МРНТИ 27.25.19
УДК 519.63

https://doi.org/10.51889/2959-5894.2023.81.1.003

А.Б. Утесов [1], Г.И. Утесова[1]*

[1]Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан
[*]e-mail: adilzhan_71@mail.ru

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ КЛЕЙНА - ГОРДОНА

Аннотация

Цель исследования заключается в дискретизации (приближении) классических решений уравнения Клейна - Гордона, представимых в виде абсолютно сходящихся кратных функциональных рядов, и оценки погрешности дискретизации. Методология исследования основана на многочисленных аналогичных исследованиях из теории приближений. В исследовании получены следующие результаты: во-первых, выписан в явном виде точный порядок наименьшей погрешности дискретизации; во-вторых, доказано, что вычислительный агрегат, являющийся суммой тригонометрических полиномов, определенных на гиперболических крестах, реализует точный порядок; в-третьих, доказано, что любой вычислительный агрегат, построенный по N тригонометрическим коэффициентам Фурье начальных условий, не улучшает установленный точный порядок наименьшей погрешности дискретизации. Значимость данного исследования заключается в том, что сформулированная по полученным результатом теорема является новой в задачах дискретизации классических решений дифференциальных уравнений в частных производных.

Ключевые слова: уравнение Клейна-Гордона, дискретизация решений, вычислительный агрегат, коэффициенты Фурье, погрешность дискретизации, классы Коробова.

Аңдатпа

Ә.Б. Өтесов[1], Г.І. Өтесова[1]
[1]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

КЛЕЙН- ГОРДОН ТЕҢДЕУІНІҢ ШЕШІМДЕРІН ОПТИМАЛДЫ ДИСКРЕТТЕУ ТУРАЛЫ

Бұл зерттеудің мақсаты – Клейн- Гордон теңдеуінің абсолютті жинақталатын еселі функциялық қатарлар түрінде бейнеленетін классикалық шешімдерін дискреттеу (жуықтау) және дискреттеу қателігін бағалау. Зерттеу әдістемесі жуықтаулар теориясындағы осы тәрізді әдістемелерді негізге алған. Бұл зерттеуде келесі нәтижелерге қол жеткізілген: біріншіден, дискреттеудің ең кіші қателігінің дәл реті айқын түрде жазылған; екіншіден, гиперболалық крестерде анықталған тригонометриялық полиномдар қосындысы болатын есептеу агрегатының дәл ретті жүзеге асыратыны дәлеленген; үшіншіден, алғашқы шарттардың N тригонометриялық Фурье коэффициенттері бойынша құрылған кез келген есептеу агрегаты дискреттеудің ең кіші қателігінің айқындалған дәл ретін одан әрі жақсартпайтыны дәлелденген. Зерттеудің маңыздылығы алынған нәтижелер бойынша тұжырымдалған теореманың дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің классикалық шешімдерін дискреттеу есептеріндегі жаңа болуымен түсіндіріледі.

Түйін сөздер: Клейн- Гордон теңдеуі, шешімдерді дискреттеу, есептеу агрегаты, Фурье коэффициенттері, дискреттеу қателігі, Коробов кластары.

Abstract

ON THE OPTIMAL DISCRETIZATION OF SOLUTIONS OF THE EQUATION KLEIN - GORDON

Utessov A.B.[1], Utessova G.I.[1]
[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

The goal of this study is to discretize (approximate) classical solutions of Klein-Gordon equation, represented as absolutely convergent multiple functional series, and to estimate the discretization error. The research methodology is based on numerous similar studies from the theory of approximations. In this study, the following results were obtained: first, exact order of the smallest discretization error is explicitly written out; Secondly, it is proved that the computing unit, which is the sum of trigonometric polynomials defined on hyperbolic crosses, implements the exact order; thirdly, it is proved that any computing unit constructed according to the N trigonometric Fourier coefficients of initial conditions does not improve the established exact order of the smallest discretization error. The significance of this study lies in the fact that the theorem formulated according to the results obtained is new in the problems of discretization of classical solutions of partial differential equations.

Keywords: Klein- Gordon equation, discretization of solutions, computing unit, Fourier coefficients, discretization error, Korobov classes.

