МРНТИ 20.53:
УДК 539.3:622.24

DOI: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.11

М.Е. Есқалиев[1], А.А. Масимгазиева[1], Н.А. Нұрғали[1]

[1]Қазақ Ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ, Қазақстан

КЕСТЕМЕН БЕРІЛГЕН ФУНКЦИЯ МӘНДЕРІН ИНТЕРПОЛЯЦИАЛАУДАҒЫ ЕҢ КІШІ КВАДРАТТАР ӘДІСІНІҢ ТИІМДІЛІГІ

Аңдатпа

Мақалада кестемен берілген функция мәндерін интерполяциалаудағы ең кіші квадраттар әдісінің тиімділігі ең кіші квадраттар әдісінің (ЕКӘ) жалпы алгоритмі беріліп, тиімді программалау жолдары берілген. ЕКӘ – нің интерполяциялық көпмүшеліктерден айырмашылығы көрсетіліп, оның квадраттық варианты қарастырылған. ЕКӘ мазмұны сипатталып, алгоритмі берілген. Эксперименттік материал ретінде мысал беріліп, оны орындауға арналған нұсқаулар ұсынылған. ЕКӘ-нің тұрмыстық және практикалық есептерге қолдану ауқымы көрсетілген. Ең кіші квадраттар әдісінің қолдану ауқымы кең, әсіресе географиялық болжаулар, гидрометереологиялық бақылау, геологиялық қазба байлықтар қорын мөлшерлеу жұмыстарында қолданылады. Сондықтан қолданбалы есептеулерге кейбір мағынада қолайлы және кесте түрінде берілген функцияның жуық мәнін дәлірек есептеуге ЕКӘ пайдаланылады. Оның негізгі идеясы, өлшеу кезінде жіберген қателіктерден туған ауытқуларды жөндеп функцияны құру болып табылады.

Түйін сөздер: функция, алгоритм, матрица, квадрат, интерполяция, геология, аппроксимация.

М.Е. Ескалиев[1], А.А. Масимгазиева[1], Н.А.Нургали[1]
[1]Казахский Национальный женский педагогический университет, г.Алматы, Казахстан

В ИНТЕРПОЛЯЦИИ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИЙ, ЗАДАННЫХ ТАБЛИЦЕЙ ЭФФЕКТИВНОСТЬ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Аннотация

В статье дана общий алгоритм метода найменьших квадратов (МНК) для составления программного счета с учетом особенностей матрицы Грама. В действительности, подчеркивается разница и преймущество МНК от давно известных интерполяционных многочленов Лангранжа и Ньютона. Используя общий алгоритм МНК рассмотрен квадратный вариант МНК. Дана характеристика полного алгоритма квадратного варианта с помощью специальных выбранных математических формул. Указаны область применения МНК в бытовых и практических вычислительных задачах. Применение метода наименьших квадратов имеет широкий спектр, особенно при географических прогнозах, гидрометереологическом контроле, дозировке запасов геологических ископаемых. Поэтому для прикладных расчетов используются МНК для более точного расчета приближенных значений функций, которые в некоторых значениях подходят и представлены в виде таблиц. Ее основная идея заключается в том, чтобы создать функцию и исправить отклонения, вызванные погрешностями, допущенными при измерении.

Ключевые слова*:* функция, алгоритм, матрица, квадрат, интерполяция, геология, аппроксимация.

Abstract

IN INTERPOLATING THE VALUES OF FUNCTIONS SPECIFIED BY THE TABLE EFFECTIVENESS OF THE LEAST SQUARES METHOD

Eskaliyev M.E. [1], Masimgazieva A.A. [1], Nurgali D.A. [1]
[1]Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

The article provides a general algorithm of the method of least squares (OLS) for the compilation of a program account, taking into account the features of the Gram matrix. In fact, the difference and advantage of the OLS from the long-known Langrange and Newton interpolation polynomials is emphasized. Using the general MNC algorithm, the square version of the MNC is considered. The characteristic of the full algorithm of the square version is given using special selected mathematical formulas. The scope of OLS in household and practical computational problems is indicated. The application of the least squares method has a wide range, especially for geographical forecasts, hydrometeorological control, and dosage of geological resources. Therefore, for applied calculations, DVI is used for more accurate calculation of approximate values of functions that are suitable in some values and are presented in the form of tables. Its main idea is to create a function and correct deviations caused by errors made during measurement.

