$

Мынадай белгілеу енгізейік $y(t) \equiv \int_\Omega |v_m|^2 dx,\ C_2 = 2\left(1 + \frac{M_5^2}{M_1}\right)$, сонда (19) теңсіздік келесі түрде жазылады

$$\frac{dy(t)}{dt} \le C_2 y(t) + 2C_1[y(t)]^{\frac{2(p+2)}{6-p}} + M_5.$$

Тағыда мынадай белгілеу енгізейік $z(t) \equiv e^{-C_2 t}y(t)$ және 0 ден t дейін интегралдайық, сонда

$$z(t) \le z(0) + \frac{M_5}{C_2} + 2C_1\int_0^t e^{\frac{C_2(3p-2)}{6-p}s}[z(s)]^{\frac{2(p+2)}{6-p}} ds.$$

Енді алынған теңсіздіккеГронуолла-Беллман-Бихари [12] леммасын қолданайық, егер де

$$2C_1\left(e^{\frac{C_2(3p-2)}{6-p}t}-1\right)<\frac{1}{\left(z(0)+\frac{M_5}{C_2}\right)^{\frac{C_2(3p-2)}{6-p}}},\quad 0\le t<T,$$

шарты орындалғанда, онда келесі теңсіздік шығады

$$\int_\Omega |v_m|^2\,dx\le$$

$$\le\frac{\left(\|v_0(y)\|^2_{L_2(0,1)}+\frac{M_5}{C_2}\right)e^{C_2t}}{\left[1-\left(\|v_0(y)\|^2_{L_2(0,1)}+\frac{M_5}{C_2}\right)^{\frac{C_2(3p-2)}{6-p}}2C_1\left(e^{\frac{C_2(3p-2)}{6-p}t}-1\right)\right]^{\frac{6-p}{C_2(3p-2)}}},\tag{20}$$

Осы алынған теңсіздіктен мынадай қорытынды шағаруға болады, $T_0>0$ ақырлы саны бар болады және келесі бағалау

$$\text{барлық } t\in[0,T],\ T<T_0 \text{ үшін } \int_\Omega |v_m|^2\,dx+M_1\int_0^T\int_0^1|v_{my}|^2\,dydt\le C_3,\tag{21}$$

орындалады, мұндағы C_3 тұрақтысы $m\in N$ тәуелсіз.

Енді (7) теңдікті $C'_{mj}(t)$ көбейтіп $j=\overline{1,m}$ бойынша қосындылайық. Нәтижеде келесі теңдікті аламыз

$$\int_0^1|v_{mt}|^2\,dy+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\alpha(t)\int_0^1|v_{my}|^2\,dy\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\alpha'(t)\int_0^1|v_{my}|^2\,dy+\int_0^1\gamma(y,t)v_{my}v_{mt}dy+\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^p\,dy-$$

$$-\frac{1}{p}\int_0^1 b_{1t}(y,t)|v_m|^p\,dy+\int_0^1 g(y,t)v_{mt}dy.$$

Алынған теңдікті τ бойынша 0 ден t дейін интегралдайық, сонда келесі қатысты аламыз

$$\int_0^t\int_0^1|v_{m\tau}|^2\,dyd\tau+\frac{1}{2}\alpha(t)\int_0^1|v_{my}|^2\,dy=\frac{1}{2}\alpha(0)\int_0^1|v_{my}(y,0)|^2\,dy+$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t\int_0^1\alpha'(\tau)|v_{my}|^2\,dyd\tau+\int_0^t\int_0^1\gamma(y,\tau)v_{my}v_{m\tau}dyd\tau+\frac{1}{p}\int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^p\,dy-\tag{22}$$

$$-\frac{1}{p}\int_0^1 b_1(y,0)|v_m(y,0)|^p\,dy-\frac{1}{p}\int_0^t\int_0^1 b_{1\tau}(y,\tau)|v_m|^p\,dyd\tau+\int_0^t\int_0^1 g(y,\tau)v_{m\tau}dyd\tau,$$

(22) оң жағын бағалайық та, оларды (22) тепе-теңдікке қойсақ, келесі бағалауды аламыз

$$\int_0^T\int_0^1|v_{mt}|^2\,dydt+\frac{M_1}{2}\int_0^1|v_{my}|^2\,dy\le C_5.\tag{23}$$