Введение

Пусть символом $u(x,t;\, f_1, f_2)$ обозначено классическое решение уравнения Клейна - Гордона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} - u \, (0 \le t < \infty, x = (x_1, \ldots, x_s) \in R^s) \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u(x,0) = f_1(x) \text{ и } \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = f_2(x). \tag{2}$$

При $f_1 \in E_s^{r_1}$ и $f_2 \in E_s^{r_2}$, где E_s^r – класс Коробова (см., например, в [1, с.29]), решение $u(x,t;\, f_1, f_2)$ представляет собой кратный ряд (см. приведенную ниже лемму 1))

$$\sum_{m \in Z^s} \left(\hat{f}_1(m) \rho'_m(t) + \hat{f}_2(m) \rho_m(t) \right) \exp(2\pi i(m,x)), \tag{3}$$

здесь и всюду ниже $\rho_m(t) = (4\pi^2 (m,m) + 1)^{-1/2} \sin\left(t\sqrt{4\pi^2 (m,m) + 1} \right)$. Поэтому возникает задача дискретизации (приближения) решения $u(x,t;\, f_1, f_2)$ конечным объектом и указании точности предложенного приближения. Ранее, эта задача изучалась в работах [2] и [3] в рамках постановки «Компьютерный (вычислительный) поперечник». Далее, в [4], следуя статьям [5, 6], была сформулирована задача оптимальной дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации объема N о начальных условиях и решена в метрике пространства $L^{\infty,\infty}$ при $f_1 \in H_2^{r_1}$ и $f_2 \in H_2^{r_2}$ (определения класса Никольского H_2^r и пространства $L^{q,\infty}$, где $r > 0, 1 \le q \le \infty$, см., например, [2]). В [7] дискретизация $u(x,t;\, f_1, f_2)$ была произведена по N_1 и N_2 числовой информации, полученной от начальных условий $f_1 \in H_2^{r_1}$ и $f_2 \in H_2^{r_2}$.

В постановке задачи дискретизации из [4] основным объектом изучения является величина

$$\delta_N(D_N, F_1, F_2)_Y = \min_{(N_1,N_2) \in A_N} \inf_{(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N) \in D_N} \delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y,$$

где $\delta_N((l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N), F_1, F_2)_Y = \sup\limits_{(f_1, f_2) \in F_1 \times F_2} \left\| u(\cdot;\, f_1, f_2) - (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)(\cdot;\, f_1, f_2) \right\|_Y$, F_1 и F_2 – классы функций, заданных на Ω_1 и Ω_2 соответственно, $Y -$ нормированное пространство функций, заданных на Ω_Y,

$l^{(N_1,N_2)} \equiv l^{(N_1,N_2)}(f_1, f_2) = (l_1^{(1)}(f_1), \ldots, l_1^{(N_1)}(f_1), l_2^{(1)}(f_2), \ldots, l_2^{(N_2)}(f_2)) -$ числовая информация объема $N = N_1 + N_2$ об функциях $f_1 \in F_1$ и $f_2 \in F_2$, которая снимается с функционалов $l_i^{(\tau)} : F_i \mapsto C (i = 1,2; \tau = 1, \ldots, N_i)$, $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1, \ldots, z_N; y) : C^N \times \Omega_Y \mapsto C -$ алгоритм переработки числовой информации $l^{(N_1,N_2)}$ такая, что при всяком фиксированном $(z_1, \ldots, z_N) \in C^N$ как функция от y принадлежит пространству Y, $(l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N) \equiv (l^{(N_1,N_2)}, \varphi_N)(\cdot;\, f_1, f_2) -$ вычислительный агрегат, действующий по правилу $\varphi_N(l_1^{(1)}(f_1),...,l_1^{(N_1)}(f_1),l_2^{(1)}(f_2),...,l_2^{(N_2)}(f_2);\cdot)$, $D_{(N_1,N_2)}$ – множество всех $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$, A_N – множество всех пар $(N_1,N_2)\in \mathrm{N}\times\mathrm{N}$ таких, что $N_1+N_2=N$, $D_N=\bigcup\limits_{(N_1,N_2)\in A_N} D_{(N_1,N_2)}$.

