МРНТИ 27.01.45
УДК 512.13

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.06

О.Д. Апышев[1], Р.О. Нурканова[2], Ф.С. Аменова[1]

[1]С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан,
[2]Әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

ПАРАМЕТРЛІК ЕСЕПТЕРГЕ ИНВАРИАНТТЫҚ ҚАСИЕТТЕРДІ ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Бұл мақалада параметрден тәуелді теңдеулер мен олардың жүйелерінің жалғыз шешімінің бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары зерттеліп, жан-жақты қарастырылды. Параметрлерден тәуелді есептердің шешімдерін табу элементарлық математиканың ең күрделі салаларының бірі деуге болады. Оларды шешу үшін арнаулы логикалық ойлауды қажет ететін амалдарды іздеп табу керек, олар қандай да бір қосымша шарттарды қанағаттандыруы тиіс, мысалы үшін, жалғыз шешімін анықтау, белгісіздердің барлық мүмкін мәндері жиынындағы шешімі, бір жүйенің барлық шешімдері екіншінің де шешімдері болатын жағдайлар және т.б. Мұндай жағдайлардың бірі - инварианттық қасиеттерді қолдану.

Мақалада осы инварианттық қасиеттерді қолдану арқылы бір параметрден тәуелді теңдеулер мен олардың жүйелерін шешудің әдіс-тәсілдері мысалдар арқылы жан-жақты қарастырылған. Түрлендірудің инварианттық қасиетінің бар болуынан ізделінді шешімнің оңай табылатындығын көруге болады.

Түйін сөздер: параметр, параметрден тәуелді теңдеулер мен олардың жүйелері, параметрден тәуелді есептердің шешімі, инварианттық қасиет, симметрия.

Аннотация

О.Д. Апышев[1], Р.О. Нурканова[2], Ф.С. Аменова[1]
[1]Восточно-Казахстанский государственный университет им. С. Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан,
[2]Казахский Национальный университет имени аль Фараби, г.Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ ИНВАРИАНТНЫХ СВОЙСТВ В ЗАДАЧАХ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ПАРАМЕТРА

В работе всесторонне рассмотрены задачи, зависящие от параметра. Исследованы необходимые и достаточные условия существования единственного решения уравнений и систем уравнений, зависящие от параметра. Нахождение решений задач, зависящие от параметров - является одной из самых сложных областей элементарной математики. Для их решения необходимо найти способы, требующие специального логического мышления, которые должны удовлетворять каким-либо дополнительным условиям, например, определить единственное решение, решение в наборе всех возможных значений неизвестных, случаи, когда все решения одной системы являются решениями другой и т.д. Одним из таких случаев является использование инвариантных свойств.

В статье с помощью различных примеров использования инвариантных свойств преобразований рассмотрены методы и приемы решения уравнений и систем уравнений, зависящие от одного параметра. В результате, из-за наличия инвариантных свойств преобразования видим, что искомое решение находится быстро и легко.

Ключевые слова: параметр, уравнения и системы уравнений, зависящие от параметра, решение задач, зависящие от параметра, инвариантное свойство, симметрия.

Abstract

APPLICATION OF INVARIANCE PROPERTIES IN PROBLEMS DEPENDING ON THE PARAMETER

Apyshev O.D. [1], Nurkanova R.O. [2], Amenova F.S. [1]
[1]S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan,
[2]al Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

In this paper, we comprehensively consider the problems that depend on the parameter. The necessary and sufficient conditions for the existence of a unique solution of equations and systems of equations that depend on the parameter are investigated. Finding solutions to equations and systems of equations that depend on parameters is one of the most difficult areas of elementary mathematics. To solve them, you need to find ways that require special logical thinking, which must satisfy some additional conditions, for example, to determine a single solution, a solution in a set of all possible values of unknowns, cases when all the solutions of one system are solutions of another, and so on. One of these cases is the use of invariant properties.

