МРНТИ 27.41.19
УДК 519.6

https://doi.org/10.51889/2959-5894.2023.81.1.005

Д.К. Койкелова[1], М.М. Букенов[1], А.Т. Рахымова[1], А.М. Канкенова[1]*

[1] Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
[*]e-mail: aigerim_rakhimova@mail.ru

ПОВЫШЕНИЕ ТОЧНОСТИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДЛЯ НЕСЖИМАЕМОЙ СРЕДЫ ПО РИЧАРДСОНУ

Аннотация

Целью исследования является повышение точности приближенного решения задачи теории упругости для несжимаемых сред с применением метода экстраполяции Ричардсона по параметру. Метод экстраполяции Ричардсона заключается в повышении порядка точности по параметру приближенного решения. Разностные схемы для статической и динамической задач теории упругости для сжимаемой среды хорошо изучены и исследованы, и для таких разностных схем апробированы различные экономичные численные алгоритмы. Для решения задач упругой несжимаемой среды применяется решение задач упругой сжимаемой среды при стремлении коэффициента Ляме к бесконечности, поскольку ранее в работах авторов настоящей работы получены асимптотические оценки близости этих решений не только на дифференциальном уровне, но и на разностном уровне.

Ключевые слова: несжимаемая среда, закон Гука, напряжение, деформация, перемещение, коэффициенты Ламе, задача Стокса, теория упругости, уравнение равновесия, односвязная область.

Аңдатпа

Д.К. Койкелова[1], М.М. Букенов[1], А.Т. Рахымова[1], А.М. Канкенова[1]
[1] Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, г. Астана, Қазақстан

РИЧАРДСОН БОЙЫНША СЫҒЫЛМАЙТЫН ОРТА ҮШІН ЖУЫҚ ШЕШІМДЕРДІҢ ДӘЛДІГІН АРТТЫРУ

Бұл зерттеудің мақсаты параметрге қатысты Ричардсон экстраполяция әдісін қолдана отырып, сығылмайтын орталар үшін серпімділік теориясы мәселесінің жуықтап шешімін дәлдігін арттыру болып табылады. Ричардсон экстраполяция әдісі параметр арқылы шешімнің дәлдік ретін арттырудан тұрады. Сығылатын орта үшін серпімділік теориясының статикалық, динамикалық есептерінің айырымдық схемалары зерттеген болатын және осы айырымдық схемалары үшін әртүрлі экономикалық сандық алгоритмдер саналған. Серпімді сығылмайтын орта есептерін шешу үшін Ляме коэффициенті шексіздікке ұмтылғанда серпімді сығылатын орта есебінің шешімі пайдаланылады, өйткені бұрын осы жұмыс авторларының еңбектерінде бұл шешімдердің жақындығы туралы, тек қана дифференциалды деңгейде емес, сонымен қатар айырымдық деңгейде, асимптотикалық бағалар алынған.

Түйін сөздер: сығылмайтын орта, Гук заңы, кернеулер, деформациялар, орын ауыстырулар, Ламе коэффициенттері, Стокс есебі, серпімділік теориясы, тепе-теңдік теңдеуі, бір байланысты аймақ.

Abstract

IMPROVING THE ACCURACY OF APPROXIMATE SOLUTIONS FOR AN INCOMPRESSIBLE MEDIUM ACCORDING TO RICHARDSON

Koikelova D.K. [1], Bukenov M.M. [1], Rakhymova A.T. [1], Kankenova A.M. [1]
[1] L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

The purpose of this study is to improve the accuracy of the approximate solution of the problem of elasticity theory for incompressible media using the Richardson extrapolation method with respect to a parameter. The Richardson extrapolation method consists in increasing the order of accuracy with respect to the parameter of the approximate solution. Difference schemes for static, dynamic problems of the theory of elasticity for a compressible medium are well studied and investigated and various economical numerical algorithms have been tested for these difference schemes. To solve the problems of an elastic incompressible medium, the solution of problem of an elastic compressible medium is used as the Lame coefficient tends to infinity, since earlier in the works of the authors of this study asymptotic estimates of the proximity of these solutions were obtained, not only at the differential level, but also at the difference level.

Keywords: incompressible medium, Hooke's law, stresses, strains, displacements, Lame coefficients, Stokes problem, elasticity theory, equilibrium equation, simply connected domain.