Всюду ниже через $C_k(\alpha,\beta,...)(k=0,1,2,...)$ обозначаются положительные величины, зависящие лишь от указанных в скобках параметров. При положительных A и B запись $A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B$ будет означать существование величины $C_k(\alpha,\beta,...)>0$ такой, что $A\le C_k(\alpha,\beta,...)B.$ А одновременное выполнение соотношений $A \underset{\alpha,\beta,...}{<<} B$ и $B \underset{\alpha,\beta,...}{<<} A$ записывается в виде $A \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} B.$

В рамках приведенных обозначений и определений задача оптимальной дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона вычислительными агрегатами, построенными по числовой информации объема N о начальных условиях, заключается в нахождении положительной последовательности $\{\psi_N\}_{N\ge 1}$, удовлетворяющей соотношению $\delta_N(D_N,F_1,F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} \psi_N$ и в указании такого вычислительного агрегата $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)\equiv(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot;f_1,f_2)$, для которого

$$\delta_N((\tilde{l}^{(N_1,N_2)},\tilde{\varphi}_N),F_1,F_2)_Y \underset{\alpha,\beta,...}{\succ\prec} \psi_N.$$

В настоящей работе в метрике пространства $L^{2,\infty}$ решена задача оптимальной дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации объема N о начальных условиях f_1 и f_2 из классов Коробова $E_1\equiv E_s^{r_1}$ и $E_2\equiv E_s^{r_2}$.

Методология исследования

Основной результат данной работы оформлен в виде теоремы. Доказательство этой теоремы опирается на следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Пусть даны действительные числа* $s(s=1,2,...)$, $r_1>3$ *и* $r_2>2.$ *Тогда для функций* $f_1\in E_1$, $f_2\in E_2$ *ряд (3) сходится абсолютно и является решением задачи (1) – (2).*

Доказательство леммы 1 проводится аналогично доказательству леммы 3.1 из [8, с. 55].

Лемма 2. *Пусть даны действительные числа* $\alpha_1\ge 0,\alpha_2\ge 0,$ $\beta_2>\beta_1>0$ *и определенная на множестве упорядоченных пар* (N_1,N_2) *натуральных чисел* N_1 *и* N_2 *функция*

$$T(N_1,N_2)=(\ln N_1)^{\alpha_1}N_1^{-\beta_1}+(\ln N_2)^{\alpha_2}N_2^{-\beta_2}.$$

Тогда существуют величины $C_3\equiv C_3(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)>0$ *и* $C_4\equiv C_4(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)\ge 2C_3$ *такие, что для каждого* $N=N_1+N_2\ge C_4$, *где* $\min\{N_1,N_2\}\ge C_3$, *имеет место соотношение*

$$\min_{(N_1,N_2)\in B_N} T(N_1,N_2) \underset{\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2}{\succ\prec} (\ln N)^{\alpha_1}N^{-\beta_1},$$

здесь $B_N=\{(N_1,N_2):N_1\ge \mathrm{C}_3,N_2\ge \mathrm{C}_3,N_1+N_2=N\}.$

Доказательство леммы 2 проводится следуя идеям леммы 2.4 из [8, с. 43 – 44]. Также используется лемма 3 из [9].

Лемма 3 (см.[10, с. 22]). *Пусть* $s(s=1,2,\ldots),\ d>0.$

Тогда $$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\le d} 1 \underset{s}{\succ\prec} d(\ln d)^{s-1}.$$

Лемма 4 (см. [1, с.125]). *При любых действительных* $\alpha>1$ *и* $t\ge 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1\ldots m_s\ge t}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^{\alpha}} \underset{\alpha,s}{<<} \frac{\ln^{s-1}t}{t^{\alpha-1}}.$$

Результаты исследования

Основным результатом данного исследования является теорема об оптимальной дискретизации решений уравнения Клейна – Гордона вычислительными агрегатами, построенными по точной числовой информации объема N о начальных условиях f_1 и f_2. Прежде чем сформулировать теорему, сначала приведем необходимые обозначения. Символом $|A|$ обозначается количество элементов конечного множества A. Как обычно, $[a]$ – целая часть числа a. Для каждого компонента $m_j\,(j=1,\ldots,s)$ вектора $m\in Z^s$ положим $\overline{m}_j=\max\{1,|m_j|\}$. Символом $\Phi_{(N_1,N_2)}$ будем обозначать множество всех вычислительных агрегатов $(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)$ с функцией φ_N и функционалами $l_i^{(\tau)}(f_i)=\hat{f}_i\left(m_i^{(\tau)}\right)\ (i=1,2;\tau=1,\ldots,N_i)$