The article uses various examples of using invariant properties of transformations to consider methods and techniques for solving equations and systems of equations that depend on a single parameter. As a result, due to the presence of invariant properties of transformations, we see that the desired solution is found quickly and easily.

Keywords: equations and their parameter-dependent systems, solution of parameter-dependent problems, invariant property, symmetry.

Айнымалының коэффициенттері параметрмен (әріппен) берілген есептерді параметрлі есептер деп атайды. Параметрлі есептерді шешу үшін параметрдің қабылдайтын шексіз көп мәндеріне байланысты бір уақытта бірнеше есептерді шешуге тура келеді. Параметрмен байланысты есептер стандартты емес есептер қатарына жатады, сондықтан да оларды шешу үшін арнайы әдіс-тәсілдер қолданылатыны белгілі [1]. Арнаулы энциклопедияларда параметр деп (грекше perametron-өлшейтін) формулалар мен өрнектерге енетін көмекші айнымалы немесе тұрақты шаманы айтады. Жалпы, параметрдің сан мәні болып бұрыш, қисықтың ұзындығы, нақты сандар және басқа да скаляр шамалар бола береді.

Параметрден тәуелді есептерді шешу кезінде әдетте логикалық тұрғыдан да, техникалық жағынан да жеткілікті дәрежеде қиындықтар туындайды. Параметрлі есептерді шешу дегеніміз – параметрдің мүмкін болған мәндерінде берілген есептің барлық шешімдерінің жиынын табу деген сөз. Жалпы, мектеп курсында параметрді есептерді жеке-дара, бөліп-жарып оқытудың қажеті жоқ, әртүрлі элементарлық функциялардың көмегімен жасалған есептерді шығару кезінде «тамшылатып» қосып отырса, біздің пайымдауымызша, дұрыс сияқты. Себебі, тақырыпты осылай «шашыратып» берсе, біртіндеп қиындығы жоғары есептерді шешу жолдарын табудың тұрақты, берік дағдысы қалыптасуы әбден мүмкін [1,2].

Көптеген математикалық нысандар, әдетте, қандай да бір координаттар жүйесіне байланысты анықталады. Оның нәтижесінде анықталған функциялар қайсыбір жағдайларда координаттарын бір-бірімен орын ауыстырғанда немесе арнаулы түрлендірудің арқасында өзгермей, бастапқы берілген қалпын сақтап қалады. Функциялардың, өрнектердің, теңдеу немесе теңсіздіктердің және олардың жүйелерінің мұндай қасиеттерін инварианттық қасиеті бар деп айтады. Мақалада осы ұғымды басшылыққа ала отырып, параметрден тәуелді әртүрлі есептерді қарастырамыз. Көбінесе симметрия принципі маңызды орын алады, онда алдымен қажетті шартын анықтап алып, сол шарт есептің берілгеніне қойылып, жеткілікті болатын параметрдің мәндері жан-жақты зерттеледі.

Бір айнымалыда $x \Rightarrow \frac{1}{x}$, $x = -x$ ауыстыруына, екі айнымалыда $(x; y) \Rightarrow (-x; -y)$, $(x; y) \Rightarrow (x; -y)$, $(x; y) \Rightarrow (y; x)$, ал үш айнымалыда $(x; y; z), \Rightarrow (y; x; z)$ немесе $(x; y; z) \Rightarrow (-x; -y; z)$ ауыстыруларына байланысты инвариантты болғандықтан жалғыз шешімін табуға арналған мәселе кеңінен талқыланады. Қарастырылып отырған тақырыпқа арналған бірталай оқу құралдары, мақалалар баспасөз беттерінде жарық көрді. Олардың кейбіреуі әдебиеттер тізімінде келтіріледі [1-7].

Келтірілген мысалдардың барлығында параметрдің қандай да бір мәндерінде жалғыз шешімді анықтау туралы және ол шешімнің бар болуы жайлы сөз қозғалады.

