МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

МРНТИ 27.29.21; 27.23.25
УДК 517.946

https://doi.org/10.51889/2959-5894.2023.81.1.001

*А.А. Исенова**

Актюбинский региональный университет им.К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан
**email: akkenje_ia@mail.ru*

МНОГОМЕРНЫЕ НОРМАЛЬНО-РЕГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ВЫРОЖДЕННЫХ СИСТЕМ, ПОЛУЧЕННЫХ ИЗ СИСТЕМ ЛАУРИЧЕЛЛА

Аннотация

В работе изучены возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем полученных из систем Лауричелла путем предельного перехода. Исследованы ряд важных частных случаев систем, с решениями в виде нормально-регулярных решений. Доказаны некоторые свойства таких рядов, установлены связь этих рядов с вновь введенными функциями В.И.Художникова. Установлены также необходимые условия существования нормально-регулярных решений систем типа Горна состоящих из двух и более уравнений. Построенные новые решения являются обобщениями известных функции Горна и Гумберта двух переменных. Необходимые и достаточные условия существования нормально-регулярных решений системы устанавливаются с помощью понятия ранга и антиранга. Для построения решения применяются модифицированный метод Фробениуса-Латышевой.

Ключевые слова: связь, свойства, нормально-регулярные решения, гипергеометрическая функция, система Горна, система Лауричелла, функция В.И.Художникова.

Аңдатпа

А.А. Исенова
Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ЛАУРИЧЕЛЛА ЖҮЙЕЛЕРІНЕН АЛЫНҒАН АЗҒЫНДАЛҒАН ЖҮЙЕЛЕРДІҢ КӨП ӨЛШЕМДІ ҚАЛЫПТЫ-РЕГУЛЯРЛЫ ШЕШІМДЕРІ

Жұмыста шекті ауысу арқылы Лауричелла жүйелерінен алынған азғындалған жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерін құру мүмкіндіктері зерттелді. Шешімдері қалыпты-регулярлы шешімдер түрінде болатын жүйелердің бірқатар маңызды ерекше жағдайлары зерттелді. Мұндай қатарлардың кейбір қасиеттері дәлелденді, осы қатарлардың В.И.Художников жаңадан енгізілген функцияларымен байланысы орнатылды. Сондай-ақ, екі немесе одан да көп теңдеулерден тұратын Горн типті жүйелердің қалыпты-регулярлы шешімдерінің болуы үшін қажетті шарттары орнатылған. Тұрғызылған жаңа шешімдер белгілі Горн және екі айнымалылы Гумберт функцияларының жалпылауы болып табылады. Жүйенің қалыпты-регулярлы шешімдері бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары ранг және антиранг ұғымдары арқылы орнатылады. Шешімді құру үшін модификацияланған Фробениус-Латышева әдісі қолданылады.

Түйін сөздер: байланыс, қасиеттер, қалыпты-регулярлы шешімдер, гипергеометриялық функция, Горн жүйесі, Лауричелла жүйесі, В.И. Художников функциясы.

Abstract

MULTIDIMENSIONAL NORMAL-REGULAR SOLUTIONS OF DEGENERATE SYSTEMS, DERIVED FROM LAURICHELLA SYSTEMS

Issenova A.A.
Aktobe Regional University after named K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

In this paper, the possibilities of constructing normal-regular solutions of degenerate systems obtained from Laurichella systems by limiting transition are studied. A number of important special cases of systems with solutions in the form of normally regular solutions are investigated. Some properties of such series are proved, the connections of these series with the newly introduced functions of V.I. Khudozhnikov are established. The necessary conditions for the existence of normally regular solutions of Horn-type systems consisting of two or more equations are also established. The constructed new solutions are generalizations of the well-known Horn and Humbert functions of two variables. The necessary and sufficient conditions for the existence of normally regular solutions are established using the concepts of rank and antirank. A modified Frobenius-Latysheva method is used to construct the solution.

Keywords: connection, properties, normal-regular solutions, hypergeometric function, Horn system, Laurichella system, V.I. Khudozhnikov function.

1. **Введение**

Аналитическая теория дифференциальных уравнений давно находит широкое применение при решении многих задач электродинамики и теории колебаний. Специальные вопросы аналитической теории дифференциальных уравнений, а именно существование нормально-регулярных решений и их применение к решению задач теории волноводов и теории колебаний были рассмотрены в монографии [1]. Следует отметить, что при построении решения линейных обыкновенных дифференциальных уравнений сравнение понятия ранга и антиранга, профессор Киевского университета К.Я. Латышевой позволило выделить новый тип решений линейных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами. Все известные специальные функции являются частными случаями нормально-регулярных решений.