Теорема. *Пусть даны действительные числа* $s(s=1,2,\ldots),\ r_1>3,\ r_2>r_1-1/s.$ *Тогда существуют величины* $C_1\equiv C_1(s,r_1,r_2)>0$ *и* $C_2\equiv C_2(s,r_1,r_2)\ge 2C_1$ *такие, что для каждого* $N=N_1+N_2\ge C_2$, *где* $\min\{N_1,N_2\}\ge C_1$, *имеет место соотношение*

$$\delta_N(\Phi_N,\, E_1,E_2)_{L^{2,\infty}} \underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec} N^{-(r_1-1/2)}\ln^{r_1(s-1)}N,$$

здесь Φ_N *– объединение всех* $\Phi_{(N_1,N_2)}$, *состоящих из всех пар* (N_1,N_2) *таких, что*

$N_1\ge C_1, N_2\ge C_1,\ N_1+N_2=N,$ *точный порядок* $\psi(N)=N^{-(r_1-1/2)}\ln^{r_1(s-1)}N$ *реализуется вычислительным агрегатом* $(\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N)$ *с функционалами* $(i=1,2)$

$$\tilde{l}_i^{(1)}(f_i)=\hat{f}_i\left(\tilde{m}_i^{(1)}\right),\ldots,\tilde{l}_i^{(\tilde{N}'_i)}(f_i)=\hat{f}_i\left(\tilde{m}_i^{(\tilde{N}'_i)}\right),\tilde{l}_i^{(\tilde{N}'_i+1)}(f_i)=\ldots=\tilde{l}_i^{(\tilde{N}_i)}(f_i)=0$$

и функцией $\tilde{\varphi}_N(z_1^{(1)},\ldots,z_1^{(\tilde{N}_1)},z_2^{(1)},\ldots,z_2^{(\tilde{N}_2)};x,t)=$

$$=\sum_{\tau=1}^{\tilde{N}'_1} z_1^{(\tau)}\rho'_{\tilde{m}_1^{(\tau)}}(t)\exp(2\pi i(\tilde{m}_1^{(\tau)},x))+\sum_{\nu=1}^{\tilde{N}'_2} z_2^{(\nu)}\rho_{\tilde{m}_2^{(\nu)}}(t)\exp(2\pi i(\tilde{m}_2^{(\nu)},x)),$$

где целые положительные числа $\tilde{N}_1$ *и* $\tilde{N}_2$, *подчиненные неравенству* $\min\{\tilde{N}_1,\tilde{N}_2\}\ge C_1$, *находятся из условия*

$$\min_{(N_1,N_2)}\left\{\frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln N_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{N_2^{r_2-1/2+1/s}}:N_1\ge C_1,N_2\ge C_1,N_1+N_2=N\right\}=$$

$$=\frac{(\ln\tilde N_1)^{r_1(s-1)}}{\tilde N_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln\tilde N_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{\tilde N_2^{r_2-1/2+1/s}},\qquad(4)$$

для каждого $i\in\{1,2\}$ *целое положительное число* $\tilde N_i'$ *определяется как количество элементов множества* $\Gamma_{n_i}=\{m=(m_1,...,m_s)\in Z^s:\overline{m}_1...\overline{m}_s\le 2^{n_i}\}$ *с положительным целочисленным индексом* $n_i=n_i(\tilde N_i,s)$, *удовлетворяющим неравенствам* $|\Gamma_{n_i}|\le\tilde N_i<|\Gamma_{n_i+1}|$, $s-$ *мерные целочисленные векторы* $\tilde m_i^{(1)},...,\tilde m_i^{(\tilde N_i')}$, $i\in\{1,2\}$ *такие, что* $\tilde m_i^{(\tau)}\ne\tilde m_i^{(\nu)}$ *при* $\tau\ne\nu$ *и* $\bigcup_{\tau=1}^{\tilde N_i'}\tilde m_i^{(\tau)}=\Gamma_{n_i}$.