1-мысал.

$$2x^2 - atg(cos\, cos\, x) + a^2 = 0 \quad (1)$$

теңдеуін шешейік [2].

Шешуі:

(1) теңдеуге белгісіз x екі $y = x^2$ және $y = cos\, cos\, x$ жұп функциялары арқылы еніп тұр. Сол себепті (1) теңдеуx айнымалысын $-x$-ке ауыстыруына байланысты инвариантты. Бұдан қандай да бір x теңдеудің шешімі болса, онда $-x$-те шешімі болар еді.

Олай болса (1) теңдеу жалғыз шешімге тек қана түбірлердің ішінде $x = 0$ болғанда ие бола алады. Бұл – қажетті шарт. Жалпы $x = 0$ басқа да түбірлері болуы мүмкін.

Егер түбірлердің арасында $x = 0$ болмаса, онда түбірлердің жиыны бір элементті бола алмайды (ол не бос жиын, немесе $x \wedge -x$ деген екі түбірден тұрады). $x = 0$ санын (1) апарып қойсақ, ол теңдеудің шешімдері: $a_1 = 0 \wedge a_2 = tg1$.

Егер $a = 0$ болса (1) теңдеу $x = 0$ деген шешімге ие болады, яғни $a = 0$ мәнін есептің жауабына енгізу керек.

Егер $a = tg1$ болса, (1) теңдеу $2x^2 + tg^2 1 = tg1 \cdot tgcosx$ түріне енеді.

Енді $-1 \leq cosx \leq 1$ болғандықтан $[-1; 1]$ аралығында тангенс функциясының өспелі болатындығын ескеріп, бір жағынан $tg1 \cdot tg\, cosx \leq tg^2 1$, ал екінші жағынан $2x^2 + tg^2 1 \geq tg^2 1$

қатынасын аламыз, онда (1) теңдеу $\{2x^2 + tg^2 1 = tg^2 1 \ \ tg1 \cdot tg\, cosx = tg^2 x$ жүйесіне эквивалентті, сондықтан жалғыз шешімі болып $x = 0$ табылады. ***Жауабы:*** $a \in \{0; tg1\}$.

2-мысал. $cos^2(ax) + cosx = 2[cos\, cos\,(ax) \ + cosx - 1]$ теңдеуін шешейік [2].

Шешуі:

Косинус функциясының жұп болуынан берілген теңдеу x-ті $-x$-ке алмастырсақ симметриялы, жалғыз шешімнің бар болуын $x = 0$ теңдігі қамтамасыз етеді (қажетті шарт). Теңдеуге қойсақ, $\forall a$ үшін орындалатынын көреміз.

Сол себепті берілген теңдеу жалғыз$x = 0$ шешімге ие болатын параметр a-ның мәндерін тапсақ жеткілікті. Берілген теңдеуді

$$cos^2(ax) - 2\, cos\, cos\,(ax) \ - cosx + 2 = 0 \qquad (2)$$

түрінде жазсақ, $cos\, cos\,(ax)$-ке қарағанда квадраттық, дискриминанты $D = 4(cosx - 1) \leq 0 \Rightarrow (2)$ теңдеудің накты шешімдері тек сол $cosx = 1$ болғанда бар, яғни $x = 2\pi k, k \in z$. Онда $(2) \Rightarrow cos\, cos\,(ax) \ = 1 \Rightarrow ax = 2\pi n, n \in z$.

Егер $a = 0$, берілген теңдеудің $x = 2\pi k$ шексіз шешімдері бар, сондықтан $a \neq 0$ болуы керек. Онда $ax = 2\pi n \ \Rightarrow x = \frac{2\pi n}{a}$, a саны рационал болса, берілген теңдеудің тағы да $x = 2\pi k$ шексіз шешімдері бар. Ал, a иррационал сан болса, онда $2\pi k = \frac{2\pi n}{a}$ теңдігі тек $k = n = 0$ мәндерінде орын алады, сондықтан жалғыз шешім болып $x = 0$ табылады. ***Жауабы:*** a −иррационал сан.