Действительно, решениями вырожденного гипергеометрического уравнения или уравнения Куммера [2]:

$$x\frac{d^2y}{dx^2}+(\gamma-x)\frac{dy}{dx}-\alpha y=0$$

являются вырожденные гипергеометрические функции

$$y_1={}_1F_1(\alpha;\gamma;x)$$
$$y_2=x^{1-\gamma}{}_1F_1(1+\alpha+\gamma;2-\gamma;x)$$

или

$$y_3=e^x{}_1F_1(1-\alpha;\gamma;-x) \tag{1.1}$$
$$y_4=x^{1-\gamma}e^x{}_1F_1(1-\alpha;2-\gamma;-x) \tag{1.2}$$

Причем, легко убедиться, что

$${}_1F_1(\alpha;\gamma;x)=e^x\left\{1-\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}x+\frac{(\gamma-\alpha)(\gamma+1-\alpha)}{2\gamma(1+\gamma)}x^2+\ldots\right\}$$
$${}_1F_1(\alpha-\gamma+1;2-\gamma;x)=e^x\left\{1-\frac{1-\alpha}{2-\gamma}x+\frac{(1-\alpha)(2-\alpha)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2-\ldots\right\}$$

Решения (1.1) и (1.2) представляют нормально-регулярные решения. Это понятие распространен на случай функций многих переменных [3-5].

Определение 1.1. Решение вида

$$w(z_1,\ldots,z_n)=\exp(\alpha_{\underbrace{1,0,\ldots,0}_{n}}z_1+\ldots+\alpha_{\underbrace{0,\ldots,1}_{n}}z_n)z_1^{\rho_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty}A_{m_1,\ldots,m_n}z_1^{m_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{m_n},\ A_{\underbrace{0,\ldots,0}_{n}}\neq 0$$ где

$\rho_t\ (t=\overline{1,n}), A_{m_1,\ldots m_n}\ (m_1,\ldots,m_n=0,1,2,\ldots);\quad \alpha_{\underbrace{1,0,\ldots0}_{n}},\ldots,\alpha_{\underbrace{0,\ldots,0,1}_{n}}$ – неизвестные постоянные, а ряд в правой части сходится вблизи особенности ($z_1=0,\ldots,z_n=0$) называется **нормально-регулярным решением n переменных.**

Степень многочлена $Q(\alpha_{\underbrace{1,0,...,0}_{n}} z_1 + ... + \alpha_{\underbrace{0,...,1}_{n}} z_n)$ определяется понятием ранга

$$p = 1 + k = 1 + \max \frac{\beta_j - \beta_0}{j} (1 \le j \le n)$$

где β_0, β_j - наибольшие степени коэффициентов заданной системы. Когда ранг $p = 1$, степень $Q(z_1,...,z_n)$ первой степени и определяется в виде многочлена $Q((z_1,...,z_n) = \alpha_{\underbrace{1,0,...,0}_{n}} z_1 + ... + \alpha_{\underbrace{0,...,1}_{n}} z_n$.

Целью данной работы является изучение возможности построения нормально-регулярных решений вырожденных систем, полученных из систем Лауричелла F_D. Исследование ряда важных частных случаев систем, с решениями в виде нормально-регулярных решений, установление необходимых условий их существования, доказательство ряда свойств, связанных с функциями Горна двух и более переменных. Доказательство отдельных свойств нормально-регулярных решений, установление связей этих рядов с вновь введенными функциями В.И.Художникова $\Phi_D \left(\begin{matrix} \alpha, (\beta_k) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_{k+1}) \right)$ [5].

2. Исследование вырожденных систем, полученных из системы Лауричелла (F_D)

Постановка задачи

Исследовать существования нормально-регулярных решений вырожденных систем полученных из системы дифференциальных уравнений

$$(1 - z_i) \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha + \beta_i + 1) z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j \ne i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_j w = 0, \qquad (2.1)$$

решением, которой является функция Лауричелла

$$F_D \left(\begin{matrix} \alpha, (\beta_n) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_n) \right) = \sum_{i_1,...i_n} \frac{(\alpha)_{\sum i_n} \prod (\beta_n) i_n}{(\gamma)_{\sum i_n}} \cdot \prod \frac{(z_n)^{i_n}}{i_n!}. \qquad (2.2)$$

В работе приняты следующие обозначения и сокращения [5], [8]: $(a_n) = (a_1,..., a_n)$,

$$\prod (\alpha_n)_{i_n} = \prod_{k=1}^{n} (\alpha_k)_{i_k}, \ \sum i_n = \sum_{k=1}^{n} i_k, \ \sum i_1,..., i_k = \sum_{i_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{i_k=0}^{\infty} \cdot (...)$$