Keywords: Function, algorithm, matrix, square, interpolation, Geology, approximation.

Функцияны берілген кесте бойынша өрнектеуге интерполияциялық көпмүшеліктер ұсынылған [1-3]. Интерполияциялық көпмүшеліктерді практикалық есептерге пайдалана беру көп ретте қолайлы емес. Себебі, интерполяцияланатын функцияның мәні кей жағдайда кестемен берілген мәндеріне көбірек ауытқып кетеді. Сондықтан қолданбалы есептеулерге кейбір мағынада қолайлы және кесте түрінде берілген функцияның жуық мәнін дәлірек есептеуге *ең кіші квадраттар әдісі* [ЕКӘ] пайдаланылады. Оның негізгі идеясы, өлшеу кезінде жіберген қателіктерден туған ауытқуларды жөндеп функцияны құру болып табылады. Жақын және алыс шетел ғалымдарының осы бағытта жарияланған еңбектері бар, Дж. Форсайт, М. Малькольм, К.Молер [4] мақаласында Грам матрицасы бар теңдеулер жүйесін шешу үшін сингулярлық ыдырату әдісі жасалған, ал Р.С. Гутер, Б.В Овчинский [5] еңбегінде ең кіші квадраттар әдісінің еркін және ортогоналлдық базистегі орны анықталған. ЕКӘ арқылы полиномдарды аппроксимациялау және функционалды минимумдау Н.Н.Калиткиннің [6] монографиясында бар. Техникалық есептерді жуықтап сандық әдіспен шешуде функцияны квадраттық аппроксимациялау отандық ғалымдар З.К. Куралбаев, А.А. Ержан[6] еңбектерінен көруге болады. Ең кіші квадраттар әдісіне біршама жақын шекті элементтер әдісімен геомеханиканың кейбір қолданбалы есептері Р.Баймаханның, Н.Құрманбекқызының К.Ч.Қожогуловтың [7] еңбектерінде қарастырылған.

ЕКӘ жалпы алгоритмі

Берілген кестенің түйіндерін x_iарқылы белгілейік, мұндағы $\emptyset \le i \le n$ түйіндінің номер түйін нүктелеріндегі тәжірибеден алынған мәндер $f(x_i) = f_i$ белгілі болсын. f_i –ді дискретті аппроксималау тәуелділігі үшін, $\varphi(x)$ үздіксіз функциясын енгіземіз. Түйіндерде $\varphi(x)$ және $f(x)$ функциялары $\varepsilon_i = \varphi(x_i) - f(x)$ шамасына ерекшелінеді. ε_i ауытқуы оң немесе теріс мәнге ие болуы мүмкін. Таңбаларды ескермес үшін әрбір ауытқуды квадраттап және барлық түйіндердегі ауытқуларды қосындылаймыз.

$$Q = \sum_{i=0}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i - f(x)_i))]^2 . \tag{1}$$

Көп ретте $\varphi(x)$ функциясы сызықтық комбинация түрінде алынады.

$$\varphi(x) = C_0\varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \cdots + C_m\varphi_m(x), \tag{2}$$

$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_m(x)$ - базалық функциялар;

$m \le n;\ C_0, C_1, C_m$ - Q шамасын минимизациялау кезінде анықталатын белгісіздер.