Введение

Известна аналогия течения вязкой несжимаемой жидкости с течением вязкой сжимаемой жидкости для упругой среды [1]. Согласно этой аналогии, любое решение уравнений теории упругости при коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}5\left(\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}\right)$ и любом модуле сдвига μ может быть интерпретировано как движение вязкой несжимаемой жидкости с вязкостью μ. (задача Стокса) [2-4].

Для решения задач упругой несжимаемой среды применяется решение упругой сжимаемой среды при $\lambda \to \infty$, поскольку ранее в работах [5-6] получены асимптотические оценки близости этих решений по параметру $1/\lambda$. В работах [5-6] приведена оценка близости решений этих задач, если $\bar{u},\ p$ - решение задачи Стокса, u^{λ}-решение задачи теории упругости для сжимаемой среды, то имеет место оценка $\left\|\bar{u}^{\lambda} - \bar{u}\right\|_{W_2^1(D)} + \left\|p - \lambda div\bar{u}^{\lambda}\right\|_{L_2(D)} \leq C \cdot \lambda^{-1}$, причем показано там же, что эта оценка не улучшаема по порядку λ.

В настоящей работе излагается использование метода экстраполяции Ричардсона по параметру $\frac{1}{\lambda}$, для построения приближенных решений с высоким порядком точности для несжимаемой среды. В настоящее время построение приближенных решений с высоким порядком точности является одной из актуальных задач вычислительной математики. Этот метод позволяет выполнять простейшие разностные аппроксимации дифференциальных задач, во-вторых, однородность осуществления алгоритмов на последовательности сеток с различными параметрами аппроксимаций, в-третьих простота логических приемов реализации всего алгоритма в целом. Разностные схемы для статической и динамической задач теории упругости для сжимаемой среды хорошо изучены и исследованы Самарским А.А., Коноваловым А.Н. и другими [7-8]. Для этих разностных схем апробированы различные экономичные численные алгоритмы. Для решения задач упругой несжимаемой среды применяются решения упругой сжимаемой среды при стремлении коэффициента Ляме $\lambda \to \infty$.

Разностные схемы, их реализация и обоснование сходимости хорошо изучены для упругой сжимаемой среды. Поэтому численная асимптотика позволяет решить задачу для несжимаемой среды. В этом случае за счет аппроксимации из [2] имеет место оценка $O(\lambda \cdot h)$, поэтому используется метод экстраполяции Ричардсона по *1/λ*. То есть, рассчитав k задач с $\lambda_k = \frac{1}{\lambda \cdot k},\ k = 1,2, \dots N+1$, построив линейный корректор, получим решение повышенного порядка точности $O(\lambda^{-(N+1)})$.

В ограниченной односвязной области $D \subset R^3$ с достаточно гладкой границей ɣ будем искать решение задачи теории упругости для несжимаемой среды, удовлетворяющей уравнению равновесия

$$\mu\Delta\bar{u} - \nabla p + \bar{f} = 0,\ x \in D, \tag{1}$$

условию не сжимаемости среды

$$\mathrm{div}\bar{u} = 0,\ x \in D, \tag{2}$$

соотношением перемещения -деформации

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), i, k = 1,2,3 \tag{3}$$

уравнениям состояния среды

$$\sigma_{ik} = -\delta_{ik} p + 2\mu\varepsilon_{ik} \tag{4}$$

где σ_{ik} –компоненты тензора напряжений, δ_{ik}– символ Кронекера, p- функция давления, ε_k-компоненты тензора деформаций, и граничным условием

$$\sum_{k=1}^{3} \sigma_{ik}\, n_k = 0, x \in ɣ \tag{5}$$

Задача (1)-(5) является статической задачей для несжимаемой среды, обозначим ее задача I.

Ее решение рассматривалась как предел в определенном смысле при $\lambda \to \infty$ решения $\bar{u}^{\lambda}$ задачи теории упругости для сжимаемой среды [6-7].

$$\mu\Delta\bar{u}^{\lambda}+(\lambda+\mu)+\nabla div\bar{u}^{\lambda}+\bar{f}=0,\ x\in D \qquad (6)$$

где компоненты тензоров деформаций и напряжений связаны законом Гука

$$\sigma_{ij}^{\lambda}=\delta_{ik}\lambda\theta^{\lambda}+2\mu\varepsilon_i^{\lambda},\ \ i,j=1,2,3 \qquad (7)$$

а $\theta=\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{kk},\lambda>0$-постоянная Ламе, такая, что $\nu=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$.