В.И. Художников совершая предельные переходы по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях системы (2.1), решениями которые представляются в виде (2.2), представил её в виде следующей вырожденной гипергеометрической системы дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} &(1 - z_i) \sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - (\alpha + \beta_i + 1) z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \beta_i \sum_{j=1, j \ne i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha \beta_i w = 0, \ i = \overline{1, k}, \\ &\sum_{j=1}^{n} z_j \frac{\partial^2 w}{\partial z_j \partial z_i} + [\gamma - z_i] \frac{\partial w}{\partial z_i} - \sum_{j=1, j \ne i}^{n} z_j \frac{\partial w}{\partial z_j} - \alpha w = 0, \ i = \overline{k+1, n} \end{aligned} \qquad (2.3)$$

Решением этой системы является введенная им функция [5, с.842]:

$$\Phi_D \left(\begin{matrix} \alpha, (\beta_k) \\ \gamma \end{matrix} \middle| (z_{k+1}) \right) = \sum_{i_1,...i_{k+1}} \frac{(\alpha)_{\sum i_{k+1}} \prod (\beta_k) i_k}{(\gamma)_{\sum i_{k+1}}} \cdot \prod \frac{(z_{k+1})^{i_{k+1}}}{i_{k+1}!}. \qquad (2.4)$$

Предметом нашего дальнейшего исследования будет построения нормально-регулярных решений системы (2.3) и её частных случаев, установление связи между функцией Художникова (2.4) и вновь построенных нормально-регулярных решений, а также изучение их различных свойств. Как указано в работе [6], функция (2.4) при $n=2$ совпадает с хорошо изученной функцией Гумберта, со списка Горна [7,8].

Переходим к построению нормально-регулярного решения системы Горна (Φ_1) и изучим его свойства.

2.1 Нормально-регулярные решения вырожденной системы Горна (Φ_1) и некоторые его свойства

Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\begin{cases} z_1(1-z_1)w_{z_1z_1}+z_2(1-z_1)w_{z_1z_2}+[\gamma-(\alpha+\beta_1+1)z_1]w_{z_1}-\beta_1 z_2 w_{z_2}-\alpha\beta_1 w=0, \\ z_2 w_{z_2z_2}+z_1 w_{z_1z_2}+(\gamma-z_2)w_{z_2}-z_1 w_{z_1}-\alpha w=0 \end{cases} \tag{2.5}$$

является частным случаем системы (2.3) полученная из нее при $n=2$.

Определение 2.1. Вырожденная гипергеометрическая функция $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$ двух переменных z_1 и z_2 определяется с помощью ряда

$$\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha,m+n)(\beta,m)}{(\gamma,m+n)}\frac{z_1{}^m}{(1,m)}\frac{z_2{}^n}{(1,n)} \tag{2.6}$$

Ряд сходится абсолютно и равномерно в области $|z_1|<\infty, |z_2|<\infty$.

Справедливо утверждение [7].

Теорема 2.1. Система (2.5) имеет три линейно-независимых частных решений, одним из которых является вырожденная гипергеометрическая функция (2.6).

$$\begin{aligned} &w_1(z_1,z_2)=\Phi_1(\alpha,\beta,\gamma;z_1,z_2), \\ &w_2(z_1,z_2)=y^{1-\gamma}\Phi_1(\alpha+1-\gamma,\beta,2-\gamma;z_1,z_2), \\ &w_3(z_1,z_2)=x^{1-\gamma}\Phi_1(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\lambda,2-\gamma;z_1,z_2). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Обратим внимание на некоторые свойства системы (2.5) которые необходимые для построения решений.

- Система совместна по методу построения. Условие интегрируемости

$$\Delta_1=1-a_{1,1}b_{1,1}=\frac{z_2(1-z_1)}{z_1(1-z_2)}\equiv 0.$$

Согласно общей теории [8] такие системы имеет не более трёх линейно-независимых частных решений.

- Особые кривые системы: $(0,0),(1,0),(0,\infty),(\infty,0),(1,\infty)u(\infty,\infty)$. Вблизи регулярной особенности (0,0) существуют при линейно-независимые регулярные решения вида (2.7).
- Все вырожденные уравнения имеют особую точку (иррегулярную) $z_1=+\infty$ [3] а системы дифференциальных второго порядка иррегулярную особенность $(-\infty,+\infty)$ [4]. Поэтому, справедливо утверждение.