3-мысал. $a^2\, sin\, sin\, \left(\frac{\pi+2}{2} - x\right) \ + sin^2\left(\frac{2x}{a+1} - \frac{2}{a+1}\right) - a\sqrt{4x^2 - 8x + 8} = 3 + arcsin|1 - x|$

Теңдеуінің жалғыз шешімі болатын параметр a-ның барлық мәндерін табайық [2].

Шешуі:

Теңдеуден қайталанатын $(x - 1)$ шамасын бірден байқаймыз:

$$a^2 sin\left[\frac{\pi}{2} - (x - 1)\right] + sin^2\left[\frac{2(x - 1)}{a + 1}\right] - a\sqrt{4(x - 1)^2 + 4} = 3 + arcsin|x - 1|.$$

Сондықтан $t = x - 1$ жаңа айнымалысын еңгізсек, берілген теңдеу төмендегі түрге енеді:

$$a^2 cos\square + sin^2\frac{2t}{a+1} - 2a\sqrt{t^2 + 1} = 3 + arcsin|t| \qquad (3)$$

Белгісіз t (3) тек жұп функциялар арқылы еніп тұр, сол себепті теңдеу $t \ \Rightarrow -t$ түрлендіруі арқылы инвариантты, яғни t (3) түбірі болса, $-t$-да түбірі.

Бұдан (3) түбірлерінің ішінде $t = 0$ болуы қажетті. (3) апарып $t = 0$ қойып, параметр a -ның мәндерін анықтайық. Қарапайым түрлендіруден $a = 3$ аламыз.

$a \neq 3$ мәндерінде жалғыз түбірі болуы мүмкін емес.

Енді расында да, $a = 3$ болса (3) неше түбірі болады екен: (3) теңдеуінен келесі теңдеуді алуға болады:

$9cost + sin^2\frac{t}{2} - 6\sqrt{t^2 + 1} = 3 + arcsin|t| \Rightarrow 17cost - 12\sqrt{t^2 + 1} = 5 + 2arcsin|t|$.

Соңғы теңдеудің $[-1; 1]$ анықталу облысында $f(t) = 17cost - 12\sqrt{t^2 + 1}$ функциясы алдымен $f(-1) = 17cos1 - 12\sqrt{2}$ -ден $f(0) = 5 - k$ дейін өседі де, $f(1) = f(-1)$ дейін кемиди.

Ал, оң жағы $\varphi(t) = 5 + 2arcsin|t|$ - керісінше, $\varphi(-1) = 5 + \pi$ -ден $\varphi(0) = 5$-ке дейін кемиді де, содан кейін $\varphi(1) = \varphi(-1)$ - мәніне дейін өседі.

Сол себепті $f(t) = \varphi(t)$ теңдеуінің жалғыз $t = 0$ түбірі бар болады (кейбір әдебиеттерде бұл әдісті Мажорант немесе «min-max» әдісі деп те атап жүр). Олай болса параметрдің осы мәні теңдеуді қанағаттандыратынын көреміз.

4-мысал.

$$\frac{2x}{2^{1+x^2}} + acos\frac{x^2-1}{x} + a^2 - \frac{5}{4} = 0 \qquad (4)$$

теңдеуін шешейік [3].

Шешуі: (4) теңдеуде x-ті $\frac{1}{x}$-ке ауыстырсақ, теңдеудің түрі сақталып қалатынын көреміз, осы түрлендіруге байланысты инварианттық қасиетінен $x-$ теңдеудің шешімі болса, онда $\frac{1}{x}$ -те оның шешімі.

Сол себепті, егер x - жалғыз шешімі болса, онда $x = \frac{1}{x}$, яғни $x = \pm 1$.

$x = 1$ мәнін (4) теңдеуге қойсақ $\Rightarrow a^2 + a + \frac{3}{4} = 0$.