Алынған (21) және (23) бағалаулардан (5)-(7) есебінің шешімі бойынша төмендегідей тұжырымдар айта аламыз

$$v_m \text{ шектелген } L_\infty(0,T;L_2(0,1)),\tag{24}$$

$$v_m \text{ шектелген} \overset{0}{W}{}_2^1(Q_T),\ Q_T = (0,T)\times(0,1), \quad (25)$$

$$v'_m \text{ шектелген } L_2(0,T;L_2(0,1)), \quad (26)$$

$$v_m \text{ шектелген } L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)). \quad (27)$$

p-ға қойылған шарттан

$$|v_m|^{p-2}v_m \text{ шектелген } L_\infty(0,T;L_{\frac{p}{p-1}}(0,1)),\ 2<p<6. \quad (28)$$

(20)-дан шығады, v_{m_k} тізбекшесі v_m тізбегі бар болады, *-кейбір $v\in L_\infty(0,T;L_2(0,1)))$ элементтеріне әлсіз жинақталады.

$$v_{m_k} \to v \text{ *-әлсіз } L_\infty(0,T;L_2(0,1))\text{-де.}$$

Солсияқты (21)-(24)-тенмына қатардың $\{v_{m_k}\}\subset\{v_m\}$ бар екендігішығады.

$$v_{m_k} \to v \text{ әлсіз } L_2(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,1))\text{-де,}$$

Реллих-Кондрашов теоремасы ([13] қараңыз) бойынша, $L_2(Q_T)$-де $\overset{0}{W}{}_2^1(Q_T)$ компакті. Бұл $v_{m_л}$ тізбекті $L_2(Q_T)$ нормасында $v_{m_k} \to v$ деп алуға болатынын білдіреді, демек барлық жерінде жинақтылықты білдіреді.

Жоғарыда келтірілген талдаулар (12)-де шекке көшуге мүмкіндік береді. Алдымен (12) теңдіктің әрбірін $d_j(t)\in C[0,T]$ көбейтіп және $j=\overline{1,m}$ бойынша алынған теңдіктің екі жағын қосамыз. Содан кейін 0 мен T аралығында t бойынша интегралдап аламыз

$$\int_0^1 v_{mt}\mu dy + \int_0^1 \alpha(t)v_{my}\mu_y dy - \int_0^1 \gamma(y,t)v_{my}\mu dy = \int_0^1 b_1(y,t)|v_m|^{p-2}v_m\mu dy + \int_0^1 g(y,t)\mu dy, \quad (29)$$

мұндағы $\mu(y,t)=\sum_{j=1}^m d_j(t)\psi_j(y)$.

Алынған қосындылар мен жинақтылықты ескере отырып, (29)-да $m\to\infty$ болғанда шекке көшіп және $v=\mu$ үшін (5)-ті аламыз. Барлық $\mu(x,t)$ функциялар жиыны $v\in\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$-да тығыз, онда барлық $v(x,t)\in\overset{0}{W}{}_2^{1,1}(Q_T)$ үшін шектік қатынастар орындалады.

Теорема 1. (8) шарт орындалсын, және $2<p<6$. Онда $(0,T),\ T<T_0$ интервалында (5)-(7) есептерінің $v(y,t)$ әлсіз жалпылама шешімі бар

$$v\in L_\infty(0,T;\overset{0}{W}{}_2^1(0,1)),\ |v|^{\frac{p}{2}}\in L_2(Q_T),\ Q_T=(0,T)\times(0,1),$$
$$v_t\in L_2(Q_T),\ |v|^{p-2}v\in L_\infty(0,T;L_{\frac{p}{p-1}}(0,1)).$$

Әлсіз жалпыланған шешімнің жалғыздығының дәлелдеуі. Айталық, (5)-(7) есептерінің екі шешімі бар: $v_1(y,t)$ және $v_2(y,t)$. Онда олардың айырымы $v(y,t)=v_1(y,t)-v_2(y,t)$ мына шартты $v(x,0)=0$ қанағаттандырады және

$$\int_0^T\int_0^1 v_t w dydt + \int_0^T\int_0^1 \alpha(t)v_y w_y dydt -$$
$$-\int_0^T\int_0^1 \gamma(y,t)v_y w dydt = \int_0^T\int_0^1 b_1(y,t)\left(|v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2\right)wdydt,$$