Теорема 2.2. Система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.5), при выполнений двух необходимых условий

$$f_{1,0}^{(1)}\left(\alpha_{10},\alpha_{01}\right)=\alpha_{10}^{2}=0\,,\;\; f_{0,1}^{(2)}\left(\alpha_{10},\alpha_{01}\right)=\alpha_{01}^{2}-\alpha_{01}=0 \qquad (2.8)$$

и

$$\left.\begin{aligned} f_{0,0}^{(1)}(\rho_1,\rho_2)\equiv \rho_1(\rho_1-1+\rho_2+\gamma)=0,\\ f_{0,0}^{(2)}(\rho_1,\rho_2)\equiv \rho_2(\rho_2-1+\rho_1+\gamma)=0,\end{aligned}\right\} \qquad (2.9)$$

имеет нормально-регулярное решение вида

$$w_4(z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-\alpha)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}\,. \qquad (2.10)$$

Доказательство

Для его построения применяем методику, приведенную в [9], основанную на применении преобразования

$$w=\exp(\alpha_{10}z_1+\alpha_{01}z_2)U(z_1,z_2), \qquad (2.11)$$

где α_{10},α_{01} - неизвестные коэффициенты, поскольку ранг $p=1$.

Система определяющих уравнений системы (2.10) относительно особенности (0;0) (2.9) имеем при пары корней:

$$(\rho_1=0,\delta_1=0),(\rho_1=0,\delta_2=1-\gamma),(\rho_2=1-\gamma,\delta_1=0).$$

Однако, она имеет только одно частное решение вида (2.11) соответствующее показателю

$$\begin{aligned} U(z_1,z_2)=\Bigg\{1+\frac{\alpha\beta_1}{\gamma}z_1-\frac{\gamma-\alpha}{\gamma}z_2-\frac{\alpha\beta_1(\gamma-\alpha)}{\gamma(\gamma+1)}z_1z_2+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta_1(\beta_1+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}z_1^2-\\ -\frac{(\gamma-2)(\gamma+1-\alpha)}{2!\gamma(\gamma+1)}z_2^2=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}\Bigg\}\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Тогда, учитывая значения $\alpha_{10}=0$ и $\alpha_{01}=1$, а также решение (2.12), убеждаемая, что нормально-регулярное решение системы (2.5) представляется в виде

$$w_4(z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!} \qquad (2.13)$$

На основе полученных результатов сформулируем некоторые свойства функций Гумберта $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$.

Теорема 2.3. Справедливо соотношение

$$\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!} \qquad (2.14)$$

Доказательство

Используя разложения рядов, раскроем правую часть равенства (2.14) что и доказывает справедливость соотношение (2.14).

Вернемся к решению (2.12) присоединённой системы (2.10). Здесь можно заменить связь функций $\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$ ещё одной вырожденной гипергеометрической функцией $\Xi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)$. Действительно, решение (2.14) можно выразить через эту функцию

$$\Xi_1\left(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2\right)=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!} \tag{2.16}$$

Отсюда заключаем, что имеет место равенство

$$\Phi_1(\alpha,\beta;\gamma;z_1,z_2)=e^{z_2}\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_m(\beta)_m(\gamma-a)_n}{(\gamma)_{m+n}}\frac{z_1^m}{m!}\frac{(-z_2)^n}{n!}=e^{z_2}\Xi_1\left(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1-z_2\right) \tag{2.17}$$

доказанное в теореме 2.2.

Таким образом нами рассмотрены возможности построения нормально-регулярных регений вырожденный гипергеометрической системы (2.5). Выполнение условий (2.8) является первым необходимым условием существования нормально- регулярного решения. [9], кроме этого, должна выполняться ещё второе необходимое условие. Оно связано с существованием решения (2.13) системы (2.10). Сформулируем эти необходимые условия в виде следующих лемм.

Теорема 2.4. Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (2.22) состоящая из трех уравнений, полученные путем предельного перехода из системы Лауричелла $\left(\Phi_D\right)$, вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$ имеет 2^3 линейно-независимых частных решений, одним из которых является вырожденная функция от трёх переменных

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_3)\right)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}. \tag{2.18}$$

Доказательство

Решение вырожденной системы (2.22) вблизи регулярной особенности $(0,0,0)$ будем искать в виде обобщенного степенного ряда трёх переменных :

$$w(z_1,z_2,z_3)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,m_3}\cdot z_1^{m_1}z_2^{m_2}z_3^{m_3},\ C_{0,0,0}\neq 0 \tag{2.19}$$

где $\rho_j\,(j=1,2,3),C_{m_1,m_2,m_3}\,(m_1,m_2,m_3=0,1,2,...)$ - неизвестные коэффициенты.