Доказательство

При $\alpha_1=r_1(s-1)$, $\alpha_2=(r_2+1/s)(s-1)$, $\beta_1=r_1-1/2$, $\beta_2=r_2-1/2+1/s-1/2+1/s$ по лемме 2 существуют величины $C_{10}\equiv C_{10}(s,r_1,r_2)>0$ и $C_{11}\equiv C_{11}(s,r_1,r_2)\ge 2C_{10}$ такие, что для каждого $N=N_1+N_2\ge C_{11}$, где $\min\{N_1,N_2\}\ge C_{10}$, имеет место соотношение

$$\min_{(N_1,N_2)}\left\{\frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln N_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{N_2^{r_2-1/2+1/s}}:N_1\ge C_{10},N_2\ge C_{10},N_1+N_2=N\right\}\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\frac{(\ln N)^{r_1(s-1)}}{N^{r_1-1/2}}.\qquad(5)$$

Если применим лемму 2 при $\alpha_1=r_1(s-1)$, $\alpha_2=0$, $\beta_1=r_1-1/2$, $\beta_2=r_2-1/2+1/s$, то найдутся величины $C_{12}\equiv C_{12}(s,r_1,r_2)>0$ и $C_{13}\equiv C_{13}(s,r_1,r_2)\ge 2C_{12}$ такие, что для каждого $N=N_1+N_2\ge C_{13}$, где $\min\{N_1,N_2\}\ge C_{12}$, будет выполнено соотношение

$$\min_{(N_1,N_2)}\left\{\frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}+\frac{1}{N_2^{r_2-1/2+1/s}}:N_1\ge C_{12},N_2\ge C_{12},N_1+N_2=N\right\}\underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec}\frac{(\ln N)^{r_1(s-1)}}{N^{r_1-1/2}}.\qquad(6)$$

Далее, положим $C_1\equiv C_1(s,r_1,r_2)=\max\{C_{10},C_{12}\}$, $C_2\equiv C_2(s,r_1,r_2)=\max\{C_{11},C_{13}\}$ и будем рассматривать пары (N_1,N_2) такие, что $N_1\ge C_1,N_2\ge C_1,N_1+N_2=N$, где $N\ge C_2$.

В силу леммы 1 имеет место равенство

$$u(x,t;f_1,f_2)-(\tilde l^{(\tilde N_1,\tilde N_2)},\tilde\varphi_N)(x,t;f_1,f_2)=$$

$$=\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_1}}\hat f_1(m)\rho_m'(t)\exp(2\pi i(m,x))+\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_2}}\hat f_1(m)\rho_m(t)\exp(2\pi i(m,x)).\qquad(7)$$

Используя определение класса E_1 и неравенство $|\rho_m'(t)|\le 1, m\in Z^s$, имеем

$$\|\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_1}}\hat f_1(m)\rho_m'(t)\exp(2\pi i(m,\cdot))\|_{L^2}^2\le\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_1}}(\overline{m}_1...\overline{m}_s)^{-2r_1}.\qquad(8)$$

По заключениям лемм 3 и 4:

$$\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_1}} (\overline{m}_1...\overline{m}_s)^{-2r_1} \underset{s,r_1}{<<} \tilde{N}_1^{-(2r_1-1)}(\ln\tilde{N}_1)^{2r_1(s-1)},$$

откуда, согласно (8), следует

$$\|\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_1}} \hat{f}_1(m)\rho'_m(t)\exp(2\pi i(m,\cdot))\|_{L^2} \underset{s,r_1}{<<} \tilde{N}_1^{-(r_1-1/2)}(\ln\tilde{N}_1)^{r_1(s-1)}. \quad (9)$$

Поскольку для всех $m\neq 0$ справедливо неравенство $m_1^2+...+m_s^2\geq(\overline{m}_1...\overline{m}_s)^{2/s}$ (см., например, [1, с.189]), то, для каждого $t\in[0,+\infty)$ и $m\in Z^s$,

$$\left|\rho_m(t)\right|^2\leq(4\pi^2(m,m)+1)^{-1}\leq(\overline{m}_1...\overline{m}_s)^{-2/s}. \quad (10)$$

Используя определение класса E_2 и неравенство (10) получим

$$\|\sum_{m\in Z^s\setminus\Gamma_{n_2}} \hat{f}_2(m)\rho_m(t)\exp(2\pi i(m,\cdot))\|_{L^2} \underset{s,r_2}{<<} \tilde{N}_2^{-(r_2-1/2+1/s)}(\ln\tilde{N}_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}. \quad (11)$$