Математикалық түрде қосынды квадраттарының минумумы Q-ды $C_k, 0 \le k \le m$ коэффициенттері бойынша дербес туынды алып нольге теңестіреміз:

$$\frac{\partial Q}{\partial C_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[C_0\varphi_0(x_i) + C_1\varphi_1(x_i) + \cdots + C_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_0(x_i) = 0,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[C_0\varphi_0(x_i) + C_1\varphi_1(x_i) + \cdots + C_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_1(x_i) = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial C_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[C_0\varphi_0(x_i) + C_1\varphi_1(x_i) + \cdots + C_m\varphi_m(x_i) - f_i]\varphi_m(x_i) = 0$$

Сызықты алгебралық теңдеулер жүйесінен (3) барлық коэффицинттері анықталады. (3) жүйе қалыпты теңдеулер жүйесі. Бұл жүйенің матрицасы мынадай түрде болады:

$$\begin{vmatrix} (\varphi_0, \varphi_0), & (\varphi_0, \varphi_1) \ldots (\varphi_0, \varphi_m) \\ (\varphi_0, \varphi_1), & (\varphi_1, \varphi_1) \ldots (\varphi_1, \varphi_m) \\ (\varphi_0, \varphi_m), & (\varphi_1, \varphi_m) \ldots (\varphi_m, \varphi_m) \end{vmatrix} \tag{4}$$

және Грам матрицасы деп аталады. Грам матрицасының элементтері базистік функцияларының көбейтіндісі бола алады.

$$(\varphi_j, \varphi_k) = \sum_{i=0}^{h} \varphi_j(x_i)\varphi_k(x_i) \tag{5}$$

(3) теңдеулер жүйесінің кеңейтілген матрицасын Грам матрицасының оң жағына бос мүшелерді енгізіп алуға болады.

$$\begin{vmatrix} \varphi_0, & f \\ \varphi_1, & f \\ \ldots & \\ \varphi_m, & f \end{vmatrix} \tag{6}$$

Мұндағы скаляр көбейтінділер, бос мүше бағанасы бола алады және (5) өрнек сияқты анықталады

$$(\varphi_k, f\,) = \sum_{i=0}^{h} \varphi_k(x_i) f_i \qquad (7)$$

Ең кіші квадраттар әдісі алгоритмінің програмасының жүзеге асырудағы Грам матрицасының пайдалы қасиетерін атауға болады:

1) Матрица симметриялы болса, яғни $a_{ij} = a_{ij}$, матрицаны толтыру кезінде есептеу көлемі азаяды.

2) Матрица ойдағыдай анықталған болса, яғни қалыпты теңдеулер жүйесін Гаус әдісімен шешуде бас элементті таңдауды ескермесе де болады.

3) Егерде базис ретінде сызықты тәуелсіз функциялар $\varphi_k, (\mathrm{x})$ алынса, онда матрицаның анықтауышы нолден айрықша болады да (3) жүйенің бір ғана шешуі болады.

ЕКӘ-ң программаға арналған сызықтық варианты, оның жалпы алгоритмі негізінде қарастырылған [6]. *ЕКӘ*-ң квадраттық вариантына сипаттама береміз.

Функцияның кейбір мәндері кесте түрінде берілсін.

x	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

Мына өрнектің мәні

$$S = \sum_{i=1}^{n} (y_i - y_i^*)^2 = (y_1 - y_1^*)^2 + (y_2 - y_2^*)^2 + \cdots (y_n - y_n^*)^2 \qquad (8)$$

минимум болатындай $y = f(x)$ функциясын іздеу керектігі туындайды.

$f(x)$ үшін әртүрлі типті функцияларды алуға болады. Қарапайым болу үшін квадратты көпмүшелік жағдайымен шектелеміз, яғни

$$y^* = a_1 x^2 + a_2 x + a_3 \qquad (9)$$

Сонымен, (8) өрнектің мәндері мининум болатындай (9) көпмүшеліктің яғни, осы көпмүшеліліктің $a_1,\ a_2,\ a_2$ коэффициенттерін іздеу қажеттілігі туындайды. Басқаша айтқанда мына қосындының минимумы болу керек:

$$S = (y_i - a_1 x_i^2 - a_2 x_i - a_3)^2 = (y_1 - a_1 x_1^2 - a_2 x_1 - a_3)^2 + (y_2 - a_1 x_2^2 - a_2 x_2 - a_3)^2 + \cdots (y_n - a_1 x_n^2 - a_2 x_n - a_3)^2 \qquad (10)$$

Жалпы алгоритм негізінде (3) өрнектегі амалға сәйкес қарастырылып отырған барлық сандық түзуде, функция үшін функцияның минимумы болатын нүктеде оның туындысы нольге тең [8]. Есептің шарты бойынша x_1 және y_1 мәндері кестемен берілген белгілі тұрақты шамалар.