Задача (3), (5), (6), (7) является статической задачей для сжимаемой среды, назовем задачей II.

Как известно [7] условия разрешимости задачи II имеют вид

$$\int_D \bar{f}dx=0,\ \int_D rot\,\bar{f}dx=0, \qquad (8)$$

Для выделения ее единственного решения нужны дополнительные условия

$$\int_D \bar{u}dx=0,\int_D rot\,\bar{u}dx=0, \qquad (9)$$

В дальнейшем будем считать что, для задачи II выполнены условия (8),(9).

Как уже отмечалось во введении, использование итерационных методов с требуемой точностью приближения является в ряде случаев затруднительным. Из анализа оценок, полученной в [6],[7] следует, что

$$h=O(\lambda^{-3/2}),$$

а из [6] имеем

$$\left\|\bar{u}^{\lambda}-\bar{u}\right\|_{w_2^1(D)}^2+\left\|\lambda\mathrm{div}\bar{u}^{\lambda}-p\right\|_{L_2(D)}^2\leq O(\lambda^{-1})$$

где $\bar{u}^{\lambda}$-решение задачи II, $\bar{u},p$ -решение задачи I, если рассмотреть разностную аппроксимацию, то из [7] получим

$$\left\|\bar{u}_h^{\lambda}-\bar{u}^{\lambda}\right\|=O(\lambda\cdot h),$$

где $\bar{u}_h^{\lambda}$ - решение разностной задачи, соответствующей задаче II полагая что $h=O(\lambda^{-2})$, т.е. при фиксированном λ, шаг сетки h связан зависимостью последним соотношением.

В работе [11] показано, что решение динамической задачи теории упругости для несжимаемой среды, обозначим задача III

$$\frac{\partial^2\bar{u}}{\partial t^2}=\mu\Delta\bar{u}-\nabla p+\bar{f},\ x\in D,$$
$$\bar{u}|_{t=0}=\bar{u}_0(x),\ \left.\frac{\partial\bar{u}}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar{u}_1(x),\ x\in D$$
$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}(x,t)n_k=0,\ \ x\in\text{ɣ},\ \ t\in[0,\mathrm{T}] \qquad (10)$$

где $\sigma_{ik}=-\delta_{ik}p+2\mu\varepsilon_{ik}$.

Можно получить переходя к пределу при $\lambda\to\infty$, в решении динамической задачи теории упругости

$$\frac{\partial^2\bar{u}^{\lambda}}{\partial t^2}=\mu\Delta\bar{u}^{\lambda}+(\lambda+\mu)\nabla\mathrm{div}\bar{u}^{\lambda}+\bar{f},\ x\in D$$
$$\left.\bar{u}^{\lambda}\right|_{t=0}=\bar{u}_0(x),\left.\frac{\partial\bar{u}^{\lambda}}{\partial t}\right|_{t=0}=\bar{u}_1(x),\ x\in D$$
$$\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}^{\lambda}(x,t)n_k=0,x\in\text{ɣ},t\in[0,\mathrm{T}] \qquad (11)$$

Где

$$\sigma_{ik}^{\lambda}=-\lambda\delta_{ik}\mathrm{div}\bar{u}^{\lambda}+2\mu\varepsilon_{ik}^{\lambda}$$

(11) – является динамической задачей теории упругости для сжимаемой среды, обозначим задача IV, то в силу полученных там оценок

$$\left\|\bar{u}^{\lambda}-\bar{u}\right\|_{L_2(O,T;w_2^1(D))}=O(\lambda^{-1}), \tag{12}$$

Кроме того из аппроксимации динамической задачи теории упругости

$$\left\|\bar{u}_h^{\lambda}-\bar{u}^{\lambda}\right\|=O(\tau^{\alpha}+h^{\beta}). \tag{13}$$

Учитывая оценку (13), полагая что величины, входящие в последние оценки должны быть одного порядка получим ограничение на шаг по времени τ [11]. Решение статической задачи для несжимаемой среды ищутся в классе $\|U\|_{W_2^1(D)}$, и решение динамической задачи ищутся в классе $\|U\|_{W_2^{1,1}(D_T)}$.