Дискриминанты $D = -2 < 0$ бұдан $x = 1$ болғанда $\forall a$ шешімі болып табылмайды.

Енді $x = -1$ қойсақ, іздеп отырған параметр үшін қажетті шартты (жеткілікті емес) аламыз, яғни $a^2 + a - 0.75 = 0 \Rightarrow a = 0.5 \lor a = -1.5$.

Осы екі күдікті параметрдің мәндері үшін шешімдерінің санын анықтайық. Ол үшін $x = tg\frac{t}{2}$ $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ тригонометриялық ауыстыруын қолдансақ, төмендегі теңдеуді аламыз:

$$2^{sint} + acos(2ctgt) + a^2 - 1.25 = 0 \qquad (5)$$

1^0. Егер $a = 0.5$ болса, онда (5) теңдеуден келесі теңдеу шығады:

$$cos(2ctgt) = 2 - 2^{1+sint} \qquad (6)$$

Сол жағындағы $y_1(t) = cos(2ctgt)$ - күрделі функция $\Rightarrow y(z) = cos\, cos\, z, z(t) = 2ctgt$. $t\epsilon(-\pi; 0) \Rightarrow\leftrightarrow z(t) \in (-\infty; +\infty) z(t)$ - монотонды кемиді, сол себепті $y_1(t)$ функциясы -1-ден +1-ге шексіз рет тербеліс жасайды, мұнда $y_1(-0.5\pi)$. Ал $t \in (0; \pi)$мәндері үшін $y_1(t)$ жұп табылады, жоғарғы қасиет сақталып қалады.

Оң жағындағы $y_1(t) = 2 - 2^{1+sint}$ функцияны $y(z) = 2 - 2^{1+z} \land z(t) = sint$ функцияларының композициясы деп қарастыруға болады.

Онда $y(z)$ графигін салу үшін дәстүрлі 2^z -көрсеткіштік функцияның графигінен солға бір бірлікке көшіріп, абцисса осіне қарағанда осьтік симетрия жасап, жоғарыға 2 кесіндіге көтерсе болғаны.

Сондықтан айнымалы $t \in (-\pi; \pi) \Rightarrow y_2(t)$ функциясы алдымен $y_2(-\pi) = 0$ мәнінен $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ мәніне дейін өседі де, содан кейін $y_2\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1$ -ден $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right)$ -ге дейін кеміп, қайтадан $y_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2$ -ден $y_2(\pi) = 0$ -ге дейін өседі.

Сол себепті (6) теңдеудің $(-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ аралығындағы түбірлерінің саны шексіз көп екенін көреміз.

2^0. Ал егер $a = -1{,}5$ табылса, онда (6)теңдеу

$$cos(2ctgt) = \frac{1}{3}\left(2 + 2^{1+sint}\right) \qquad (7)$$

түрінде болады да, $\forall\, t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi) \Rightarrow y = cos(2ctgt)$ функцияның мәндері $[-1; 1]$ сегментінде жатады да, ал $y = \frac{1}{3}\left(2 + 2^{1+sint}\right)$ функциясының мәндері $\left[12 \setminus \left\{\frac{4}{3}\right\}\right]$ жиынынан алынады. Олай болса (7) теңдеу $cos(2ctgt) = 1\ \frac{1}{3}\left(2 + 2^{1+sint}\right) = 1$ жүйесіне мәндес.

Екінші теңдеудің $t \in (-\pi; 0) \cup (0; \pi)$ шарты үшін жалғыз $t = -\frac{\pi}{2}$ түбірі табылады. Бұл түбір бірінші теңдеуді де қанағаттандырады. Онда есептің жауабы параметрдің $a = -1.5$ мәніне тең болады. ***Жауабы:*** $a = -1.5$

5-мысал. $2^{|x|} + |x| = y + x^2 + a,\ \ x^2 + y^2 = 1$ жүйесін шешейік.