$v(y,t)\in L_2(0,T;W_2^1(\Omega))\cap L_\sigma(\Gamma)$ бойынша $w(y,t)$ қабылдауға болады $v(y,t)$, $w(y,t)=v(y,t)$ қоямыз

$$\int_0^T\int_0^1 v_t v dydt + \int_0^T\int_0^1 \alpha(t)|v_y|^2 dydt - \int_0^T\int_0^1 \gamma(y,t)v_y v dydt = \int_0^T\int_0^1 b_1(y,t)\left(|v_1|^{p-2}v_1 - |v_2|^{p-2}v_2\right)vdydt, \quad (30)$$

Келесі теңсіздікті қолданамыз

$$\left\| v_1 |^q v_1 - | v_2 |^q v_2 \right| \le (q+1)\left(| v_1 |^q + | v_2 |^q \right) | v_1 - v_2 | \text{ при } q > 0,$$
$$\left| \left(| v_1 |^q v_1 - | v_2 |^q v_2 \right)(v_1 - v_2) \right| \ge | v_1 - v_2 |^{q+2} \text{ при } q > 0.$$

Онда (30) келесі түрде жазылады

$$\frac{1}{2}\int_\Omega | v |^2 dx + M_1 \int_0^t \int_0^1 | v_y |^2 \, dydt \le \int_0^t \int_0^1 \gamma(y,\tau) v_y v dyd\tau + \int_0^t \int_0^1 b_1(y,\tau)\left(| v_1 |^{p-2} v_1 - | v_2 |^{p-2} v_2 \right) v dyd\tau. \quad (31)$$

Гельдер теңсіздігін қолданып, (31) теңсіздіктің оң жағын бағалайық

$$\left| \int_0^t \int_0^1 \gamma(y,\tau) v_y v dyd\tau \right| \le \frac{M_1}{4} \int_0^t \int_0^1 | v_y |^2 \, dyd\tau + \frac{M_3^2}{M_1} \int_0^t \int_0^1 | v |^2 \, dyd\tau,$$

$$\left| \int_0^t \int_\Omega b_1(y,\tau)\left(| v_1 |^{p-2} v_1 - | v_2 |^{p-2} v_2 \right) v dyd\tau \right| \le$$

$$\le b_1(p-1)\left(\left(\int_0^t \int_\Omega | v_1 |^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dyd\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} + \left(\int_0^t \int_\Omega | v_2 |^{\frac{2r(p-2)}{r-2}} dyd\tau \right)^{\frac{r-2}{2r}} \right) \left(\int_0^t \int_\Omega | v |^r dyd\tau \right)^{\frac{1}{r}} \left(\int_0^t \int_\Omega | v |^2 dyd\tau \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$2 < p < 2 + \dfrac{6}{m}$, $r = \dfrac{2m}{m-2}$, $m \in [2,\infty)$ қоямыз. Онда Соболев теоремасы бойынша $H^1(0,1) \subset L_r(0,1)$ и $H^1(0,1) \subset L_{2r(p-2)/(r-2)}(0,1)$. Бұл жағдайда $u_1(x,t)$ және $u_2(x,t)$ шешімнің бірегейлігін ескеріп, келесі теңсіздікті аламыз

$$\left| \int_0^t \int_\Omega b_1(y,\tau)\left(| v_1 |^{p-2} v_1 - | v_2 |^{p-2} v_2 \right) v dyd\tau \right| \le C_5 \int_0^t \int_0^1 | v |^2 \, dyd\tau + \frac{M_1}{4} \int_0^t \int_0^1 | v_y |^2 \, dyd\tau. \quad (32)$$

(32) қолданып, аламыз

$$\frac{1}{2}\int_\Omega | v |^2 dx + \frac{M_1}{2} \int_0^t \int_0^1 | v_y |^2 \, dydt \le \left(C_5 + \frac{M_3^2}{M_1} \right) \int_0^t \int_0^1 | v |^2 \, dyd\tau. \quad (33)$$

(33)-тенкелесітеңсіздікшығады

$$\int_\Omega | v |^2 dx \le 2\left(C_5 + \frac{M_3^2}{M_1} \right) \int_0^t \int_0^1 | v |^2 \, dyd\tau$$

Гронуолла-Беллман леммасына сәйкес, барлық $(0,T)$ уақыт интервалында $\int_\Omega | v |^2 dx = 0$ әкеледі, бұл әлсіз жалпылама шешімнің жалғыздығын білдіреді.