При любом $t\geq 0$ и $(f_1,f_2)\in E_1\times E_2$ из (7), (9) и (11) вытекает

$$\|u(\cdot,t;f_1,f_2)-(\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N)(\cdot,t;f_1,f_2)\|_{L^2} \underset{s,r_1,r_2}{<<} \frac{(\ln\tilde{N}_1)^{r_1(s-1)}}{\tilde{N}_1^{r_1-1/2}}+\frac{(\ln\tilde{N}_2)^{(r_2+1/s)(s-1)}}{\tilde{N}_2^{r_2-1/2+1/s}},$$

откуда, в силу определения пространства $L^{\infty,2}$ и произвольности пары $(f_1,f_2)\in E_1\times E_2$, а также соотношений (4) и (5), получаем

$$\delta_N((\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N),E_1,E_2)_{L^{\infty,2}} \underset{s,r_1,r_2}{<<} \frac{\ln^{r_1(s-1)}N}{N^{r_1-1/2}}. \quad (12)$$

Пусть даны натуральные числа $N_1\geq C_1$ и $N_2\geq C_1$, функция φ_N и функционалы $l_i^{(\tau)}(f_i)=\hat{f}_i\left(m_i^{(\tau)}\right)(i=1,2;\tau=1,...,N_i)$, и пусть $k_i\in N$ выбрано так, что $2^{k_i}k_i^{s-1}\underset{s}{\succ\prec}N_i$, $|\Gamma_{k_i}|\geq 2N_i,\ i\in\{1,2\}$.

Тогда для функции

$$g_1(x)=2^{-k_1r_1}\sum_{m\in G_{N_1}} e^{2\pi i(m,x)}\in E_1, \text{где } G_{N_1}=\Gamma_{k_1}\setminus\{m_1^{(1)},...,m_1^{(N_1)}\},$$

выполняются неравенства

$$\left\|g_1\right\|_{L^2}\geq 2^{-k_1r_1}\sqrt{|G_{N_1}|}\geq 2^{-k_1r_1}\sqrt{N_1}\underset{s,r_1}{>>}N_1^{-(r_1-1/2)}(\ln N_1)^{r_1(s-1)}. \quad (13)$$

Так как $\hat{g}_1\left(m_1^{(1)}\right)=0,\dots,\ \hat{g}_1\left(m_1^{(N_1)}\right)=0,$ то, с учетом включение $(g_1,0)\in E_1\times E_2$, получаем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in E_1\times E_2}\ \sup_{t\ge 0}\left\|u(\cdot,t;\ f_1,f_2)-(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot,t;f_1,f_2)\right\|_{L^2}\ge\left\|g_1\right\|_{L^2}.$$

Следовательно, в силу неравенства (13), имеем

$$\sup_{(f_1,f_2)\in E_1\times E_2}\left\|u(\cdot;f_1,f_2)-(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot;f_1,f_2)\right\|_{L^{\infty,2}}\underset{s,r_1}{>>}\frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}.$$

(14)

Если

$U_{N_2}=\{m\in Z^s:[N_2^{1/s}]\le m_i\le 7[N_2^{1/s}],i=1,\dots,s\}$, то $g_2(x)=\dfrac{1}{7^{sr_2}N_2^{r_2}}\sum\limits_{m\in G_{N_2}}e^{2\pi i(m,x)}$,

где $G_{N_2}=U_{N_2}\setminus\{m_2^{(1)},\dots,m_2^{(N_2)}\}$, принадлежит классу E_2 и имеют место неравенства

$$\left\|g_2\right\|_{L^2}\underset{s,r_2}{>>}N_2^{-r_2}\sqrt{|G_{N_2}|}\underset{s,r_2}{>>}N_2^{-r_2}\sqrt{N_2}\underset{s,r_2}{>>}N_2^{-(r_2-1/2)}. \tag{15}$$

Для всех $m\in G_{N_2}$ при $t_0=(21\pi\sqrt{s}N_2^{1/s})^{-1}$ справедливо $|\rho_m(t_0)|\underset{s}{>>}N_2^{1/s}$.