Шешуі:

Біздің жүйенің шешімі $(x; y)$ болса, онда $(-x; y)$ шешімі болып табылады, яғни жүйе $(x; y) \Rightarrow (-x; y)$ түрлендіруне қарағанда инвариантты. Олай болса жалғыз шешім болуы үшін $x = 0$ шартының орындалуы қажетті.

Жүйеге апарып қойсақ $y = 1 - a,\ y^2 = 1$, бұдан $a = 0$ немесе $a = 2$ аламыз. Сонымен, берілген жүйенің жалғыз шешімінің бар болуының қажетті шарты үшін не $a = 0$, не $a = 2$ болуы керек.

Жеткілікті шарты бола ма екен?

1°. $a = 0\ \exists$, жүйе $y = 2^{|x|} + |x|(1 - |x|),\ y^2 = 1 - x^2$ түріне енеді де, $|x| = \sqrt{1 - y^2}$ болғандықтан, біріншісінен $y \geq 1$, ал екіншісінен $y \leq 1$ табылады, сонымен бірге тек $x = 0$ болса $y = 1$, яғни жалғыз шешім болып $(0; 1)$ табылады.

2°. $a = 2\ \exists$, жүйе $y = 2^{|x|} - 2 + |x|(1 - |x|),\ x^2 + y^2 = 1$. Мысал үшін, бұл жүйенің $(1; 0)$ және $(-1; 0)$ деген екі шешімі бар.

Ең соңында, берілген жүйенің жалғыз шешімі болуы үшін қажетті және жеткілікті шарты $a = 0$ екенін көреміз. ***Жауабы:*** $a = 0$.

6-мысал. $\{x^2-(2a+1)x+a^2-3=y\; y^2-(2a+1)y+a^2-3=x$ теңдеулер жүйесін шешейік [4].

Шешуі:

Егер $(x;y)$ жүйенің шешімі болса, онда $(y;x)$-те шешімі, сол себепті $x=y$ теңдігі орындалуы қажет, осы симметриядан $x^2-(2a+1)x+a^2-3=x \Rightarrow x^2-(2a+1)x+a^2-3=0$ теңдеуі пайда болады және дискриминанты $D=(a+1)^2-(a^3-3)=2a+4 \Rightarrow a=-2$.

Сонымен, $a=-2$ болса, онда $\{x^2+3x+1=y, y^2+3y+1=x$.

Жүйенің теңдеулерін бір-бірінен алсақ $(x-y)(x+y+4)=0\ \exists$.

1°. $y=x \Rightarrow x^2+2x+1=0 \Rightarrow x=-1 \Rightarrow y=-1$, яғни $(x;y)=(-1;-1)$ - жүйенің шешімі.

2°. $y+x=-4 \Rightarrow$ жүйенің бірінші теңдеуінен $x^2+4x+5=0 \Rightarrow x\in\emptyset$. ***Жауабы***: $a=-2$.

7-мысал. $\{ax^2+2ax+y+3a-3=0\; ay^2+x-6ay+11a+1=0$ теңдеулер жүйесін шешейік [4].

Шешуі:

Жаңадан $u=x+1$, $v=y-3$ белгісіздер еңгізсек берілген жүйе

$$\{au^2+v+2a=0\; u+av^2+2a=0 \tag{8}$$

түріне еніп, оның $(u;v)$ шешімі болса, онда $(v;u)$-мәндері де шешім болып табылатынын көреміз.

Жалғыз шешім $\Leftrightarrow \exists$, егер $v=u$ (қажеттілігі). (8) апарып қойсақ $au^2+u+2a=0$ теңдеуін аламыз.

Жалғыз шешім не $a=0$ кезінде (сызықтық теңдеуге айналғанда), не $D=1-8a^2=0$, яғни $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$ орындалған уақытта болады.