Методы исследования

Применим метод Ричардсона [10] для повышения точности приближенного решения задачи I, используя решение задачи II при $\lambda\to\infty$, тогда $1/\lambda$ –можно считать малым параметром. Пусть $f(x)$ и граница γ достаточно гладкие, тогда решение задачи II достаточно гладкое. Предварительно докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 1. Для решения задачи II имеет место разложение

$$\bar{u}^{\lambda}=\sum_{k=0}^{N}\bar{u}_k(\tfrac{1}{\lambda})^k+(\tfrac{1}{\lambda})^{N+1}\,\bar{\omega}^{\lambda}, \tag{14}$$

$$p-\lambda div\,\bar{u}=0,$$

$$p=\sum_{k=0}^{N}p_k(\tfrac{1}{\lambda})^k+\pi_{\lambda}(\tfrac{1}{\lambda})^{N+1} \tag{15}$$

где обозначения $\bar{\omega}^{\lambda}=\bar{u}^{\lambda}-\bar{u}_k,\ \pi_{\lambda}=p-\lambda div\,\bar{u}^{\lambda}$ - из [6],[7],

$$\|\bar{u}_k\|_{W_2^1(D)}\le C<\infty, \tag{16}$$

$\bar{u}_k$-не зависит от λ, а функции $\bar{\omega}^{\lambda}$, π_{λ}таковы, что

$$\left\|\bar{\omega}^{\lambda}\right\|_{W_2^1(D)}+\|\pi_{\lambda}\|_{L_2(D)}\le C<\infty, \tag{17}$$

Доказательство. Пусть u_k является решением следующий задачи:
уравнение равновесия для несжимаемой среды

$$\mu\Delta\bar{u}_0-\nabla p_0+\bar{f}=0, x\in D,$$

условие несжимаемости

$$div\bar{u}_0=0,\ x\in D,\ T\bar{u}_0=0,\ x\in ɣ,$$

граничным условиям

$$T\bar{u}_0=\sum_{k=1}^{3}\sigma_{ik}\,n_k=0, x\in ɣ,$$

и условием единственности решения

$$\int_D\ \bar{u}_0\,dx=\int_D\ rot\,\bar{u}_0\,dx=0 \tag{18}$$

$$\mu\Delta\bar{u}_k-\nabla p_k=0, x\in D, p_{k-1}-div\bar{u}_k=0, x\in D$$

$$T\bar{u}_k=0, x\in ɣ,\ \ \int_D\ \bar{u}_k\,dx=0, \int_D\ rot\,\bar{u}_k\,dx=0,\quad k=1,2,\dots N,$$

где $T\bar{u}_k=\sum_{j=1}^{3}\sigma_{ij}^{k}(u_k)n_j\,,\ i=1,2,3$

с уравнением состояния

$$\sigma_{ij}^{k} = -\delta_{ij}p_k + 2\mu\varepsilon_{ij}^{k}, \qquad k = 1,2, \dots N$$

и с соотношением перемещения деформации

$$\varepsilon_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i^k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^k}{\partial x_i}\right), \ i,j = 1,2,3.$$

В силу задачи II, для $\overline{\omega}^{\lambda}, \pi_{\lambda}$ получаем следующие уравнения

$$\mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial \omega_j^{\lambda}}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_i^{\lambda}}{\partial x_i}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\pi_{\lambda} = 0, \ \ i = 1,2,3,$$

$$\pi_{\lambda} + \lambda\left(div\overline{\omega}^{\lambda} + p_N\right) = 0$$

$$\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial \omega_i^{\lambda}}{\partial x_j} + \frac{\partial \omega_j^{\lambda}}{\partial x_i} - \delta_{ij}\pi_{\lambda}\right)n_j = 0\,, x\epsilon\gamma \tag{19}$$

$$\int_D \overline{\omega}^{\lambda}\, dx = \int_D rot\overline{\omega}^{\lambda}\, dx = 0.$$

Из (19) умножая скалярно первое уравнение на функцию $\bar{v}$ имеем

$$\frac{1}{2}\ E\left(\overline{\omega}^{\lambda}, \bar{v}\right) - \int_D \pi_{\lambda} div\ \overline{\omega}^{\lambda}\, dx = 0, \tag{20}$$

здесь

$$E(\bar{u}, \bar{v}) = \frac{1}{2}\mu \int\limits_D \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right) dx$$

для произвольной функции $\bar{v}\epsilon W_2^1(D)$.