Для построения решения вида (2.24) применяем метод Фробениуса-Латышевой [4]. с этой целью, подставляя вместо $w=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}$, составим систему характеристических функций Фробениуса $L_j\left[z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}z_3^{\rho_3}\right],\ j=\overline{1,3}$ как в предыдущем пункте, откуда определим систему определяющих уравнений относительно особенности $(0,0,0)$:

$$f_{000}^{(j)}(\rho_1,\rho_2,\rho_3)\equiv\rho_j\left(\rho_j-1+\sum_{j=1,i\neq j}^{3}\rho_j+\gamma\right)=0. \tag{2.20}$$

Она имеет восемь троек корней:

$$\begin{aligned}
&\text{I. }\left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(1)}=0\right);\ \text{II. }\left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(1)}=0\right);\\
&\text{III. }\left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(1)}=0\right);\ \text{IV. }\left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(1)}=0,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right);\\
&\text{V. }\left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(1)}=0\right);\ \text{VI. }\left(\rho_1^{(1)}=0,\rho_2^{(2)}=1-\gamma,\rho_3^{(2)}=1-\gamma\right);
\end{aligned} \tag{2.21}$$

VII. $\left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma, \rho_2^{(1)}=0, \rho_3^{(2)}=1-\gamma\right)$; VIII. $\left(\rho_1^{(2)}=1-\gamma, \rho_2^{(2)}=1-\gamma, \rho_3^{(2)}=1-\gamma\right)$.

Эти тройки корней являются показателями восьми $\left(2^3\right)$ регулярных решений системы вида (2.18).

Покажем, что в случае трех переменных многочлен $Q(z_1, z_2, z_3)$ представляется в виде $Q(z_1, z_2, z_3)=\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3$ и для построения нормально-регулярного решения используется преобразование

$$w(z_1, z_2, z_3)=\exp(\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3)U(z_1, z_2, z_3), \tag{2.22}$$

где $\alpha_{1,0,0}, \alpha_{0,1,0}, \alpha_{0,0,1}$ - неизвестные постоянные.

Действительно, преобразование (2.22) систему приводит к вспомогательной системе. Согласно первому необходимому условию существования решения вида (2.22) приравнивая коэффициенты при наибольших степенях независимых переменных z_j, $j=\overline{1,3}$ при неизбежной $U(z_1, z_2, z_3)$, получим систему характеристических уравнений, откуда определим восемь троек корней:

I. $(0,0,0)$; II. $(0,1,0)$; III. $(0,0,1)$; IV. $(1,0,0)$;
V. $(1,1,0)$; VI. $(0,1,1)$; VII. $(1,0,1)$; VIII. $(1,1,1)$.

Из них только I-III определяют совместную систему уравнений.

При I. $\left(\alpha_{1,0,0}=0, \alpha_{0,1,0}=0, \alpha_{0,0,1}=0\right)$ получаем исходную систему с решением вида $\Phi_1(\alpha, \beta_1; \gamma; z_1, z_2, z_3)$.

Второй случай: II. $\left(\alpha_{1,0,0}=0, \alpha_{0,1,0}=1, \alpha_{0,0,1}=0\right)$ определяет многочлен $Q(z_1, z_2, z_3)=z_2$. При этих значениях из вспомогательной системы получим присоединенную систему

$$\begin{gathered}
(1-z_i)\sum_{i=1}^{3} z_j\frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i}+\{z_2(1-z_1)\cdot 2[\gamma-(\alpha+\beta_1+1)z_i]\}\frac{\partial U}{\partial z_1}-\beta_1 z_2\frac{\partial U}{\partial z_2}- \\
-\beta_1 z_3\frac{\partial U}{\partial z_3}-\{\beta_1 z_1+\beta_1 z_2+\alpha\beta_1\}U=0, \\
\sum_{i=1}^{3} z_j\frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i}+\{z_2+z_3+\gamma\}\frac{\partial U}{\partial z_1}+2z_3\frac{\partial U}{\partial z_3}+(\gamma-\alpha)U=0, \\
\sum_{i=1}^{3} z_j\frac{\partial^2 U}{\partial z_j \partial z_i}-z_1\frac{\partial U}{\partial z_1}-z_2\frac{\partial U}{\partial z_2}+(z_2-z_3+\gamma)\frac{\partial U}{\partial z_3}+(z_2+\alpha)U=0.
\end{gathered} \tag{2.23}$$

Для этой системы выполняется второе необходимое условия существования нормально-регулярного решения и решение соответствующее тройке корней $\left(\rho_1=0, \rho_2=0, \rho_3=0\right)$ представляется в виде

$$U_1(z_1, z_2, z_3)=\sum_{m_1, m_2, m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}, \tag{2.24}$$

