ҒТАХР 27.31.21

10.51889/2959-5894.2024.88.4.003

А.А. Крыкпаева[1], Ж.Б. Байтуленов[2*]

[1]Д. Серікбаев атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті, Өскемен қ., Қазақстан
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан
[*]*e-mail: janibekbb@mail.ru*

НЬЮТОНДЫҚ ЕМЕС СҰЙЫҚТЫҚ ПІШІМІ ҮШІН ЖАЛҒАН АЙМАҚТАР ӘДІСІНІҢ МОДИФИКАЦИЯСЫ

Аңдатпа

Бұл жұмыста үшөлшемді шенелген аймақта ньютондық емес сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішімі үшін үлкен коэффициенттермен жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің бір модификациясы қарастырылады. Бұл модификация аз шамалы параметрге тәуелді және кеңейтілген(жалған) аймақта анықталған көмекші есеп түрінде берілген. Ал аталған ньютондық емес сұйықтық пішімі бастапқы есеп ретінде алынған. Жұмыстың мақсаты – көмекші есептің қандай да бір шешімдерінің бар болуы мен аз шамалы параметрдің нөлге ұмтылған кезінде бастапқы есептің сәйкес шешіміне жинақталуын дәлелдеу және шешімдердің жинақталу жылдамдығын алу. Сонымен, бұл жұмыста көмекші есептің жалпылама шешімінің бар болуы мен бастапқы есептің сәйкес жалпылама шешіміне жинақталуы дәлелденген. Ал күшті шешімдер үшін жалған аймақтар әдісінің «классикалық» түрімен салыстырғанда жоғары жинақталу жылдамдығы алынған. Мұнда негізгі зерттеу әдістемесі – априорлы баға алу, Галеркин әдістері.

Түйін сөздер: жалған аймақ, жалпылама шешім, априорлы бағалар, ньютондық емес сұйықтық, жинақталу жылдамдығы.

А.А. Крыкпаева[1], Ж.Б. Байтуленов[2]
[1]Восточно-Казахстанский технический университет им. Д. Серикбаева, г.Усть-Каменогорск, Казахстан
[2]Казахский национальный университет им. аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан

МОДИФИКАЦИЯ МЕТОДА ФИКТИВНЫХ ОБЛАСТЕЙ ДЛЯ МОДЕЛИ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ

Аннотация

В данной работе рассматривается модификация метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для нестационарной нелинейной модели неньютоновской жидкости в ограниченной трехмерной области. Данная модификация дается в виде вспомогательной задачи с малым параметром и в расширенной(фиктивной) области. А модель неньютоновской задачи рассматривается как исходная задача. Цель работы – доказать существование каких-либо решений вспомогательной задачи и их сходимость к соответствующим решениям исходной задачи при стремлении малого параметра к нулю. Здесь доказана существования обобщенного решения вспомогательной задачи и его сходимость к соответствующему решению исходной задачи. Вместе с тем, для сильного решения получена оценка скорости сходимости более высокого порядка, по сравнению с «классическим» вариантом метода фиктивных областей. Основные методы исследования – методы априорных оценок и Галеркина.

Ключевые слова: фиктивная область, обобщенное решение, априорная оценка, неньютоновская жидкость, скорость сходимости.

A.A. Krykpaeva[1], Zh.B. Baitulenov[2]
[1]D. Serikbayev East Kazakhstan technical university, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
[2]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

MODIFICATION OF THE FICTITIOUS DOMAIN METHOD FOR A NON-NEWTONIAN FLUID MODEL

Abstract

In this paper, we consider a modification of the fictitious domain method with continuation in terms of leading coefficients for a non-stationary nonlinear model of a non-Newtonian fluid in a limited three-dimensional domain. This modification is given as an auxiliary problem with a small parameter and in an extended (fictitious) region. And the model of the non-Newtonian problem is considered as the original problem. The purpose of this work is to prove the existence of any solutions of the auxiliary problem and their convergence to the corresponding solutions of the original problem as the small parameter tends to zero.

Here we prove the existence of a generalized solution of the auxiliary problem and its convergence to the corresponding solution of the original problem. At the same time, for a strong solution, an estimate of the rate of convergence of a higher order is obtained, in comparison with the "classical" version of the method of fictitious regions. The main research methods are the methods of a priori estimates and Galerkin.

Keywords: fictitious domain, generalized solution, a priori estimation, non-Newtonian fluid, rate of convergence.

Негізгі ережелер

Бұл жұмыстың негізгі идеясы – жалған аймақтар әдістерінің қандай-да бір артықшылықтары бар модификацияларын тұрғызу және негіздеу, оларды математикалық физиканың практикалық маңызы бар күрделі, сызықсыз пішімдеріне қолдану. Мұнда осындай бір β-модификация Олдройд түрлі ньютондық емес сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішіміне жалпылама функциялар кеңістігі үшін негізделеді. Бұл модификацияның артықшылығы – жалған аймақтар әдісінің белгілі түрлерімен салыстырғанда шешімдер үшін анағұрлым жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы алынған.

Кіріспе

Жалған аймақтар әдісі (ЖАӘ) математикалық физиканың маңызды есептеріне жиі қолданылатыны белгілі. Бұл әдіс бойынша қомақты мәліметтерді [1] жұмысынан табуға болады. ЖАӘ-нің теориялық негіздемесі, дербес жағдайда, шешімдердің жинақталу жылдамдығын алуды қамтиды. Сондықтан, неғұрлым жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығына ие жалған аймақтар әдісінің түрлерін жасау маңызды болып келеді. Осы бағыттағы жалған аймақтар әдісінің жаңа бір модификациясы алғаш рет [2] жұмысында ұсынылды. Мұнда шекарасы S болатын $\Omega \subset R^2$ аймағында берілген

$$\Delta \mathrm{v}(x) = f, \ \mathrm{v}\big|_S = 0.$$

сызықты эллиптикалық теңдеудің Дирихле есебі үшін үлкен коэффициенттер бойынша жалғастырылған жалған аймақтар әдісі шекарасы S_1 ($S_1 \cap S = \emptyset$) болатын $\Omega \supset D$ аймағында