(8) жүйеге қойсақ: $a=0 \Rightarrow (0;0)$; $a=\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \left(-\sqrt{2};-\sqrt{2}\right)$; $a=-\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$ жалғыз ғана шешімдерінің бар екенің, ал $(x;y)$ пен $(u;v)$ арасында өзара бірмәнді сәйкестік бар болғандықтан іздеп отырған жауапты аламыз. ***Жауабы***: $a=0, a=\pm 0{,}25\sqrt{2}$.

8-мысал. Алгебралық және трансценденттік теңдеулер жүйесін шешейік [5]:

$$\{z\, cos\, cos\,(x-y)\ +(2+xy)\, sin\, sin\,(x+y)\ -z=0, x^2+(y-1)^2+z^2 \\ =a+2x, (x+y+az\,)[(1-a)\, ln\, ln\,(1-xy)\ +1]=0.$$

Шешуі:

Екінші теңдеуді $(x-1)^2+(y-1)^2+z^2=a+1$, түрінде жазсақ, онда $(x;y;z)$ шешімі болса $(y;x;z)$-те шешімі екені шығады. Осы симметриядан $x=y$ шарты қажетті екенің көреміз.

Бұл жағдайда берілген жүйенің бірінші теңдеуінен $z+(x^2+2)\, sin\, sin\, 2x\ -z=0$, $x=\frac{k\pi}{2}, k\in z$ шешімі шығады.

Үшінші теңдеуінен $xy<1$ болғандықтан $(x=y) \Rightarrow \frac{k^2\pi^2}{4}<1$, олай болса $k=0-\exists \Rightarrow x=y=0\ \exists$. Бұдан екінші теңдеу $z^2=a-1$ түрінде болып жалғыз шешімге тек $a=1$ мәнінде ие бола алады.

Егер $a=1-\exists$, үшінші теңдеуден $x+y+z\ =0\ \exists \Rightarrow x+y\le 0$.

Ары қарай, $a=1$ мәнін жүйенің екінші теңдеуіне қойсақ $x^2+y^2+z^2=2(x+y)$ қатынасынан $x=y=z=0\ \exists$.

Параметр $a=1$ мәнінде басқа шешімнің болуы мүмкін емес. $(0;0;0)$ үштігі расында да берілген жүйені қанағаттандыратының көреміз. ***Жауабы:*** $a=1$.

9-мысал. Енді қос параметрден тәуелді бір жүйені шешуді қарастырайық [7]:

$$\{xyz+z=a, xyz^2+z=b, x^2+y^2+z^2=4.$$

Шешуі: Есепті қанағаттандыратын жұп $(a;b)$ мәндері табылып, $(x;y;z)$ іздеп отырған жалғыз шешім болсын дейік. Жүйеде $x\to -x, y\to -y$ деп есептесек, ештеңе өзгермейтінің көреміз, яғни $(-x;-y;z)$ есептің шешімі, онда инварианттық қасиет бойынша $x=y=0$ болуы қажет, олай болса есептің шешімін $(0;0;z)$ түрінде іздейміз.

Жүйеге апарып қойсақ $z = a,\ z = b, z^2 = 4\ \Rightarrow z = \pm 2, a = b = \pm 2$. Бізді қанағаттандыратын жұп параметрлер не $a = b = 2$ не $a = b = -2$.

Бірінші жағдайда $xyz + z = 2, xyz^2 + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ жүйесін алып, $x = y = 0, z = 2$ оның шешімі екені көреміз.

Бірінші, екінші теңдеулерден $xy(z^2 - 2) = 0$ шығады. Егер $x = 0$ болса, екінші, үшінші теңдеулерен $z = 2$ және $y = 0$ болатыны бізге бұрыннан белгілі. Дәл осылай $y = 0$ болғанда да жоғарыдағы шешім пайда болады.

Енді $z^2 - z = 0$ болсын деп ұйғарайық, онда $z = 0$ немесе $z = 1$.

Егер $z = 0$ болса, алғашқы екі теңдеу бір-біріне қарама-қайшы, яғни шешімі жоқ.