Поэтому, учитывая преобразование (2.22) вид многочлена $Q(z_1,z_2,z_3)=\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3=z_2U$ решение (2.23) убеждаемся, что искомое нормально-регулярное решение вырожденной системы (2.22) представляется в виде

$$w_4(z_1,z_2,z_3)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}\,. \qquad (2.25)$$

В третьем случае, когда III. $(\alpha_{1,0,0}=0,\alpha_{0,1,0}=0,\alpha_{0,0,1}=1)$ многочлен $Q(z_1,z_2,z_3)=\alpha_{1,0,0}z_1+\alpha_{0,1,0}z_2+\alpha_{0,0,1}z_3=z_3$, то есть можно определить совместную систему вида (2.29), выполняется также второе необходимое условие. Поэтому, на основе аналогичных рассуждении можем построить решение соответствующее тройке корней $(\rho_1=0,\rho_2=0,\rho_3=0)$.

$$\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{z_3^{m_3}}{m_3!} \qquad (2.26)$$

и

$$\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3)=\sum_{m_1,m_2,m_3=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}\cdot\frac{(-z_3)^{m_3}}{m_3!}. \qquad (2.27)$$

В (2.26), (2.27) получаем справедливость свойства связывающих функций от трёх переменных $\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3),\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3)$:

$$\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=e^{z_2}\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3),$$
$$\Phi_1(\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,z_3)=e^{z_3}\Xi_1(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,z_2,-z_3).$$

3. Свойства нормально-регулярных решений наиболее общей вырожденной системы.

Вырожденная гипергеометрическая система дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{gathered}(1-z_i)\sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-(\alpha+\beta_i+1)z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\beta_i\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha\beta_i w=0,\ i=\overline{1,k},\\ \sum_{j=1}^{n}z_j\frac{\partial^2 w}{\partial z_j\partial z_i}+[\gamma-z_i]\frac{\partial w}{\partial z_i}-\sum_{j=1,\,j\neq i}^{n}z_j\frac{\partial w}{\partial z_j}-\alpha w=0,\ i=\overline{k+1,n}\ \ j=\overline{1,3}\end{gathered} \qquad (3.1)$$

были получены В.И. Художниковым из системы Лауричелла (2.1) с помощью предельного перехода по параметру β_i в последних $n-k$ уравнениях. Изучая систему (2.3) он ввёл вырожденную функцию Φ_D - (2.4) как частный случай решения системы Лауричелла F_D.

Вырожденная система (3.1) вблизи $(0,0,...,0)$ имеет регулярную особенность. Введенное В.И.Художниковым её решение (2.4) можно представит в виде

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right)=\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}}{(\gamma)_{m_1+...+m_n}}\cdot\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\cdot...\cdot\frac{z_n^{m_n}}{m_n!} \qquad (3.2)$$

Обобщение результатов позволяет нам сформулировать общую теорему относительно существования нормально-регулярных решений системы (3.1).

Теорема 3.1. Вырожденная система дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (3.1) имеет $n-1$ нормально-регулярных решений вида

$$w_1(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_2}\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}\frac{z_3^{m_3}}{m_3!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!},$$

....

$$w_{n-1}(z_1,z_2,...,z_n)=e^{z_n}\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}...\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!} \qquad (3.3)$$

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_1}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_2}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,z_3,...,z_n),$$

.... (3.4)

$$\Phi_D\left(\frac{\alpha,\beta_n}{\gamma}/(z_n)\right)=e^{z_n}\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,...,z_{n-1},-z_n).$$

Между функциями Φ_D и Ξ_D, где вырожденная гипергеометрическая функция Ξ_D определяются рядами в правых частях нормально-регулярных решений (3.4):

$$\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_1;\gamma;z_1,-z_2,...,z_n)=\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_n}(\beta_1)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_2}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{(-z_2)^{m_2}}{m_2!}...\frac{z_n^{m_n}}{m_n!}$$

(3.5)

....

$$\Xi_D(\alpha,\gamma-\alpha,\beta_n;\gamma;z_1,z_2,...,-z_n)=\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_{m_1+m_2+...+m_{n-1}}(\beta_2)_{m_1}(\gamma-\alpha)_{m_{n-1}}}{(\gamma)_{m_1+m_2+...+m_n}}\frac{z_1^{m_1}}{m_1!}\frac{z_2^{m_2}}{m_2!}...\frac{(-z_n)^{m_n}}{m_n!}$$

Выводы

Таким образом, нормально-регулярные решения наиболее общей вырожденной системы (3.1) представляются в виде (3.3).