Полагая в (20) $\bar{v} = \overline{\omega}^{\lambda}$, получим

$$\frac{1}{2}\left\|\overline{\omega}^{\lambda}\right\|_{w_2^1(D)}^2 = \int_D \pi_{\lambda} div\overline{\omega}^{\lambda} dx, \tag{21}$$

Оценим правую часть (21), используя второе уравнение (19)

$$\left|\int_D \pi_{\lambda} div\overline{\omega}^{\lambda} dx\right| \leq \frac{1}{\lambda}\int_D \pi_{\lambda}^2 dx + \|p_N\| \cdot \|\pi_{\lambda}\| \tag{22}$$

с другой стороны

$$\|\pi_{\lambda}\| \leq \mathrm{C}\left\|\overline{\omega}^{\lambda}\right\|_{w_2^1(D)}, \tag{23}$$

откуда и следует, что

$$\|\pi_{\lambda}\|_{L_2(D)} + \left\|\overline{\omega}^{\lambda}\right\|_{w_2^1(D)} \leq \mathrm{C} < \infty$$

где *C*-постоянная независящая от λ что и требовалось.

Лемма 2. Если $p_{k-1}\epsilon L_2(D)$, *k=1,2,…N+1*, то для решения задачи (18) справедливы оценки

$$\|\bar{u}_k\|_{w_2^1(D)} \leq \mathrm{C} < \infty,$$

$$\|p\|_{L_2(D)} \leq \mathrm{C}\|p_{k-1}\|_{L_2(D)} \tag{24}$$

Доказательство. Решение задачи (18) удовлетворяет интегральному тождеству

$$\frac{\mu}{2}E(\bar{u}_k,\bar{v})-\int_D p_k div\bar{v}dx=0, \tag{25}$$

для произвольной функци $\bar{v}\in W_2^1(D)$.

В (25) положим $\bar{v}=\bar{u}_k$, тогда получим

$$\frac{\mu}{2}E(\bar{u}_k,\bar{u}_k)=\int_D p_k div\,\bar{u}_k dx, \tag{26}$$

$$\int_D p_k div\,\bar{u}_k dx=\int_D p_k p_{k-1}dx\le\|p_k\|.\|p_{k-1}\|, \tag{27}$$

Далее, предположим, что $\bar{v}$ является решением задачи

$$div\bar{v}=p_k,\ x\in D, \tag{28}$$

$$\bar{v}=[\mu_{n-1}\,(\gamma)]^{-1}{}_{(p_k,1)_D}\cdot\pi_\lambda,\ \text{на}\ \gamma, \tag{29}$$

поставляя в (25) $\bar{v}$, удовлетворяющее (28),(29) после несложных выкладок, приведенных в [6]

$$\|p_k\|^2\le C\|u_k\|_{w_2^1(D)}, \tag{30}$$

из (30), (26), (27) получим

$$\|u_k\|_{w_2^1(D)}+\|u_k\|_{w_2^1(D)}\|p_k\|_{L_2(D)}\le \mathrm{C}\|p_{k-1}\|_{L_2(D)}$$

Лемма доказана.

Пусть выполнены условия Леммы 1. Будем считать, $\bar{u}^{\lambda k}$ - решение задачи II, соответствующее параметру $\lambda_k=\frac{1}{\lambda\cdot k}$, k=1,2,...$N+1$, составим линейный корректор, следуя [10]

$$u^\lambda=\sum_{k=1}^{N+1}\gamma_k u^{\lambda_k}, \tag{31}$$

где $N>0$-целое

$$\gamma_k=\frac{(-1)^{N-k+1}\cdot K^{N+1}}{K!\,(N-K+1)!}.$$

Теорема 1. Пусть выполнены условия Леммы 1, тогда для решения задачи I $\bar{u}_0,\ p$ и функции u^λ, определенной соотношением (31) справедлива оценка

$$\left\|\bar{u}^\lambda-\bar{u}_0\right\|_{w_2^1(D)}+\left\|\lambda div\bar{u}^\lambda-p\right\|\le C\cdot\frac{1}{\lambda^{N+1}}, \tag{32}$$

с постоянной C-не зависящей от λ.

Доказательство. Используя разложения (14)-(16) для $k=1,2...N+1$ составим корректор, в результате получим

$$\bar{u}^\lambda=\bar{u}_0+\frac{1}{\lambda^{N+1}}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{\gamma_k}{k^{N+1}}\bar{\omega}^{\lambda_k}, \tag{33}$$

$$p^\lambda=p+\frac{1}{\lambda^{N+1}}\sum_{k=1}^{N+1}\frac{\gamma_k}{k^{N+1}}\pi_{\lambda_k}, \tag{34}$$

перенесем в левую часть равенств (33),(34) $\bar{\mathrm{u}}_0$ и р соответсвенно, взяв норму от обеих частей в пространств $w_2^1(D), L_2(D)$ и используя оценку (17), полагая

$$C=\sum_{k=1}^{N+1}\frac{|\gamma_k|}{k^{N+1}}$$

приходим к доказательству.