$$div\left(K^\varepsilon(\mathrm{v}^\varepsilon)\nabla \mathrm{v}^\varepsilon\right) = f^\varepsilon, \ \mathrm{v}^\varepsilon\big|_{S_1} = 0, \qquad \left[\mathrm{v}^\varepsilon\right]_S = 0, \quad \left[K^\varepsilon(\mathrm{v}^\varepsilon)\frac{\partial \mathrm{v}^\varepsilon}{\partial n}\right]\Big|_S = 0, \quad \varepsilon > 0$$

$$K^\varepsilon(\mathrm{v}^\varepsilon) = \begin{cases} 1, & егер \quad x \in \Omega, \\ \dfrac{1}{\varepsilon \left\|\nabla \mathrm{v}^\varepsilon\right\|^\beta_{L_2(D_1)}}, 0 < \beta < 1, & \text{егер } x \in D_1 = D/\Omega, \end{cases} \quad f^\varepsilon = \begin{cases} 1, x \in \Omega, \\ 0, x \in D_1 \end{cases},$$

$[\cdot]|_S$ - S-тегі үйлесімділік шарты, көмекші есебі түрінде берілген (β - модификация). [2] жұмысында осы есеп үшін жалпылама шешімдерінің бар болу мен жинақтылығы дәлелденген, сонымен бірге шешімдер үшін

$$\left\| \mathrm{v}^{\varepsilon} - \mathrm{v} \right\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \le C\varepsilon^{1/(1-\beta)} \to \varepsilon^{\infty},\ \beta \to 1 \text{болса}$$

жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы алынған (авторлар оны «супержинақталу» деп атаған). Айта кетер жайт, $\beta = 0$ үшін бұл есеп ЖАӘ-нің «классикалық» түрін береді және онда «ең жақсы» жинақталу жылдамдығы

$$\left\| \mathrm{v}^{\varepsilon} - \mathrm{v} \right\|_{L_2(\Omega)} \le C\varepsilon .$$

болып табылады [3].

Енді бұл бағыттағы ілгері зерттеулер ЖАӘ-нің аталған β- модификациясын математикалық физиканың, оның ішінде гидродинамиканың, сызықсыз моделдеріне қолданып, шешімдердің ЖАӘ-нің басқа түрлеріне қарағанда анағұрлым тез жинақталатынын көрсетуді қажет етеді.

Бұл ұсынылып отырған жұмыста ЖАӘ-нің осы β-модификациясы Олдройд түрлі ньютондық емес сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішімі үшін қолдануы негізделеді, яғни қандай-да бір шешімдерінің бар болуы мен жинақталуы дәлеледеніп, сәйкес жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы алынады. Айта кетсек, ньютондық емес сұйықтықтың стационарлық сызықсыз пішімі үшін жалған аймақтар әдісінің осы модификациясының [4] жұмысында үлкен коэффициенттер, ал [5] еңбегінде кіші коэффициенттер бойынша жалғастырылған түрлері негізделген.

Зерттеу әдіснамасы

1. Бастапқы есептің қойылымы

Сонымен, $[0,T]\times\Omega$ аймағында, $R^3 \supset \Omega$ - шенелген, Олдройд түрлі ньютондық емес сығылмайтын сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз бір пішімін қарастырайық [6]:

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{v}_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)\mathrm{v}\right) + \nabla P = (1-\alpha)\Delta\mathrm{v} + \nabla\cdot S + f, \tag{1}$$

$$S + We\left(S_t + (\mathrm{v}\cdot\nabla)S\right) = 2\alpha D, \tag{2}$$

$$div\mathrm{v} = 0, \tag{3}$$

бастапқы-шекаралық шарттары

$$\mathrm{v}|_{t=0} = \mathrm{v}_0(x),\ S|_{t=0} = S_0(x),\quad \mathrm{v}|_G = 0, \tag{4}$$

мұнда: $t \in [0,T]$, $x \in \Omega$, $\mathrm{v} = \mathrm{v}(t,x)$– сұйықтықтың жылдамдық векторы, $P = P(t,x)$- қысымы, $S = S(t,x)$- кернеу тензорының серпімді бөлігі, $D = \left(\nabla\mathrm{v} + (\nabla\mathrm{v})^T\right)/2$ – деформация жылдамдығының тензорлық функциясы, $\mathrm{Re} = uL/\mu$ және $We = \lambda_1 u/L$ - сәйкес Рейнольдс және Венсенберг сандары, $\alpha = 1-\lambda_2/\lambda_1$ - сандық параметр, λ_1- релаксация уақыты, λ_2- кешігу уақыты, $0<\lambda_2<\lambda_1$. u, L- пішімнің мінездемелік жылдамдығы мен өлшемі, $f = f(t,x)$ - массалық күштер векторы.

[7] жұмысында (1)-(4) есебінің шешімділігі жалпылыма функциялар кеңістігінде жан-жақты зерттелінген. Ал [8] жұмысында (1)-(4) есебі үшін үлкен коэффициенттер бойынша

жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің шартты түрде «классикалық» деп аталатын түрі негізделген және күшті шешім үшін

$$\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}-\mathrm{v}\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}+\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}-\mathrm{v}\right\|_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)}+\left\|S^{\varepsilon}-S\right\|_{L_\infty(0,T;L_2(\Omega))}\le C\varepsilon^{1/2} \tag{5}$$

жинақталу жылдамдығы бағасы алынған.

Біздің жұмыста зерттелетін ЖАӘ-нің модификациясы үшін (5)-пен салыстырғанда анағұрлым жақсы баға алынады.