Согласно методу Фробениуса-Латышевой для построения решения вида (3.3) применяется преобразования

$$w(z_1,z_2,...,z_n)=\exp(\alpha_{1,0,...,0}\cdot z_1+\alpha_{0,1,...,0}\cdot z_2+...+\alpha_{0,0,...,1}\cdot z_n)U(z_1,z_2,...,z_n), \qquad (3.7)$$

где $\alpha_{1,0,0,...,0},...,\alpha_{0,0,...,1}$ - неопределенные постоянные. Они определяются из вспомогательного уравнения полученного с помощью преобразавания (3.7). это приведет нас к определению первого необходимого условия существования нормально-регулярных решений вида (3.3).

Лемма 3.1. Для того чтобы вспомогательная система полученное из выражденной системы (3.1) с помощью преобразования (3.7), имела хотя бы одно нормально-регулярное решение вида (3.3) необходимо выполнение

$$\begin{gathered}\alpha_{1,0,...,0}^2=0,\alpha_{0,1,0,...,0}^2-\alpha_{0,1,0,...,0}=0,\\ \alpha_{0,0,1,0,...,0}^2-\alpha_{0,0,1,0,...,0}=0,\alpha_{0,0,...,0,1}^2-\alpha_{0,0,...,0,1}=0\end{gathered}.$$

равенств. Из этой системы характеристических уравнений находим $n-1$ многочленов первой степени вида

$$Q\left(\alpha_{0,1,0,...,0}^i,\alpha_{0,0,1,0,...,0}^i,...,\alpha_{0,0,...,0,1}^i\right)=\alpha_{0,1,0,...,0}^i\cdot Z_2+\alpha_{0,0,1,0,...,0}^i\cdot Z_3+...+\alpha_{0,0,...,0,1}^i\cdot Z_n,\quad i=\overline{1,n-1}.$$

Таким образом, в (3.7) будут определены неопределенные коффициенты определяющего множителя $\exp\left(\alpha_{1,0,...0}\cdot z_1+...+\alpha_{0,0,...1}\cdot z_n\right)$. Для установления вида решения

$$U\left(z_1,z_2,...,z_n\right)=z_1^{\rho_1}z_2^{\rho_2}...z_n^{\rho_n}\sum_{m_1,m_2,...m_n=0}^{\infty}C_{m_1,m_2,...m_n}\cdot z_1^{m_1}z_2^{m_2}...z_n^{m_n},\ C_{0,0,...0}\neq 0, \tag{3.8}$$

с неизвестными постоянными ρ_l, $C_{m_1,...,m_n}\left(l=1,...,n;m_1,...,m_n=0,1,2,...\right)$, присоединенной системы, требуется выполнение второго необходимого условия существования нормально-регулярного решения. Присоединенные системы определяются из вспомогательной системы путем подстановки значения неопределенных коэффициентов определяющего множителя.

Лемма 3.2. Для существования у присоединенной системы решения вида (3.8) необходимо, чтобы система определяющих уравнений относительно особенности $\underbrace{(0,0,....0)}_{n}$ вида

$$f_{000}^{(j)}\left(\rho_1,\rho_2,\rho_3\right)\equiv\rho_j\left(\rho_j-1+\sum_{j=1,i\neq j}^{n-1}\rho_j+\gamma\right)=0$$

имела хотя бы одну $(n-1)$корней.

Выполнение двух необходимых условий вместе обеспечат существования $(n-1)$ нормально-регулярных решений.

Приведенные в (3.4) и (3.6) справедливость соотношения между функциями Φ_D и Ξ_D, где вырожденная гипергеометрическая функция Ξ_D определяются рядами (3.5) в правых частях нормально-регулярных решений (3.3). Свойства многомерных гипергеометрических функции находят широкое применение при исследовании многомерных вырожденных уравнений.

Такими исследованиями успешно занимаются представители математической школы Узбекистана, такие как Юлдашев Т.К., Хасанов А., Ергашев Т.Г. и др.[10]-[14].

Список использованной литературы:

1 Латышева К.Я., Терещенко Н.И, Орел Г.С. Нормально-регулярные решения и их приложения. Вища школа, Киев,1974, 135 с.

2 Slater L.J. and Lit D., Ph.D. Generalized Hypergeometric functions. Cambridge At the university Press. 1966.

3 Тасмамбетов Ж.Н. Построение нормальных и нормально-регулярных решений специальных систем уравнений в частных производных второго порядка. ИП Жанадилова, Актобе, 2015, 432 с.