Применим метод экстраполяции Ричардсона к повышению точности приближенного решения задачи IV при $\lambda \to \infty$, тогда $1/\lambda$-малый параметр.

Теорема 2. Пусть выполнены условия, необходимые для получения оценки (11), следуя [10], тогда справедливы следующие разложения

$$\bar{u}=\bar{u}_0+\sum_{k=1}^{N}\bar{u}_k\cdot(\frac{1}{\lambda})^k+(\frac{1}{\lambda})^{N+1}\bar{\omega}^{\lambda}, \quad (35)$$

$$p^{\lambda}+\lambda div\bar{u}=0, \quad (36)$$

$$p^{\lambda}=p_0+\sum_{k=1}^{N}p_k\,(\frac{1}{\lambda})^k+(\frac{1}{\lambda})^{N+1}\pi_{\lambda}, \quad (37)$$

где $\bar{u}_k$, p_k не зависят от λ, $k=1,2,3,\ldots N$ и такие что выполняется

$$\|u_k\|_{W_2^{1,1}(D_T)}+\|\pi_{\lambda}\|_{L_2(D_T)}\leq \mathrm{C}<\infty, \quad (38)$$

и постоянная C- равномерно ограничена по $\frac{1}{\lambda}$.

$$D_T=D\times[0,T].$$

Доказательство. Пусть $\bar{u}_k$ - решение следующей задачи

$$\frac{\partial^2\bar{u}_0}{\partial t^2}=\mu\Delta\bar{u}_0+\mu\nabla div\bar{u}_0+\bar{f},\ (x,t)\in D_T$$

$$div\bar{u}_0=0,\ \sum_{j=1}^{3}[\mu(\frac{\partial u_0 j}{\partial x_i}+\frac{\partial u_0 i}{\partial x_i})\text{-}\ \delta_{ij}p]n_j=0,\quad x\in \gamma, t\in[0,\mathrm{T}]$$

……………………………………………………

$$\frac{\partial^2\bar{u}_k}{\partial t^2}=\mu\Delta\bar{u}_k+\mu\nabla div\bar{u}_k-\nabla p_k,\ (x,t)\in D_T$$

$$p_{k-1}+\lambda div\bar{u}_k=0,$$

$$\sum_{j=1}^{3}[\mu(\frac{\partial u_{kj}}{\partial x_i}+\frac{\partial u_{ki}}{\partial x_j})-\delta_{ij}p]n_j=0\,,\mathrm{x}\in\gamma, t\in[0,\mathrm{T}]$$

Пусть $p_{k-1t,}p_{k-1tt}\ \in L_2(D_T)$,умножим (39) на $\bar{u}_{kt}$ скалярно в $L_2(D)$, в результате получим

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}_{kt}\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\mu E(\bar{u}_k,\bar{u}_k)=-\int_D p_k p_{k-1}dx, \quad (40)$$

оценим правую часть (40)

$$\left|\int_D p_k p_{k-1}dx\right|\leq\|p_k\|\cdot\|p_{k-1}\|. \quad (41)$$

Дифференцируя (39) по t, умножим на $\bar{u}_{ktt}$ скалярно в $\mathrm{L}_2(\mathrm{D})$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\bar{u}_{ktt}\|_{L_2(D)}^2+\frac{1}{2}\mu\frac{d}{dt}E(\bar{u}_{kt},\bar{u}_{kt})=-\int_D p_{k-1t}p_{kt}dx \quad (42)$$

правую часть предоставим в виде

$$\int_D p_{kt}p_{k-1t}dx=-\frac{\partial}{\partial t}\int_D p_k p_{k-1t}dx+\int_D p_k p_{k-1tt}dx, \quad (43)$$

интегрируя (42) по t, используя (43), неравенство Гельдера и лемму Гроноулла будем иметь

$$\frac{1}{2}\|u_{ktt}\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \frac{1}{2}\mu\|u_{kt}\|^2_{w_2^1(D)} \le$$
$$C\left(\|p_k\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \|p_k\|_{L_2(D_T)}\right)\cdot\left(\|p_{k-1}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \|p_{k-1tt}\|_{L_2(D_T)}\right) + C_1 \qquad (44)$$