2. Көмекші есептің қойылымы

Жалған аймақтар әдісі идеясына сәйкес, (1)-(4) негізгі есебі үшін $[0,T]\times D_0$ аймағында, $D_0\supset\Omega$, келесі көмекші есеп түрінде берілген үлкен коэффициенттермен жалғастырылған ЖАӘ-нің бір модификациясын қарастырамыз:

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{v}_t^{\varepsilon}+\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)+\nabla P^{\varepsilon}=div\left(K^{\varepsilon}\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)+\nabla\cdot S^{\varepsilon}+f^{\varepsilon}, \tag{6}$$

$$S^{\varepsilon}+We\left(S_t^{\varepsilon}+\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)S^{\varepsilon}\right)=2\alpha D^{\varepsilon}, \tag{7}$$

$$div\mathrm{v}^{\varepsilon}=0, \tag{8}$$

$$\mathrm{v}^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\mathrm{v}_0(x),\ S^{\varepsilon}\big|_{t=0}=S_0(x),\quad \mathrm{v}^{\varepsilon}\big|_{G_1}=0, \tag{9}$$

шекарадағы үйлесімділік шарттары:

$$\left[\mathrm{v}^{\varepsilon}\right]_G=0,\ \left[K\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)\frac{\partial\mathrm{v}^{\varepsilon}}{\partial n}-P^{\varepsilon}n+S^{\varepsilon}\cdot n\right]\Bigg|_G=0,\ \left[S^{\varepsilon}\right]_G=0, \tag{10}$$

мұнда: $0<\beta<1$, G_1 - D_0 аймағының шекарасы, $G_1\cap G=\emptyset$, $\varepsilon>0$, $\mathrm{n}-G_1$ шекарасының нормаль векторы,

$$f^{\varepsilon}(t,x)=\begin{cases} f(t,x), \text{ егер } x\in\Omega\\ 0, \text{ егер } x\in D_1\end{cases}\qquad K^{\varepsilon}(\mathrm{v}^{\varepsilon})=\begin{cases}1-\alpha,\quad \textit{егер}\quad x\in\Omega,\\ \dfrac{1-\alpha}{\varepsilon\left\|\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}},\quad 0<\beta<1,\ \text{ егер }\ x\in D_1=D_0/\Omega,\end{cases}$$

Егер (6)-(10) есебінде $\beta=0$ деп алсақ, онда біздің есеп ЖАӘ-нің «классикалық» түрін береді[5]. Ары қарай қолданылатын $J(D_0)$ және $J^1(D_0)$ кеңістіктері [9] жұмысында сипатталған.

1-Анықтама. (6)-(10) көмекші есебінің жалпылама шешімі деп $\Phi(T,x)=0,\ \varphi(T,x)=0$ *болатын* $\Phi(t)\in C^1\left(0,T;J^1(D_0)\right)$ *вектор-функциясы мен* $\varphi(t,x)\in C^1\left(0,T;W_2^1(D_0)\right)$ *тензорлық функциясы үшін*

$$\int_0^T\Bigg\{\ \mathrm{Re}\left(\mathrm{v}^{\varepsilon},\Phi_t+\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\Phi\right)_{L_2(D_0)}-(1-\alpha)\left(\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon},\nabla\Phi\right)_{L_2(\Omega)}-\left(S^{\varepsilon}:\nabla\Phi\right)_{L_2(D_0)}+$$

$$+\left(f^{\varepsilon},\Phi\right)_{L_2(D_0)}+\frac{1-\alpha}{\varepsilon\left\|\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}}\left(\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon},\nabla\Phi\right)_{L_2(D_1)}\Bigg\}dt-\mathrm{Re}\left(\mathrm{v}_0(x),\Phi(0,x)\right)_{L_2(D_0)}=0, \tag{11}$$

$$\int_0^T \left\{ \left(S:\varphi\right)_{L_2(D_0)} - We\left(S:\left(\varphi_t + \left(\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\varphi\right)\right)_{L_2(D_0)} \right\} dt - \left(S_0, \varphi(0)\right)_{L_2(D_0)} - 2\alpha \int_0^T \left(D:\varphi\right)_{L_2(D_0)} dt = 0 \qquad (12)$$

интегралдық теңдіктерін қанағаттандыратын $S^\varepsilon(t,x)\in L_\infty\left(0,T;L_2\left(D_0\right)\right)$, $\mathrm{v}^\varepsilon(t,x)\in L_\infty\left(0,T;J\left(D_0\right)\right)\cap L_2\left(0,T;J^1\left(D_0\right)\right)$ *функциялар жұбын айтады.* Мұнда, мысалы:

$\left(S:\varphi\right)_{L_2(D_0)} = \int\limits_{D_0}\sum\limits_{i,j=1}^3 S_{ij}\cdot\varphi_{ij}dx$ - $L_2\left(D_0\right)$-дағы тензорлар жинағы, $\left(f^\varepsilon, \Phi\right)_{L_2(D_0)} = \int\limits_{D_0}\sum\limits_{i=1}^3 f_i^\varepsilon \Phi_i dx$ - $L_2\left(D_0\right)$-дағы векторлардың скаляр көбейтіндісі. (11) және (12)-дегі қалған мүшелері де осыған ұқсас анықталады.

2-Анықтама. (6)-(10) көмекші есебінің күшті шешімі деп (6)-(7) теңдеулер жүйесіне кіретін барлық дербес туындыларымен бірге квадратты қосындыланатын және (6)-(8) жүйесі мен (9)-(10)шеттік шарттарын $[0,T]\times D_0$ *-де сәйкес өлшем бойынша барлық жерде дерлік қанағаттандыратын* $\mathrm{v}^\varepsilon(t,x), S^\varepsilon(t,x), P^\varepsilon(t,x)$ *функциялар тобын айтады.*

Мұнда (1)-(4) есебінің де сәйкес шешімдері жоғарыдай анықталады.

3. Негізгі нәтижелер.

Бұл бөлімде көмекші (6)-(10) есебінің жалпылама шешімінің бар болуы мен негізгі (1)-(4) есебінің сәйкес жалпылама шешіміне жинақталуы дәлелдененді. Сонымен бірге, жоғарыда аталған есептердің күшті шешімдерінің жинақталу жылдамдығы алынады.

1-Теорема. Егер $f(t,x)\in L_2\left(0,T,L_{\frac{6}{5}}(\Omega)\right)$, $\mathrm{v}_0(x)\in J^1(\Omega)$, $S_0(x)\in C^1(\Omega)$ болса, онда (6)-(10) көмекші есебінің кем дегенде бір жалпылама шешімі бар болады және ол үшін

$$\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} + \left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right)} + \left\|S^\varepsilon\right\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} + \frac{1}{\varepsilon}\int_0^T \left\|\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)} dt \le C < \infty \qquad (13)$$

бағалаулары орын алады. Мұнда және кейін де әртүрлі C арқылы шешім мен ε параметрінен тәуелсіз универсалды оң мәнді тұрақтыларды жалпылай белгілейміз.