Теорема 2. (8) шарт орындалсын, және $2 < p < 2 + \dfrac{6}{m}$, $m \in [2,\infty)$. (5)-(7) есептерінің әлсіз жалпылама шешімі $(0,T)$ интервалында жалғыз.

Теорема 3. (8) шарт орындалсын, және $2 < p < 6$. Онда (5) - (7) бастапқы-шеттік есептің шешімі кейбір T уақытында бұзылады, мұндағы T шектелген T^*.

$$\int_{\Phi(0)}^{\infty} \frac{d\xi}{k_1 \xi^{\frac{p+2}{6-p}} + k_2} \le T^* \le T$$

Дәлелдеуі. Келесі функцияны қарастырайық

$$\Phi(t) = \int_0^l v^2 dx \cdot$$

Дифференциалдайық:

$$\frac{d\Phi}{dt} = 2\int_0^l v v_t dy = 2\int_0^l v\left(\alpha(t)v_{yy} + \gamma(y,t)v_y + b_1(y,t)|v|^{p-2} v + g\right)dy =$$
$$= -2\int_0^l \alpha(t)v_y^2 dy + 2\int_0^l \gamma(y,t)v_y v dy + 2\int_0^l b_1(y,t)|v|^p dy + 2\int_0^l gv dy. \qquad (34)$$

(34) теңдіктің оң жағын бағалап, одан келесі теңсіздік шығады

$$\frac{d\Phi}{dt} \le -2M_1\int_0^l v_y^2 dy + M_1\int_0^1 |v_y|^2 dy + \frac{M_3^2}{M_1}\int_0^1 |v|^2 dy +$$
$$+ M_1\|v_y\|^2_{L_2(0,1)} + C_1\|v\|^{\frac{2(p+2)}{6-p}}_{L_2(0,1)} + 2\int_0^1 |v|^2 dy + \frac{1}{2}\int_0^1 |g(y,t)|^2 dy. \qquad (35)$$

(35) теңсіздік

$$\frac{d\Phi}{dt} \le (1+C_1)\|v\|^{\frac{2(p+2)}{6-p}}_{L_2(0,1)} + M_5 + \left(2 + \frac{M_3^2}{M_1}\right)^{\frac{p+2}{2(p-2)}} \frac{2(p-2)}{(p+2)\left(\frac{p+2}{6-p}\right)^{\frac{6-p}{2(p-2)}}}. \qquad (36)$$

түрге келеді. Енді мынадай белгілеулер енгізейік

$$k_1 = 1 + C_1,\, k_2 = M_5 + \left(2 + \frac{M_3^2}{M_1}\right)^{\frac{p+2}{2(p-2)}} \frac{2(p-2)}{(p+2)\left(\frac{p+2}{6-p}\right)^{\frac{6-p}{2(p-2)}}}$$

Сонда (36) теңсіздікті ықшамды жазылуын аламыз

$$\frac{d\Phi}{dt} \le k_1[\Phi(t)]^{\frac{p+2}{6-p}} + k_2.$$

Алынған теңсіздікті интегралдайық

$$\int_0^t \frac{d\Phi(t)}{k_1[\Phi(t)]^{\frac{p+2}{6-p}} + k_2} \le t, \quad \int_{\Phi(0)}^{\Phi(t)} \frac{d\xi}{k_1\xi^{\frac{p+2}{6-p}} + k_2} \le t. \qquad (37)$$

(36) теңсіздіктен $t = T^*$ нүктесі табылады да

$$\int_{\Phi(0)}^{\infty} \frac{d\xi}{k_1\xi^{\frac{p+2}{6-p}} + k_2} \le T^* \le T$$

теңсіздігі кез келген $2 < p < 6$ үшін орындалады.