Так как

$$u(x,t_0;0,g_2)=\sum_{m\in G_{N_2}}\hat{g}_2(m)\rho_m(t_0)\exp(2\pi i(m,x)),$$

то $\left\|u(\cdot,t_0;0,g_2)\right\|_{L^2}^2=\sum\limits_{m\in G_{N_2}}|\hat{g}_2(m)|^2|\rho_m(t_0)|^2$, откуда, в силу (15) и $|\rho_m(t_0)|\underset{s}{>>}N_2^{1/s}$,

$$\left\|u(\cdot,t_0;0,g_2)\right\|_{L^2}\underset{s,r_2}{>>}N_2^{-(r_2-1/2+1/s)}. \tag{16}$$

Поскольку $\hat{g}_2\left(m_2^{(1)}\right)=0,\dots,\ \hat{g}_2\left(m_2^{(N_2)}\right)=0$ и $(0,g_2)\in E_1\times E_2$, то из неравенств

$$\sup_{(f_1,f_2)\in E_1\times E_2}\ \sup_{t\ge 0}\left\|u(\cdot,t;f_1,f_2)-(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot,t;f_1,f_2)\right\|_{L^2}\ge\left\|u(\cdot,t_0;0,g_2)\right\|_{L^2}$$

и (16) вытекает

$$\sup_{(f_1,f_2)\in E_1\times E_2}\left\|u(\cdot;f_1,f_2)-(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot;f_1,f_2)\right\|_{L^{\infty,2}}\underset{s,r_2}{>>}\frac{1}{N_2^{r_2-1/2+1/s}},$$

что совместно с (14) дает оценку

$$\sup_{(f_1,f_2)\in E_1\times E_2}\left\| u(\cdot;f_1,f_2)-(l^{(N_1,N_2)},\varphi_N)(\cdot;f_1,f_2)\right\|_{L^{\infty,2}} \underset{s,r_1,r_2}{>>} \frac{(\ln N_1)^{r_1(s-1)}}{N_1^{r_1-1/2}}+\frac{1}{N_2^{r_2-1/2+1/s}}.$$

Стало быть, поскольку функционалы $l_i^{(\tau)}(f_i)=\hat{f}_i\left(m_i^{(\tau)}\right)(i=1,2;\tau=1,\ldots,N_i)$ и функции φ_N произвольны, в силу соотношения (6) получим

$$\delta_N(\Phi_N,E_1,E_2)_{L^{\infty,2}} \underset{s,r_1,r_2}{>>} N^{-(r_1-1/2)}\ln^{r_1(s-1)}N. \tag{17}$$

Вследствие неравенств $\delta_N((\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N),E_1,E_2)_{L^{\infty,2}} \geq \delta_N(\Phi_N,E_1,E_2)_{L^{\infty,2}}$, (12) и (17),

$$\delta_N(\Phi_N,E_1,E_2)_{L^{\infty,2}} \underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec} \delta_N((\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N),E_1,E_2)_{L^{\infty,2}} \underset{s,r_1,r_2}{\succ\prec} \frac{\ln^{r_1(s-1)}N}{N^{r_1-1/2}}.$$

Теорема доказана.

Дискуссия

В доказанной выше теореме установлена оптимальность вычислительного агрегата $(\tilde{l}^{(\tilde{N}_1,\tilde{N}_2)},\tilde{\varphi}_N)$. Поэтому, проведенное в данной статье теоретическое исследование может быть, следуя работе [7], продолжено в рамках постановки задачи нахождения предельной погрешности оптимального вычислительного агрегата.

Заключение

Сформулированная и доказанная выше теорема является новым результатом в задачах дискретизации классических решений дифференциальных уравнений в частных производных, а также в теории приближений, численном анализе и вычислительной математике.

Список использованной литературы:

1 *Коробов Н.М. Теоретико-числовые методы в приближенном анализе. М., 1963.*

2 *Ibatulin, I.Z., Temirgaliev, N. On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of* $L^{2,\infty}$. *Differential Equations, 44(4), 510 – 526 (2008). https://doi.org/10.1134/S001226610804006X*

3 *Temirgaliyev, N., Sherniyazov, K.Y., Berikkhanova, M.Y. Exact orders of computational (numerical) diameters in problems of reconstructing functions and sampling solutions of the Klein-Gordon equation from Fourier coefficients. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282 (1), 165–191 (2013). https://doi.org/10.1134/S0081543813070109*

4 *Утесов А.Б., Утесова Г.И. Об оптимальной дискретизации в метрике* $L^{\infty,\infty}$ *решений уравнения Клейна -Гордона с начальными условиями из классов Никольского. Вестн. КазНИТУ. 2020. №4(140). С. 608 -616.*

5 *5 Abikenova, Sh. K., Temirgaliev, N. On the sharp order of informativeness of all possible linear functionals in the discretization of solutions of the wave equation. Differential Equations, 46(8), 1211–1214 (2010). https://doi.org/10.1134/S0012266110080148*