Дәлелдеуі. Алдымен, (6)-(10) есебі үшін (13) бағаларының алынуын көрсетейік. (6) теңдеуін $\mathrm{v}^\varepsilon(t,x)$ -ке $L_2\left(D_0\right)$-де скаляр көбейтіп, пайда болатын өрнектің мүшелерін (8)-(9) шарттарын ескере отырып жекеше қарастырамыз:

$$\mathrm{Re}\left(\mathrm{v}_t^\varepsilon, \mathrm{v}^\varepsilon\right)_{L_2(D_0)} = \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{D_0}\left(\mathrm{v}^\varepsilon\right)^2 dx = \frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D_0)},\ \mathrm{Re}\int_{D_0}\left(\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\nabla\right)\mathrm{v}^\varepsilon\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dx = 0,\ \int_{D_0}\nabla P^\varepsilon\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dx = 0,$$

$$\mathrm{Re}\int_{D_0} div\left(K^\varepsilon\left(\mathrm{v}^\varepsilon\right)\cdot\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right)\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dx = -\int_{D_0} K^\varepsilon\left(\mathrm{v}^\varepsilon\right)\left(\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right)^2 dx + \int_{G_1} K^\varepsilon\left(\mathrm{v}^\varepsilon\right)\cdot\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\cdot n\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dl =$$

$$= -(1-\alpha)\left\|\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega)} - \frac{(1-\alpha)}{\varepsilon}\left\|\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)},$$

$$\int_{D_0}\nabla\cdot S^\varepsilon\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dx = -\int_{D_0} S^\varepsilon : \nabla\mathrm{v}^\varepsilon dx.$$

Сонда біз

$$\frac{\mathrm{Re}}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(D_0)} + (1-\alpha)\left\|\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^2_{L_2(\Omega)} + \frac{1-\alpha}{\varepsilon}\left\|\nabla\mathrm{v}^\varepsilon\right\|^{2-\beta}_{L_2(D_0)} = \int_{D_0} f^\varepsilon\cdot\mathrm{v}^\varepsilon dx - \int_{D_0} S^\varepsilon : \nabla\mathrm{v}^\varepsilon dx \qquad (14)$$

теңдігін аламыз.

Ары қарай, (7) теңдеуін S^{ε} -ге көбейтіп, D_0 аймағында интегралдайық:

$$\left\|S^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_0)}^2+\frac{We}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left\|S^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_0)}^2=2\alpha\int_{D_0}D^{\varepsilon}:S^{\varepsilon}dx \tag{15}$$

Енді (14) пен (15) қосып, пайда болатын теңдіктің оң жағын Гельдер, Юнг, тиістілік теоремалары теңсіздіктерін және Гронуолл леммасын [9]-дағы сияқты қолдана отырып, (13) бағалауларын аламыз.

Сонымен бірге, $\mathrm{v}^{\varepsilon}(t,x)$ үшін (13) бағалауымен қоса келесі лемма орын алады:

Лемма. $\forall\delta\in(0,T-\delta)$ үшін

$$\int_0^{T-\delta}\left\|\mathrm{v}^{\varepsilon}(t+\delta)-\mathrm{v}^{\varepsilon}(t)\right\|^2dt\le C\delta^{\frac{1}{2}+\frac{1}{2-\beta}},\quad C=const>0 \tag{16}$$

Бұл лемманың дәлелдеуі де [9] сияқты жүргізіледі.

Теореманы ары қарай дәлелдеу үшін Галеркин әдісін қолданамыз[9]. (6)-(10) көмекші есебінің шешімдерін

$$\mathrm{v}_N^{\varepsilon}(t)=\sum_{j=1}^{N}\alpha_j^N(t)\omega_j(x) \tag{17}$$

түрінде іздейміз. Мұнда $\{\omega_j(x)\}$ - $L_2(D_0)$-де ортонормаланған $J^1(D_0)$ кеңістігінің базистік векторлары, ал $\alpha_j^N(t)$ скаляр функциялары

$$\begin{gathered}\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\mathrm{v}_N^{\varepsilon}}{\partial t}+\left(\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\mathrm{v}_N^{\varepsilon},\omega_j\right)_{L_2(D_0)}+(1-\alpha)\left(\nabla\mathrm{v}_N^{\varepsilon},\nabla\omega_j\right)_{L_2(\Omega)}+\\+\frac{1-\alpha}{\varepsilon\left\|\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}}\left(\nabla\mathrm{v}_N^{\varepsilon},\nabla\omega_j\right)_{L_2(D_1)}+\left(S^{\varepsilon}:\nabla\omega_j\right)_{L_2(D_0)}=\left(f^{\varepsilon},\omega_j\right)_{L_2(D_0)},\quad j=1,\ldots,N\end{gathered} \tag{18}$$

$$\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\big|_{t=0}=\sum_{j=1}^{N}\left(\mathrm{v}_0(x),\omega_j\right)\omega_j,\quad \text{яғни}\ \alpha_j^N\big|_{t=0}=\left(\mathrm{v}_0(x),\omega_j\right),$$

ал $S_N^{\varepsilon}(t,x)$ функциялары

$$S_N^{\varepsilon}+We\left(\frac{\partial S_N^{\varepsilon}}{\partial t}+\left(\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)S_N^{\varepsilon}\right)=2\alpha D_N^{\varepsilon},\quad S_N^{\varepsilon}\big|_{t=0}=S_0(x) \tag{19}$$

есебінен табылсын.