Егер $z = 1$ болса, $\{xy = 1\ x^2 + y^2 = 3$ аламыз, оның әртүрлі төрт шешімі бар, сол себепті $a = b = 2$ есептің шартын қанағаттандыра алмайтының көреміз.

$a = b = -2$ болсын, онда $xyz + z = 2, xyz^2 + z = 2, x^2 + y^2 + z^2 = 4$ жүйесінен оның жалғыз шешімі болып $x = y = 0,\ z = -2$ табылатынын, ал басқа нақты шешімдерінің болмайтыны өзінен-өзі түсінікті. ***Жауабы:*** $a = b = -2$.

Қорыта айтқанда, қандай да бір түрлендіруге байланысты өрнектің инварианттық қасиетінің бар болуынан іздеп отырған шешімнің кенеттен, күтпеген сәтте пайда болатындығын көрдік.

Параметрді, әсіресе, дәстүрлі теңдеулер мен теңсіздіктерге енгізу процесі өмірге жаңа бағыттағы есептердің келуіне орасан зор ықпал етті деуге болады. Сол себепті осындай түрдегі есептерді шешу - шығармашылық қызмет түрі, ал шешімдерді көрсету - тапқырлықтың нәтижесі. Шешімді іздеу барысында зерттеушінің танымдық қызығушылығы қалыптасып, шығармашылық мәдениеті, зерттеушілік қасиеті дамиды. Оқушылардың ойлау қабілетінің дұрыс жетілуіне, математика пәніне деген сүйіспеншіліктің артуына көмегі тиері анық.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 Фалин А.И., Фалин Г.И. Алгебра на вступительных экзаменах по математике в МГУ. М: Бином. Лаборатория знаний. 2006. – 367 с.

2 Фалин А.И., Фалин Г.И. Тригонометрия на вступительных экзаменах по математике в МГУ. -М: Бином. Лаборатория знаний. 2007. – 327 с.

3 Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. Справ. пособие по математике. Мн.: Асар, 1996. – 464с.

4 Горнштейн П.И. и др. Задачи с параметрами. 3-е идз., дополн. и перераб. -М.: Илекса, Харьков: Гимназия, 1998. – 336 с.

5 Моденов П.С. Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения. -М.: Просвещение, 1969. – 351 с.

6 Асқарова М. Элементарлық математика. Алгебра. -Алматы: Қарасай, 2013. – 460 б.

7 Тынянкин С.А. и др. 514 задач с параметрами. Волгоград. 1991. -160 с.

References:

1 Falin A.I., Falin G.I. (2006) Algebra na vstupitel'nyh jekzamenah po matematike v MGU [Algebra at entrance exams in mathematics at Moscow State University]. M: Binom. Laboratorija znanij. 367. (In Russian)

2 Falin A.I., Falin G.I. (2007) Trigonometrija na vstupitel'nyh jekzamenah po matematike v MGU[Trigonometry in the entrance exams in mathematics at Moscow State University]. M: Binom. Laboratorija znanij. 327. (In Russian)

3 Amel'kin V.V., Rabcevich V.L.(1996) Zadachi s parametrami. Sprav. posobie po matematike [Tasks with parameters]. Mn.: Asar, 464. (In Russian)

4 Gornshtejn P.I. i dr (1998) Zadachi s parametrami. 3-e idz., dopoln. i pererab [Tasks with parameters]. M.: Ileksa, Har'kov: Gimnazija, 336. (In Russian)

5 Modenov P.S. (1969) Jekzamenacionnye zadachi po matematike s analizom ih reshenija [Exam problems in mathematics with the analysis of their solution]. M.: Prosveshhenie, 351. (In Russian)

6 Askarova M. (2013) Jelementarlyk matematika. Algebra [Elementary mathematics. Algebra.]. Almaty: Karasaj, 460 (In Kazakh)

7 Tynjankin S.A. i dr. (1991) 514 zadach s parametrami [514 tasks with parameters]. Volgograd.. 160. (In Russian)