4 Issenova A., Tasmambetov Zh.,.Rajabov N. (2021) On general properties of degenerate systems of second order partial differential equations of hypergeometric type // European journal of pure and applied mathematics. Vol. 14, №3, 1024-1043 https://ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/4016

5 Issenova A.A., Tasmambetov Zh.N., Talipova M.Zh. (2022) Construction of Solutions Hypergeometric System of Horn Type in the Form of Laguerre Polynomials // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №11, 3167–3173. https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222140153

6 Khudozhnikov V.Y. (2003) Two new degenerated hypergeometric functions of many variables and integral equations with them // Differential equations, 2003, vol.39, №6, 835-843.

7 Bateman G. and Erdèlyi A. Higher transcendental functions. Hypergeometric function. New York, Toronto, London: Graw-Hill Book Company, 1953.

8 Appell P. and Kampe de Feriet J., Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. -Polynomes d Hermite: Gauthier-Villars, New York, 1926.

9 Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leifzig: Leubner, 1906,120 p.

10 A. Hasanov, N. Djuraev (2022) Exact Solutions of the Thin Beam with Degrading Hysteresis Behavior // Lobachevskii Journal of Mathematics 3 (Vol.43), 577-584.

11 A. Hasanov, T. K. Yuldashev (2022) Analytic Continuation Formulas for the Hypergeometric Functions in Three Variables of Second Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 5 (Vol.43), 1134-1141.

12 T. G. Ergashev, N. J. Komilova (2022) Generalized Solution of the Cauchy Problem for Hyperbolic Equationwith Two Lines of Degeneracy of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics 3 (Vol.43), 556-565.

13 A. Hasanov, M. Ruzhansky (2020) Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 1 (Vol.41), 27-31.

14 M. Ruzhansky, A. Hasanov (2020) Self-similar Solutions of Some Model Degenerate Partial Differential Equations of the Second, Third and Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 6 (Vol.41), 1103-1114.

References:

1 Latysheva K.Ya., Tereshhenko N.I. Orel G.S. Normal'no-reguljarnye reshenija i ih prilozhenija [Normal-regular solutions and their applications] Vishha shkola, Kiev,1974, 135 s. (In Russian)

2 Slater L.J. and Lit D., Ph.D. Generalized Hypergeometric functions. Cambridge At the university Press. 1966.

3 Tasmambetov Zh.N. (2015) Postroenie normal'nyh i normal'no-reguljarnyh reshenij special'nyh sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh vtorogo porjadka [Construction of normal and normally regular solutions of special systems of partial equations of second order]. IP Zhanadilova, Aktobe, 432 s. (In Russian)

4 Issenova A., Tasmambetov Zh.,.Rajabov N. (2021) On general properties of degenerate systems of second order partial differential equations of hypergeometric type // European journal of pure and applied mathematics. Vol. 14, №3, 1024-1043 https://ejpam.com/index.php/ejpam/article/view/4016

5 Issenova A.A., Tasmambetov Zh.N., Talipova M.Zh. (2022) Construction of Solutions Hypergeometric System of Horn Type in the Form of Laguerre Polynomials // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №11, 3167–3173. https://link.springer.com/article/10.1134/S1995080222140153

6 Khudozhnikov V.Y. (2003) Two new degenerated hypergeometric functions of many variables and integral equations with them // Differential equations, 2003, vol.39, №6, 835-843.

7 Bateman G. and Erdèlyi A. Higher transcendental functions. Hypergeometric function. New York, Toronto, London: Graw-Hill Book Company, 1953.

8 Appell P. and Kampe de Feriet J., Fonctions Hypergeometriques et Hyperspheriques. -Polynomes d Hermite: Gauthier-Villars, New York, 1926.

9 Wilczynski E.J. Projective Differential Geometry of Curves and Ruled Surfaces, Leifzig: Leubner, 1906,120 p.

10 A. Hasanov, N. Djuraev (2022) Exact Solutions of the Thin Beam with Degrading Hysteresis Behavior // Lobachevskii Journal of Mathematics 3 (Vol.43), 577-584.

11 A. Hasanov, T. K. Yuldashev (2022) Analytic Continuation Formulas for the Hypergeometric Functions in Three Variables of Second Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 5 (Vol.43), 1134-1141.

12 T. G. Ergashev, N. J. Komilova (2022) Generalized Solution of the Cauchy Problem for Hyperbolic Equationwith Two Lines of Degeneracy of the Second Kind // Lobachevskii Journal of Mathematics 3 (Vol.43), 556-565.

13 A. Hasanov, M. Ruzhansky (2020) Hypergeometric Expansions of Solutions of the Degenerating Model Parabolic Equations of the Third Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 1 (Vol.41), 27-31.

14 M. Ruzhansky, A. Hasanov (2020) Self-similar Solutions of Some Model Degenerate Partial Differential Equations of the Second, Third and Fourth Order // Lobachevskii Journal of Mathematics 6 (Vol.41), 1103-1114.