Шешімнің уақыт бойынша экспоненциалдық кемуі.

$Q_T = \{(y,t):\ 0 \le t < \infty,\ 0 < x < 1\}$ жолағында келесі квазисызықты теңдеу үшін бастапқы-шеттік есепті қарастырайық

$$v_t-\alpha(t)v_{yy}-\gamma(y,t)v_y+b_1(y,t)|v|^{p-2}v=g(y,t), \tag{38}$$

$$v(y,0)=v_0(y),\quad y\in(0,1), \tag{39}$$

$$v\big|_{y=0}=0,\ \ v\big|_{y=1}=0,\ \ 0<t<\infty. \tag{40}$$

Мұндағы $\alpha(t)=\dfrac{\mu}{\varphi^2(t)}$, $\gamma(y,t)=\dfrac{\varphi_1'(t)+y\varphi(t)}{\varphi(t)}$, $v_0(y)=u_0(\varphi_1(0)+y\varphi(0))$.

(38)-(40) есебінің коэффициенттері төмендегі шарттарды қанағаттандырсын

$$\begin{aligned}&0<M_1\le\alpha(t)\le M_2,\ \ \forall t\in[0,T],\\ &|\gamma(y,t)|\le M_3,\ \ \forall(y,t)\in Q_T,\ \ M_1>M_3,\\ &b_3\le b_1(y,t),\ \forall(y,t)\in Q_T.\end{aligned} \tag{41}$$

(38) теңдеуді $v(y,t)$ функциясына көбейтіп және y бойынша интегралдап аламыз

$$\rho'(t)+\alpha(t)\int_0^1|v_y|^2\,dy+\int_0^1 b_1(y,t)|v|^p\,dy=\int_0^1\gamma(y,t)v_yv\,dy+\int_0^1 g(y,t)v\,dy, \tag{42}$$

мұндағы $\rho(t)=\dfrac{1}{2}\|v\|^2_{L_2(0,1)}$.

(40) оң жағын бағалайық та, алынған нәтижелерді (42)-ге қойсақ

$$\rho'(t)+(M_1-M_3)\int_0^1|v_y|^2\,dy+\frac{b_3}{2}\int_0^1|v|^p\,dy\le C_1\int_0^1|g(y,t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dy, \tag{43}$$

мұндағы $C_1=\dfrac{2^{\frac{1}{p-1}}(p-1)}{b_3^{\frac{1}{p-1}}p^{\frac{p}{p-1}}}$.

Пуанкаре теңсіздігінен аламыз $\|u\|^2_{L_2(0,l)}\le\dfrac{l^2}{2}\|\nabla u\|^2_{L_2(0,l)}$. Онда біз табамыз

$$\rho'(t)+2(M_1-M_3)\int_0^1|v|^2\,dy+\frac{b_3}{2}\int_0^1|v|^p\,dy\le C_1\int_0^1|g(y,t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dy, \tag{44}$$

(42)-нің сол жағындағы тек екінші қосылғышты қолданып, мына жағдайды қарастырамыз

$$\int_\Omega|g|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\le C_g\exp(-\mu t),\ \ \mu\ge C_l,\ C_l=4(M_1-M_3). \tag{45}$$

(43) теңсіздікте (45)-ті қолдансақ, онда $\rho(t)$ функциясы үшін дифференциалдық теңсіздікті аламыз

$$\frac{d}{dt}\rho(t)+C_l\rho(t)\le C_1C_\varphi\exp(-\mu t).$$

Бұл теңсіздіктен аламыз

$$\rho(t)\le\exp(-C_lt)\left(\rho(0)+\frac{C_1C_\varphi}{\mu-C_l}\right),\quad \mu>C_l; \tag{46}$$

$$\rho(t)\le\exp(-C_lt)\big(\rho(0)+tC_1C_\varphi\big),\quad \mu=C_l. \tag{47}$$

Теорема 4. Мына шарт орындалсын $p>1$, $v_0\in L_2(0,1)$ және (45). Онда (38)-(40) есептің шешімі (46) немесе (47) қанағаттандырады.