В силу (39) выводим оценку

$$\|p_{k-1}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))} \le \|u_{ktt}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \|u_k\|_{L_\infty\left(0,T;w_2^1(D)\right)} \qquad (45)$$

Из оценок (44), (45) следует

$$\|u_{ktt}\|_{L_\infty(0,T;L_2(D))} + \mu\|u_{kt}\|^2_{w_2^1(D)} \le C + \|p_{k-1tt}\|^2_{L_2(D_T)} < \infty. \qquad (46)$$

Следовательно, если данные задачи (39) достаточно гладкие, то для ее решения имеет место оценка (46) для любого ограниченного k=1,2,…,N. Пусть $u^{\lambda k}$-решение задач IV, соответствующие параметру $\lambda_k = \frac{1}{\lambda\cdot k}$, $k = 1,2,\dots,N+1$. Кроме того, пусть данные задачи IV достаточно гладкие и $\bar{f}$ - соленоидальный вектор, т.е. $div\bar{f} = 0$.

Теорема 3. Пусть выполнены условия Теоремы 2, тогда для решения задачи III, $\bar{u}_0$, p и для функции $\bar{V}$ такой что,

$$\bar{V} = \sum_{k=1}^{N+1}\gamma_k\bar{u}^{\lambda_k}, \text{ где } N > 0 \text{ - целое}$$

$$\gamma_k = (-1)^{N-k+1}k^{N+1}/(k!\,(N-k+1)!)$$

справедлива оценка

$$\|\bar{V} - \bar{u}_0\|_{w_2^{1,1}(D_T)} + \|\lambda div\bar{V} - p\| \le C\cdot\frac{1}{\lambda^{N+1}}, \qquad (47)$$

где постоянная C – не зависит от λ.

Доказательство Теоремы 3 аналогично доказательству Теоремы 2.

Обсуждение

Численное решения любой разностной схемы затруднено,поскольку приходится считать на достаточно мелких сетках, т.е. с шагами сетки порядка $h^2, h^3, \dots$, в этом случае массивы неограниченно возрастают, так как N-размерность массива по одной переменной есть величина аппроксимации $N = O\left(\frac{1}{h}\right), N_1 = O\left(\frac{1}{h^2}\right), \dots$, кроме того увеличивается память для хранения массивов, поэтому и применяется метод экстраполяции Ричардсона, позволяющий получить приближенное решение на мелких сетках, использующий «грубые» шаги сетки. Учитывая связь между шагами сетки τ, h получим и оценки для динамики.

Результаты

Полученная оценка (32) позволяет оценить решение исходной задачи для несжимаемой среды через решение упругой сжимаемой среды, получена аналогичная оценка (47)для динамической задачи теории упругости.

Заключение

Применяя эктраполяции Ричардсона по парамаетру $\frac{1}{\lambda}$, получаем приближенное решение для разностной задачи теории упругости для сжимаемых среды при $\lambda_k = \frac{1}{\lambda\cdot k}$, $k = 1,2,\dots N$ получим уточненное решение для несжимаемой среды на последовательности сеток. Отсюда можо сделать вывод прорешав к задач при $\lambda_k = \frac{1}{\lambda\cdot k}$, $k = 1,2,\dots N$ для сжимаемой среды мы сможем получить решение для несжимаемой среды с точностью $O\left(\frac{1}{\lambda^{N+1}}\right)$. Результаты получены для статической и динамической задач для несжимаемой среды.

Список использованных источников:

1 Bibly B.A., Eshelby I.D., Kundu A.K. The change of shape of a viscous ellipsoidal region embedded in a slowly deforming matrix hawing a different viscosity // Technophisics, 1975, V. 28, №4. –P. 265-274.

2 Babusca I., Aziz A.K. Lectures on the mathematical foundations of the finite-element method with applications. 1972. N.-Y. -359 p.

3 Гольдштейн Р.В. Применение интегральных уравнений для численного решение задач теории упругости и пластичности // Сб. "Численные методы механики сплошной среды", 1978, т.9, №5. –С. 37-69.

4 Валединский В.Д. Численное решение задачи теории упругости о контакте сжимаемой и несжимаемой сред // Вестник МГУ, Вычислительные методы и кибернетика, 1975, №2. –С. 3-12.