(17)-(19) есебінің шешімділігі [7] еңбегінде сияқты көрсетіледі. Ары қарай, (18)-ді $\alpha_j^N(t)$ көбейтіп $j=1,\ldots,N$ бойынша қосындыласақ және (19) S_N^{ε}-ге көбейтіп, сосын D_0-де интегралдаймыз да жоғарыдағы амалдарды қайталай отырып $\mathrm{v}_N^{\varepsilon}$, S_N^{ε} тізбектері үшін (13) бағалауларын аламыз. Сонымен бірге, $\mathrm{v}_N^{\varepsilon}$ үшін (15) бағалауы да орынды болады. Онда (13), (16) бағалаулары $\mathrm{v}_N^{\varepsilon}$, S_N^{ε} тізбектерінен $N\to\infty$ болғанда

$$\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\to\mathrm{v}^{\varepsilon}\ \text{* әлсіз}\ L_\infty(0,T;L_2(D_0))\text{-де},\ \nabla\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\to\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon}\ \text{әлсіз}\ L_2(0,T;L_2(\Omega))\text{-де},$$

$$\mathrm{S}_N^{\varepsilon}\to\mathrm{S}^{\varepsilon}\ \text{* әлсіз}\ L_\infty(0,T;L_2(D_0))\text{-де},\ \nabla\mathrm{v}_N^{\varepsilon}\to\nabla\mathrm{v}^{\varepsilon}\ \text{әлсіз}\ L_{2-\beta}(0,T;L_2(D_1))\text{-де}, \tag{20}$$

$v_N^\varepsilon \to v^\varepsilon$ күшті $L_2(0,T;L_2(D_0))$ -де жинақталатын тізбекшелер бөліп алуға болады. Ары қарай, [9] сияқты осы таңдап алынған тізбекшелер бойынша (18)-де және (19)-дің $\varphi(t,x)\in C^1(0,T;W_2^1(D_0))$-ге көбейтіліп D_0 бойынша интегралданған түрінде шекке көше отырып шектік v^ε, S^ε функцияларының (6)-(10) көмекші есебінің жалпылама шешімі екенін көруге болады. 1-теорема дәлелденді.

2-теорема. 1-теореманың барлық шарттары орындалсын, онда $\varepsilon\to 0$ болғанда (6)-(10) көмекші есебінің жалпылама шешімі (1)-(4) негізгі есебінің сәйкес жалпылама шешіміне жинақталады.

Дәлелдеуі. (13), (16) бағалауларынан v^ε, S^ε тізбектерінен $\varepsilon\to 0$ болғанда

$v^\varepsilon \to v$ * әлсіз $L_\infty(0,T;L_2(D_0))$-де, $\nabla v^\varepsilon \to \nabla v$ әлсіз $L_2(0,T;L_2(\Omega))$-де,

$$S^\varepsilon \to S \text{ * әлсіз } L_\infty(0,T;L_2(D_0))\text{-де}, \qquad v^\varepsilon \to 0 \text{ күшті } L_2(0,T;L_2(D_1))\text{-де}, \tag{21}$$

$v_N^\varepsilon \to v^\varepsilon$ күшті $L_2(0,T;L_2(D_0))$-де түрінде жинақталатын тізбекшелер бөліп алуға болады. Ары қарай, [9] сияқты сәйкес интегралдық теңдіктерде $\varepsilon\to 0$ шекке көше отырып, шектік $v(t,x)$, $S(t,x)$ функциялардың (1)-(4) негізгі есебінің жалпылама шешімі екенін көруге болады.

Енді біз (6)-(10) көмекші есебінің күшті шешімінің жинақталу жылдамдығын алуды көрсетейік. Келесі шарт орындалсын деп есептейік:

1- шарт. (1)-(4) және (6)-(10) есептерінің күшті шешімдері бар болсын және $\varepsilon\to 0$ болғанда (6)-(10) есебінің күшті шешімі (1)-(4) есебінің сәйкес күшті шешіміне жинақталсын. Сонымен бірге

$$v(t)\in L_2\left(0,T;W_2^2(\Omega)\cap H(\Omega)\right),\ v_t\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\ P(t)\in L_2\left(0,T;W_2^1(\Omega)\right),$$

$$S_t(t)\in L_2(0,T;L_2(\Omega)),\ S(t)\in L_2\left(0,T;W_3^1(\Omega)\right),\ v_x\in L_\infty(0,T;L_2(\Omega))$$

$$v^\varepsilon(t)\in L_2\left(0,T;W_2^2(D_0)\cap H(D_0)\right),\ v_t^\varepsilon(t)\in L_2(0,T;L_2(D_0)),\quad P^\varepsilon(t)\in L_2\left(0,T;W_2^1(D_0)\right),$$
$$v_x^\varepsilon\in L_\infty(0,T;L_2(D_0)),\quad S_t^\varepsilon(t)\in L_2(0,T;L_2(D_0)),\ S^\varepsilon(t)\in L_2\left(0,T;W_3^1(D_0)\right)$$

болсын.

3-теорема. *1-шарты орындалсын және $\varepsilon\to 0$ болғанда (6)-(10) көмекші есебінің күшті шешімі (1)-(4) негізгі есебінің сәйкес күшті шешіміне жинақталсын, онда олар үшін*

$$\|v^\varepsilon - v\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} + \|S^\varepsilon - S\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))} + \|\nabla v^\varepsilon - \nabla v\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} + \|S^\varepsilon - S\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))} \le C\varepsilon^{\frac{1+\beta}{2(1-\beta)}} \tag{22}$$

жинақталу жылдамдығы орын алады. (Мұнда $\beta\to 1$ үшін ε - аз шамалы параметрдің дәрежесі ∞ ұмтылады).

Дәлелдеуі. Алдымен (1) теңдеуін қандайда бір ψ : $div\psi=0,\ \psi|_{G_1}=0$ функциясына $L_2(\Omega)$-да скалярлы көбейтейік:

$$\mathrm{Re}\int_\Omega v_t\psi dx - \mathrm{Re}\int_\Omega((v\cdot\nabla)\psi v)dx + (1-\alpha)\int_\Omega \nabla v\cdot\nabla\psi dx - (1-\alpha)\int_G \frac{\partial v}{\partial n}\psi dl +$$
$$+\int_\Omega S:\nabla\psi dx - \int_G S\cdot n\cdot\psi dl + \int_G P\cdot n\cdot\psi dl - \int_\Omega f\psi dx = 0\,. \tag{23}$$

Сосын (6) теңдеуін де осы ψ -ге $L_2(D_0)$ -да скаляр көбейтеміз:

$$\operatorname{Re}\int_{D_0} \mathrm{v}_t^{\varepsilon}\psi dx - \operatorname{Re}\int_{D_0}\left(\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\psi \mathrm{v}^{\varepsilon}\right)dx + (1-\alpha)\int_{D_0}\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\psi dx + \int_{D_0} S^{\varepsilon}:\nabla\psi dx -$$

$$-\int_{D_0} f^{\varepsilon}\psi dx + \frac{1}{\varepsilon\left\|\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}-\nabla \mathrm{v}\right\|_{L_2(D_1)}^{\beta}}\int_{D_1}\left(\nabla \mathrm{v}^{\varepsilon}-\nabla \mathrm{v}\right)\cdot\nabla\psi dx = 0\,. \tag{24}$$