Шешімнің ақырлы уақытта жойылуы. Мына жағдайды қарастырайық

$$1<p<2,\ \ \int_\Omega|g(y,t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dx\le C_g\left(1-\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}},\ \ \mu\in(0,1). \tag{48}$$

Енгізу теоремасынан ([14] қараңыз) келесі теңсіздік шығады

$$\|v\|_{L_2(0,1)} \le K_2 \|v_x\|^{\delta}_{L_2(0,1)} \|v\|^{(1-\delta)}_{L_p(0,1)},$$

мұндағы $\delta = \dfrac{2-p}{2+p} < 1,\ 0 < p < 2.$

$$\|v\|^2_{L_2(0,1)} \le K_2^2 \|v_x\|^{2\delta}_{L_2(0,1)} \|v\|^{2(1-\delta)}_{L_p(0,1)} = K_2^2 \left(\|v_x\|^2_{L_2(0,1)}\right)^{\delta} \left(\|v\|^p_{L_p(0,1)}\right)^{\frac{2(1-\delta)}{p}} \le$$

$$\le C_2 K_2^2 \left[\left(\|v_x\|^2_{L_2(0,1)}\right)^{\delta\left(1+\frac{2(1-\delta)}{p\delta}\right)} + \left(\|v\|^p_{L_p(0,1)}\right)^{\frac{2(1-\delta)}{p}\left(1+\frac{p\delta}{2(1-\delta)}\right)} \right] \le$$

$$\le C_3 \left(\|v_x\|^2_{L_2(0,1)} + \|v\|^p_{L_p(0,1)}\right)^{\delta + \frac{2(1-\delta)}{p}},$$

мұндағы $\delta + \dfrac{2(1-\delta)}{p} > 1$.

$$C_4 \left(\|u\|^2_{L_2(0,1)}\right)^{\mu} \le \|v_x\|^2_{L_2(0,1)} + \|v\|^p_{L_p(0,1)}, \tag{49}$$

мұндағы $\mu = \dfrac{p}{\delta p + 2(1-\delta)} < 1 \ \Leftrightarrow\ p < \delta p + 2(1-\delta),\ \delta p + 2(1-\delta) - p > 0 \ \Rightarrow 2p(2-p) > 0 \ \Rightarrow 0 < p < 2.$

(43) дифференциалдық теңсіздікте (49)-ды қолданып

$$\rho'(t) + C_5 \left(\int_0^1 |v_y|^2\,dy + \int_0^1 |v|^p\,dy \right) \le C_1 \int_0^1 |g(y,t)|^{\frac{p}{p-1}}\,dy,\ C_5 = \max\left\{ M_1 - M_3;\ \frac{b_3}{2} \right\}.$$

немесе

$$\frac{d}{dt}\rho(t) + C_6 [\rho(t)]^{\mu} \le C_g \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{\mu}{\mu-1}}. \tag{50}$$

Егер шарт орындалса

$$C_6 [\rho(0)]^{\mu} - \frac{\rho(0)}{t_0(1-\mu)} \le C_g, \tag{51}$$

онда (50) теңсіздіктің кез-келген теріс емес шешімі қанағаттандырады

$$\rho(t) \le \rho(0) \left(1 - \frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{\mu-1}}.$$

Осылайша дәлелденді.

Теорема 5. (48), (51) және $v_0 \in L_2(0,1)$ шарттары орындалсын. Онда (38)-(40) бастапқы-шеттік есептің шешімі t_0 уақытында нөлге айналады.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 Benia Y., Sadallah B.K. Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles // Electronic Journal of Differential Equations. -2016. -Vol. 2016. -№ 157. -P. 1-13.

2 Benia Y., Sadallah B.K. Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain // Electronic Journal of Differential Equations. -2018. -Vol. 2018. -№ 20. -P. 1-13.

3 Kheloufi A., Sadallah B.K. Parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-rectangular domain // Electronic Journal of Differential Equations. -2010. -Vol. 2010. -№ 25. -P. 1-14.

4 Labbas R., Medeghri A., Sadallah B.K. On a parabolic equation in a triangular domain // Applied Mathematics and Computation. -2002. -Vol. 230. -P. 511-523.