5 Валединский В.Д. Решение задачи о контакте упругой и несжимаемой сред // ДАН СССР, 1979, т.247, №3. –С. 536-540.

6 Букенов М.М., Адамов А.А., Койкелова Д.К. Приближение решения статической сжимаемой среды к решению несжимаемой среды // Вестник Карагандинского университета. Серия математика-№3(95). 2019. –С. 19-26.

7 Букенов М.М., Койкелова Д.К. Моделирование статической несжимаемой среды // Вестник Карагандинского университета. Серия математика-№4(96). 2019. –С. 39-44.

8 Коновалов А.Н. Численное решение задач теории упругости в напряжения. НГУ, 1968. – С. 239-270.

9 Коновалов А. Н. Динамическая задача теории упругости в постановке "скорость-напряжение" // Дифференциальное уравнения, т.35, №2, 1999. –С. 1-11.

10 Марчук Г.И., Шайдуров В.В. Повышение точности решений разностных схем. М.Наука. 1979. 318 с.

11 Koikelova D.K., Bukenov M.M., Kankenova A.M., Muratkhan R., Serikbayeva A.B. Asymptotic of solving a dynamic problem of elasticity theory for an incompressible medium // Journal of Theoretical and Applied Information Technology. 2022. Vol.100.No8. –P.2687-2695.

References:

1 Bibly B.A., Eshelby I.D., Kundu A.K. (1975) The change of shape of a viscous ellipsoidal region embedded in a slowly deforming matrix hawing a different viscosity.Technophisics. V. 28, №4. –P. 265-274.

2 Babusca, I., & Aziz, A.K. (1972). Lectures on the mathematical foundations of the finite-element method with applications. N.-Y. -359 p.

3 Gol'dshtejn R.V. (1978) Primenenie integral'nyh uravnenij dlja chislennogo reshenie zadach teorii uprugosti i plastichnosti [Application of integral equations for the numerical solution of problems of the theory of elasticity and plasticity]. Sb. "Chislennye metody mehaniki sploshnoj sredy". t.9, №5. –P. 37-69. (in Russian)

4 Valedinskij V.D. (1975) Chislennoe reshenie zadachi teorii uprugosti o kontakte szhimaemoj i neszhimaemoj sred [Numerical solution of the problem of elasticity theory on the contact of compressible and incompressible media]- Vestnik MGU, Vychislitel'nye metody i kibernetika. №2. –P. 3-12. (in Russian)

5 Valedinskij V.D. (1979) Reshenie zadachi o kontakte uprugoj i neszhimaemoj sred [Solution of the problem of contact between elastic and incompressible media]. DAN SSSR, T.247, №3. –P. 536-540. (in Russian)

6 Bukenov M.M., Adamov A.A., Kojkelova D.K. (2019) Priblizhenie reshenija staticheskoj szhimaemoj sredy k resheniju neszhimaemoj sredy. Vestnik Karagandinskogo universiteta. Serija matematika. №3(95). 2019. –P. 19-26. (in Russian)

7 Bukenov M.M., Kojkelova D.K. (2019) Modelirovanie staticheskoj neszhimaemoj sredy [Simulation of a static incompressible medium]. Vestnik Karagandinskogo universiteta. Serija matematika. №4(96).–P. 39-44. (in Russian)

8 Konovalov A.N. (1968) Chislennoe reshenie zadach teorii uprugosti v naprjazhenijah [Numerical solution of problems of the theory of elasticity in stress]. NGU. -P. 239-270. (in Russian)

9 Konovalov A. N. (1999) Dinamicheskaja zadacha teorii uprugosti v postanovke "skorost'-naprjazhenie" [Dynamic problem of the theory of elasticity in the formulation of "velocity-stress"]. Differencial'noe uravnenija. T.35, №2. –P. 1-11. (in Russian)

10 Marchuk G.I., Shajdurov V.V. (1979) Povyshenie tochnosti reshenij raznostnyh shem [Improving the Accuracy of Solutions to Difference Schemes]. M.Nauka. 318 p. (in Russian)

11 Koikelova D.K., Bukenov M.M., Kankenova A.M., Muratkhan R., Serikbayeva A.B. (2022) Asymptotic of solving a dynamic problem of elasticity theory for an incompressible medium. Journal of Theoretical and Applied Information Technology. Vol.100.No 8. –P. 2687-2695.