Енді $\mathrm{v}(t,x)$ пен $S(t,x)$-ті Ω-ның сыртына 0-мен жалғастыра және $\omega=\mathrm{v}^{\varepsilon}-\mathrm{v}$, $\theta=S^{\varepsilon}\text{-}S$, $\psi=\omega$ деп белгілей отырып (24) пен (23) айырымын қарастырамыз:

$$\frac{\operatorname{Re}}{2}\frac{d}{dt}\|\omega\|_{L_2(D_0)}^2 - \operatorname{Re}\int_{D_0}\left(\left(\omega\cdot\nabla\right)\omega \mathrm{v}^{\varepsilon}\right)dx + (1-\alpha)\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \int_{D_0}\theta:\nabla\omega dx -$$

$$-\int_G P\cdot n\cdot\omega\, dl + (1-\alpha)\int_G\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n}\omega dl + \int_G S\cdot n\cdot\omega dl + \frac{1-\alpha}{\varepsilon}\|\nabla\omega\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} = 0\,. \tag{25}$$

Ары қарай (7)-ні қандай да бір ϕ функциясына көбейтіп, D_0-де интегралдайық:

$$We\int_{D_0} S_t^{\varepsilon}:\phi dx + \int_{D_0} S^{\varepsilon}:\phi dx - We\int_{D_0}\left(\mathrm{v}^{\varepsilon}\cdot\nabla\right)\phi\cdot S^{\varepsilon}dx = 2\alpha\int_{D_0} D^{\varepsilon}:\phi dx\,, \tag{26}$$

Сосын (2)-ні де ϕ-ға көбейтіп, D_0-де интегралдаймыз:

$$We\int_{\Omega} S_t:\phi dx + \int_{\Omega} S:\phi dx - We\int_{\Omega}\left(\mathrm{v}\cdot\nabla\right)\phi\cdot S dx = 2\alpha\int_{\Omega} D:\phi dx\,, \tag{27}$$

Одан кейін v, S-ті Ω-дің сыртына нөлмен жалғастыра отырып, $\phi=\theta$ деп аламыз да, (26) пен (27) айырымынан

$$\frac{We}{2}\frac{d}{dt}\|\theta\|^2 + \|\theta\|^2 - We\int_{D_0}\left(\omega\cdot\nabla\right)\theta\cdot S dx = 2\alpha\int_{D_0}\left(D^{\varepsilon}-D\right):\theta dx\,. \tag{28}$$

теңдігін аламыз. Ары қарай (28)-ні 2α бөлеміз де (25)-пен қосамыз:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\operatorname{Re}\|\omega\|_{L_2(D_0)}^2 + \frac{We}{2\alpha}\|\theta\|_{L_2(D_0)}^2\right) + (1-\alpha)\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2\alpha}\|\theta\|_{L_2(D_0)}^2 + \frac{1-\alpha}{\varepsilon}\|\nabla\omega\|_{L_2(D_1)}^{2-\beta} =$$

$$= \frac{We}{2\alpha}\int_{D_0}\left(\omega\cdot\nabla\right)\theta\cdot S dx + \operatorname{Re}\int_{D_0}\left(\left(\omega\cdot\nabla\right)\omega \mathrm{v}^{\varepsilon}\right)dx - (1-\alpha)\int_G\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial n}\omega dl - \int_G S\cdot n\cdot\omega dl + \int_G P\cdot n\cdot\omega dl \tag{29}$$

(29)-дің оң жағын Гельдер теңсіздігін, тиістілік теоремалары[9] мен Юнг теңсіздігін қолданып бағалаймыз:

$$\frac{We}{2\alpha}\int_{D_0}\left(\omega\cdot\nabla\right)\theta\cdot S dx = -\frac{We}{2\alpha}\int_{\Omega}\left(\omega\cdot\nabla\right)S\cdot\theta dx \le \frac{We}{2\alpha}\|\nabla S\|_{L_3(\Omega)}\|\theta\|_{L_2(\Omega)}\|\omega\|_{L_6(\Omega)} \le$$

$$\le C_1\|\nabla S\|_{L_3(\Omega)}\|\theta\|_{L_2(\Omega)}\left(\|\omega\|_{L_2(\Omega)} + \|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}\right) \le C_2\|\theta\|_{L_2(D_0)}\|\nabla S\|_{L_3}\|\omega\|_{L_2(D_0)} + C_3\|\theta\|_{L_2(D_0)}\|\nabla S\|_{L_3}\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)} \le$$

$$\le \delta_1\|\theta\|_{L_2(D_0)}^2 + C_{1,\delta}\|\nabla S\|_{L_3}^2\|\omega\|_{L_2(D_0)}^2 + \delta_2\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_{2,\delta}\|\theta\|_{L_2(D_0)}^2\|\nabla S\|_{L_3}^2 \le$$

$$\le \frac{1}{8\alpha}\|\theta\|_{L_2(D_0)}^2 + \frac{1-\alpha}{8}\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_3\|\nabla S\|_{L_3(\Omega)}^2\left(\|\omega\|_{L_2(D_0)}^2 + \|\theta\|_{L_2(D_0)}^2\right),$$

$$\mathrm{Re}\int_{D_0}\left((\omega\cdot\nabla)\omega\mathrm{v}^{\varepsilon}\right)dx=\mathrm{Re}\int_{\Omega}(\omega\cdot\nabla)\omega\mathrm{v}\,dx\le \mathrm{Re}\|\mathrm{v}\|_{L_4(\Omega)}\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}\|\omega\|_{L_4(\Omega)}\le$$