5 Калантаров В.К., Ладыженская О.А., "О возникновении коллапсов для квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов" // Зап. научн. сем. ЛОМИ. -1977. -Т.69. -С. 77–102.

6 Levine H.A., Park S.R., Serrin J. Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type // J. Differential Equations. -1998. -Vol.142(1). -P.212–229.

7 Samarskii A.A. Blow-up in quasilinear parabolic equations, books / A.A.Samarskii, V. Galaktionov, S. Kurdyumov, and A. Mikhailov. -Berlin: De Gruyter, 1995. -538 p.

8 Antontsev S. N., Shmarev S. A model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. -2005. -Vol. 60. -№3. -P. 515-545.

9 Antontsev S. N. Energy methods for free boundary problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, books / S. N. Antontsev, J.I. Dıaz and S. Shmarev. -Boston: Birkhauser Boston, Inc., 2002. -311 p.

10 Al'shin A.B. Blow-up in nonlinear Sobolev type equations, books / A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. Berlin: De Gruyter, Ser. Nonlinear Anal. Appl., 2011. -648 p.

11 Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости. М.: Наука, 1967.

12 Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Наука, 1972. 588 с.

13 Ладыженская О.А. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, монография / О.А. Ладыженская, В.А С олонников., Н.Н. Уральцева. -М.: Наука, 1967. -736 с.

References:

1 Benia Y., Sadallah B.K. (2016) Existence of solutions to Burgers equations in domains that can be transformed into rectangles. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2016.-№ 157. 1-13.

2 Benia Y., Sadallah B.K. (2018) Existence of solutions to Burgers equations in a non-parabolic domain. Electronic Journal of Differential Equations. Vol. 2018.-№ 20. 1-13.

3 Kheloufi A., Sadallah B.K.(2010) Parabolic equations with Robin type boundary conditions in a non-rectangular domain. Electronic Journal of Differential Equations.Vol. 2010. № 25.1-14.

4 Labbas R., Medeghri A., Sadallah B.K. (2002) On a parabolic equation in a triangular domain. Applied Mathematics and Computation. -Vol. 230. 511-523.

5 Kalantarov V.K., Ladyzhenskaja O.A., (1977) "O vozniknovenii kollapsov dlja kvazilinejnyh uravnenij parabolicheskogo i giperbolicheskogo tipov"[On the origin of collapses for quasilinear equations of parabolic and hyperbolic types]. Zap. nauchn. sem. LOMI. T.69. 77–102. (In Russian)

6 Levine H.A., Park S.R., Serrin J. (1998) Global existence and nonexistence theorems for quasilinear evolution equations of formally parabolic type. J. Differential Equations. Vol.142(1). 212–229.

7 Samarskii A.A (1995) Blow-up in quasilinear parabolic equations, books.A.A.Samarskii, V. Galaktionov, S. Kurdyumov, and A. Mikhailov. Berlin: De Gruyter, 538.

8 Antontsev S. N., Shmarev S.(2005) A model porous medium equation with variable exponents of nonlinearity: Existence, uniqueness and localization properties of solutions. Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. Vol. 60. №3. 515-545.

9 Antontsev S. N. (2002) Energy methods for free boundary problems, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, books. S. N. Antontsev, J.I. Dıaz and S. Shmarev. Boston: Birkhauser Boston, Inc.,.311.

10 Al'shin A.B.(2011) Blow-up in nonlinear Sobolev type equations, books. A.B. Al'shin, M.O. Korpusov, A.G. Sveshnikov. Berlin: De Gruyter, Ser. Nonlinear Anal. Appl. 648.

11 Demidovich B.P. (1967) Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti [Lectures on the mathematical theory of stability]. M.: Nauka. (In Russian)

12 Lions Zh.-L. (1972) Nekotorye metody reshenija nelinejnyh kraevyh zadach [Some methods for solving nonlinear boundary value problems]. M.: Nauka, 588. (In Russian)

13 Ladyzhenskaja O.A. (1967) Linejnye i kvazilinejnye uravnenija parabolicheskogo tipa, monografija[Linear and quasilinear equations of parabolic type, monograph]. O.A. Ladyzhenskaja, V.A Solonnikov., N.N. Ural'ceva. M.: Nauka,. 736. (In Russian)