6 *Abikenova, Sh., Utesov, A., Temirgaliev, N. On the discretization of solutions of the wave equation with initial conditions from generalized Sobolev classes. Mathematical Notes, 91(3), 430 - 434 (2012). https://doi.org/10.1134/S0001434612030121*

7 *Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. Optimal Computing Units in the Problem of Discretizing Solutions of the Klein – Gordon Equation and Their Limit Errors. Differential Equations, 58 (5), 698 –711 (2022). https://doi.org/10.1134/S0012266122050093*

8 Абикенова Ш. К. Дискретизация периодических решений волнового уравнения с начальными условиями из классов $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega\, r}(0,1)^s$ и E_s^r : дис…. канд. физ.- мат. наук. Астана, 2010.

9 Утесов А.Б. Об оптимальном восстановлении функций из класса Коробова в рамках К(В)П постановки. Вестник КазНПУ им. Абая, серия «физико -математические науки», №2(70), 2020, стр. 115 – 121.

10 Темляков В.Н. Приближение функций с ограниченной смешанной производной. Труды МИАН СССР, 1986, т. 178, с. 3 – 113.

References:

1 Korobov N.M. (1963) Teoretiko - chislovye metody v priblizhennom analize [Numerical - theoretic methods in approximate analysis]. M. (In Russian)

2 Ibatulin, I.Z., Temirgaliev, N. (2008) On the informative power of all possible linear functionals for the discretization of solutions of the Klein-Gordon equation in the metric of $L^{2,\infty}$. Differential Equations, 44(4), 510 - 526. https://doi.org/10.1134/S001226610804006X

3 Temirgaliyev, N., Sherniyazov, K.Y., Berikkhanova, M.Y. (2013) Exact orders of computational (numerical) diameters in problems of reconstructing functions and sampling solutions of the Klein-Gordon equation from Fourier coefficients. Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics (Supplementary issues), 282 (1), 165–191. https://doi.org/10.1134/S0081543813070109

4 Utesov A.B., Utesova G.I. (2020) Ob optimal'noj diskretizacii v metrike $L^{\infty,\infty}$ reshenij uravnenija Klejna – Gordona s nachal'nymi uslovijami iz klassov Nikol'skogo [On the optimum discretization in metric $L^{\infty,\infty}$ of solutions of Klein-Gordon equations with initial conditions from Nikolsky's classes]. Vestn. KazNITU. №4(140). S. 608 – 616. (In Russian)

5 Abikenova, Sh.K., Temirgaliev, N. (2010) On the sharp order of informativeness of all possible linear functionals in the discretization of solutions of the wave equation. Differential Equations, 46(8), 1211–1214. https://doi.org/10.1134/S0012266110080148

6 Abikenova, Sh., Utesov, A., Temirgaliev, N. (2012) On the discretization of solutions of the wave equation with initial conditions from generalized Sobolev classes. Mathematical Notes, 91(3), 430-434. https://doi.org/10.1134/S0001434612030121

7 Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. (2022) Optimal Computing Units in the Problem of Discretizing Solutions of the Klein–Gordon Equation and Their Limit Errors. Differential Equations, 58 (5), 698–711. https://doi.org/10.1134/S0012266122050093

8 Abikenova Sh. K. (2010) Diskretizacija periodicheskih reshenij volnovogo uravnenija s nachal'nymi uslovijami iz klassov $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega\, r}(0,1)^s$ i E_s^r [Discretization of periodic solutions of the wave equation with initial conditions from classes $W_2^r(0,1)^s, W_2^{\omega\, r}(0,1)^s$ and E_s^r]: dis…. kand. fiz.- mat. nauk. Astana. (In Russian)

9 Utesov A.B.(2020) Ob optimal'nom vosstanovlenii funkcij iz klassa Korobova v ramkah K(V)P – postanovki [On optimal recovery of functions from the Korobov class in the framework of C(N)D - statement]. Vestnik KazNPU im. Abaja, serija «fiziko – matematicheskie nauki», №2(70), str. 115 –121. (In Russian)

10 Temljakov V.N. (1986) Priblizhenie funkcij s ogranichennoj smeshannoj proizvodnoj [Approximation of functions with a bounded mixed derivative]. Trudy MIAN SSSR, t. 178, s. 3 – 113. (In Russian)