$$\le C_4\sup_t\|\nabla\mathrm{v}\|\cdot\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}\left(\|\omega\|_{L_2(\Omega)}+\|\nabla\omega\|^{\frac{3}{4}}_{L_2(\Omega)}\|\omega\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(\Omega)}\right)\le C_5\|\nabla\omega\|_{L_2(\Omega)}\cdot\|\omega\|_{L_2(D_0)}+C_6\|\nabla\omega\|^{\frac{7}{4}}_{L_2(\Omega)}\|\omega\|^{\frac{1}{4}}_{L_2(D_0)}\le$$

$$\le\frac{1-\alpha}{4}\|\nabla\omega\|^2_{L_2(\Omega)}+C_7\|\omega\|^2_{L_2(D_0)}\le\frac{1-\alpha}{4}\|\nabla\omega\|^2_{L_2(\Omega)}+C_7\left(\|\omega\|^2_{L_2(D_0)}+\|\theta\|^2_{L_2(D_0)}\right),$$

$$I\equiv\int_G\left(P\cdot n-(1-\alpha)\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial n}-S\cdot n\right)\omega dl\le C_8\left(\left\|\frac{\partial\mathrm{v}}{\partial n}\right\|_{L_2(G)}+\|S\|_{L_2(G)}+\|P\|_{L_2(G)}\right)\|\omega\|_{L_2(G)}\le$$

$$\le C_9\left(\|\mathrm{v}\|_{W_2^2(\Omega)}+\|S\|_{W_2^1(\Omega)}+\|P\|_{W_2^1(\Omega)}\right)\|\nabla\omega\|_{L_2(D_1)}\le C_{10}A(t)\|\nabla\omega\|^{1/2}_{L_2(D_1)}\|\nabla\omega\|^{1/2}_{L_2(D_0)}\le$$

$$\le C_{10}A(t)\|\nabla\omega\|^{1/2}_{L_2(D_1)}\sup_t\|\nabla\omega\|^{1/2}_{L_2(D_0)}\le C_{10}A(t)\left(\|\nabla\omega\|^{1/2}_{L_2(D_1)}\varepsilon^{\frac{-1}{2-\beta}}\varepsilon^{\frac{1}{2-\beta}}\right),$$

мұнда $A(t)=\|\mathrm{v}\|_{W_2^2(\Omega)}+\|S\|_{W_2^1(\Omega)}+\|P\|_{W_2^1(\Omega)}$. Ары қарай, соңындағы, жақша ішіндегі өрнекке көрсеткіштері $p=(2-\beta)$, $q=\dfrac{2-\beta}{1-\beta}$ болатын Юнг теңсіздігін қолдансақ, онда $\forall\delta>0$ үшін $I\le C_{11}A(t)\left(\dfrac{\delta}{\varepsilon}\|\nabla\omega\|^{\frac{2-\beta}{2}}_{L_2(D_1)}+C_{12}\delta^{\frac{1}{\beta-1}}\varepsilon^{\frac{1}{1-\beta}}\right)$ бағалауын аламыз. Онда, жалпы жинақтай келе (29) –дан

$$\frac{d}{dt}\left(\|\omega\|^2_{L_2(D_0)}+\|\theta\|^2_{L_2(D_0)}\right)+\|\nabla\omega\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\theta\|^2_{L_2(D_0)}+\frac{1}{\varepsilon}\|\nabla\omega\|^{2-\beta}_{L_2(D_1)}-A(t)\frac{\delta}{\varepsilon}\|\nabla\omega\|^{\frac{2-\beta}{2}}_{L_2(D_1)}\le$$

$$\le C_{13}A(t)\delta^{\frac{1}{\beta-1}}\varepsilon^{\frac{1}{1-\beta}}+\left(C_8\|\nabla S\|^2_{L_3(\Omega)}+C_{11}\right)\left(\|\omega\|^2_{L_2(D_0)}+\|\theta\|^2_{L_2(D_0)}\right)$$

теңсіздігін аламыз.

Содан соң [10] сияқты амалдарды қайталай отырып

$$\|\omega\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))}+\|\theta\|^2_{L_\infty(0,T;L_2(D_0))}+\|\nabla\omega\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}+\|\theta\|^2_{L_2(0,T;L_2(\Omega))}\le C\varepsilon^{\frac{1+\beta}{2(1-\beta)}}$$

бағалауын, яғни (22) бағасын аламыз. 3-теорема дәлелденді.

Зерттеу нәтижелері

Мұнда Олдройд түрлі ньютондық емес сығылмайтын сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішімі үшін жалған аймақтар әдісінің β -модификациясында жалпылама шешімнің бар болуы мен жинақталуы дәлелденді. Дәлелдеу [9] жұмысында негізделген априорлы бағалау әдісі арқылы жүзеге асырылды. Сонымен бірге, бұл модификация үшін күшті шешімдердің жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы алынды.

Дискуссия

Бұл жұмыста Олдройд түрлі ньютондық емес сығылмайтын сұйықтықтың стационарлық емес сызықсыз пішімі үшін үлкен коэффициенттермен жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің β -модификациясын негіздеу барысында күшті шешімдер үшін $\beta\to 1$ болғанда ε - аз шамалы параметрдің дәрежесі ∞ ұмтылатын жинақталу жылдамдығы алынған. Аталған пішім үшін «классикалық» жалған аймақтар әдісі [8] жұмысында зерттелген және біз көрсеткен β - модификацияның $\beta=0$ дербес жағдайына сәйкес келеді, сонымен бірге, ондағы жинақталу жылдамдығындағы ε - аз шамалы параметрдің дәрежесі 0.5-тен көтерілмейтіні анықталған. Жалған аймақтар әдісі үшін үлкен дәрежелі жинақталу жылдамдығын алу маңызды болып келеді, себебі, дербес жағдайда, бұл әдісті есептеу математикасы тұрғысы бойынша практикалық іске асыру бағытында ұтымды алгоритмдерді тұрғызу үшін қажет. Сонымен бірге, бұл жұмыста ұсынылған β-модификация және ұсынылған әдістемелерді математикалық физиканың басқа да сызықсыз пішімдері үшін қолдануға болады.

Қорытынды

Бұл жұмыста шенелген 3-өлшемді аймақта ньютондық емес сығылмайтын сұйықтық қозғалысының сызықсыз стационарлық емес пішімі үшін үлкен коэффициентер арқылы жалғастырылған жалған аймақтар әдісінің бір модификациясының теориялық негіздемесі берілген. Мұнда жалған аймақтар әдісін сипаттаушы көмекші есептің жалпылама шешімінің бар болуы мен бастапқы физикалық есептің жалпылама шешіміне жинақталуы дәлелденген. Жалпылама шешімнің бар болуы жуық шешімдер тізбегін құрушы Галеркин әдісі арқылы жүзеге асады.

Жуық шешімдер үшін Гельдер, Юнг және тиістілік теоремалары теңсіздіктерін, сонымен бірге, компактылық леммасын қолдану арқылы қажетті функционалдық кеңістіктерде жоғарыдан бірқалыпты бағалар алынған. Бұл бағалар жуық шешімдер тізбегінен жинақталатын тізбекшелер бөліп алуға мүмкіндік береді, ал сосын осы тізбекшелердің шектері жалпылама шешім бола алатыны көрсетіледі. Сонымен бірге, жұмыста күшті шешімдер үшін жоғары дәрежелі жинақталу жылдамдығы алынған.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Вабищевич П.Н. Метод фиктивных областей в задачах математической физики. М.: Изд-во МГУ, 1991. - 156с.

[2] Kuttykozhayeva Sh., Danaev N., Smagulov S., Orunkhanov M. Superconvergence in the New Version Fictitious Domains Method // Abstracts of the First International Conference "Inverse Problems: Modelinq and Simulation" held on july 14-21. - Turkey, Fethiye, 2002. – pp. 52-56.

[3] Куттыкожаева Ш.Н. Метод фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса // Вестник КазГУ. Серия мат., мех., инф. - 1998. - №13. - С.54-59.

[4] Krykpayeva A., Baitulenov Zh. The modification of fictitious domain method for the model of fluid //Совместный выпуск по материалам Международной конференции "Вычислительные и информационные технологии в науке, технике и образовании" (CITech-2018), 25-28 сентября 2018 года.- Вестник ВКГТУ им. Д. Серикбаева, вычислительные технологии. - Т1. –Часть II. - Усть-Каменогорск – Новосибирск, 2018. –С.104-110.

[5] Baytulenov Zh. B. A modification of the method of fictitious domains for stationary model of non-Newtonian liquids // International Journal of Mathematics and Physics. – 2015. –Vol 6. -№2. – pp.16-22

[6] Guillope C, Saut J.-C. Resultats d'existence pour des fluides viscoelastiques a loi de comportement de type differentiel // C R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. Math. 1987. T. 305. pp. 489-492.

[7] Турганбаев М.Е. Фильтрация вязкоупругой жидкости типа Олдройда // Динамика сплошной среды. Вып. 108, 1994, с.80-97.

[8] Крыкпаева А.А. Применение и обоснование метода фиктивных областей для некоторых задач неоднородных жидкостей: Дис. канд. физ.-мат. наук. – Шымкент, 2002. – С.113-116.

[9] Антонцев С.Н., Кажихов А.В., Монахов В.Н. Краевые задачи механики неоднородных жидкостей. Новосибирск: Наука.-1983,-318с.

[10] Байтуленов Ж.Б. Модификация метода фиктивных областей с продолжением по старшим коэффициентам для нелинейной модели динамики жидкости // Вестник КазНПУ №1(21), 2008. С.52-56.

References

[1] Vabishevich P.N. (1991) Metod fiktivnyh oblastej v zadachah matematicheskoj fiziki [The method of fictitious domains in problems of mathematical physics]. Moscow: Publishing House of Moscow State University. -156.(In Russian)

[2] Kuttykozhayeva Sh., Danaev N., Smagulov S., Orunkhanov M. (2002) Superconvergence in the New Version Fictitious Domains Method // Abstracts of the First International Conference "Inverse Problems: Modelinq and Simulation" held on july 14-21. - Turkey, Fethiye, 52-56.

[3] Kuttykozhayeva Sh.N.(1998) Metod fiktivnyh oblastej dlja uravnenij Nav'e-Stoksa [Fictitious domain method for the Navier-Stokes equations] // Vestnik KazGU. serija mat., meh.,inf. - №13, 54-59. (In Russian)

[4] Krykpaeva A., Baitulenov Zh.(2018) The modification of fictitious domain method for the model of fluid //JOINT ISSUE based on the materials of the International Conference "Computing and Information Technologies in Science, Technology and Education" (CITech-2018), September 25-28, 2018.- Bulletin of d. serikbayev ekstu, computing technologies. - T1. –Part II. - Ust-Kamenogorsk – Novosibirsk, 104-110.

[5] Baytulenov Zh. B. (2015) A modification of the method of fictitious domains for stationary model of non-Newtonian liquids // International Journal of Mathematics and Physics. – Vol 6. -№2. 16-22.

[6] Guillope C, Saut J.-C. (1987) Resultats d'existence pour des fluides viscoelastiques a loi de comportement de type differentiel // C R. Acad. Sci. Paris. Ser. 1. Math. T. 305. 489-492.

[7] Turganbaev M.E. (1994) Fil'tracija vjazkouprugoj zhidkosti tipa Oldrojda [Filtration of viscoelastic fluid of Oldroyd type]//Dynamics of a continuous medium. Issue 108, 80-97. (In Russian)

[8] Krykpaeva A.A. (2002) Primenenie i obosnovanie metoda fiktivnyh oblastej dlja nekotoryh zadach neodnorodnyh zhidkostej [Application and justification of the method of fictitious domains for some problems of inhomogeneous fluids]: Diss. Candidate of Physical and Mathematical Sciences. – Shymkent, 113-116. (In Russian)

[9] Antontsev S.N., Kazhikhov A.V., Monakhov V.N. (1983) Kraevye zadachi mehaniki neodnorodnyh zhidkostej [Boundary value problems of mechanics of inhomogeneous fluids]. Novosibirsk: Nauka. - 318. (In Russian)

[10] Baitulenov Zh.B. (2008) Modifikacija metoda fiktivnyh oblastej s prodolzheniem po starshim kojefficientam dlja nelinejnoj modeli dinamiki zhidkosti [Modification of the method of fictitious regions with continuation by higher coefficients for a nonlinear model of fluid dynamics] // Vestnik KazNPU №1(21), 52-56. (In Russian)