Алдымен қосынды (10) өрнекті тек қана a_1 айнымалымен, одан кейін a_2 айнымалымен, соңында a_3 айнымалының функциясы деп қарастырып, осы айнымалылар бойынша дербес туындыларын нольге теңейміз де нәтижелерін ықшамдап $a_1,\ a_2$ және a_3 үшін үш белгісізі бар үш сызықты алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i^2\ ,$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i x_j\ , \qquad (11)$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) a_1 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right) a_2 + n a_3 = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

Алынған (11) жүйені шешу қиын емес, жүйе үйлесімді. Табылған $a_1,\ a_2$ және a_3 коэффициенттері арқылы (9) өрнектегі белгісіз y^* функциясын анықтаймыз. (9) өрнектің басқадай түрде берілу жолдары бар.

Ең кіші квадраттар әдісінің қолдану ауқымы кең, әсіресе географиялық болжаулар, гидрометереологиялық бақылау, геологиялық қазба байлықтар қорын мөлшерлеу жұмыстарында қолданылады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. *Демидович В.П. и Марон И.А. Основы вычислительной математики. Изд. «Наука», М., 1966.*
2. *Мак-Кракен Д., Дорн У., Численны методы и программирование на ФОРТРАНе, Мир, 1969.*
3. *Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, 1954.*
4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Молер К.. //Машинные методы математических вычислений. Перевод с англ. –М.: Мир, 1980.*
5. *Гутер Р.С., Овчинский Б.В. //Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. // -2-изд.перераб. –М.: Наука, 1970. -432с.*
6. *Калиткин Н.Н., Численные методы. // -М.: Наука, 1978. -511с.*
7. *Баймахан Р., Қожогулов Ч., Н.Құрманбекқызы К., Разработка методики определения физико-механических свойств двухфазного водонасыщенного грунта. // Современные проблемы сплошных сред.Вып.9. Гидрозодинамика, геомеханика и геотехнологии. –Бишкек, 2009.*
8. *Запорожец Г.И., Руководство к решению задач по математическому анализу. Изд. Высшая школа, М., 1966.*

МРНТИ 27.01.05
УДК 517.983.25

DOI: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.12

Г.Ж. Естаева[1] , Т.Н. Сагындыков[1]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ИНДУКЦИЯ ӘДІСІНІҢ СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Аңдатпа

Барлық математикалық зерттеулердің негізінде дедуктивтік және индуктивтік әдістер жатады. Ойлаудың дедуктивтік әдісі – ол жалпыдан дербеске көшу, яғни бастапқысы жалпы нәтиже болатын, ал қорытындысы – дербес нәтиже болатын ойлау. Индукция әдісі дербес жағдайдан жалпы нәтижеге көшкенде қолданылады. Яғни дедуктивтік әдіске қарама-қарсы әдіс.Математикалық тұжырымдарды дәлелдеудің қажетті әрі тиімді әдісі – математикалық индукция әдісінің математиканың әртүрлі бөлімдеріндегі есептерді шығаруда қолданылу мүмкіндіктері мақалада қарастырылған. Бұл мақалада математикалық индукция әдісін әртүрлі тепе-теңдіктерді, теңсіздіктерді дәлелдеуде, әр түрлі ретті матрицаның n-дәрежесін, функциялардың n-ретті туындыларын, n-ретті анықтауыштарды, кейбір бірінші текті меншіксіз интегралдарды есептегенде, бөлінгіштікке берілген тұжырымдарды дәлелдеуде қолданылуы көрсетілген.

Түйін сөздер: математикалық индукция әдісі, математикалық индукция қағидасы, теңдік, теңсіздік, интеграл, индукция базисі, n-ретті анықтауыш, n-ретті туынды.

Аннотация

Г.Ж. Естаева[1] , Т.Н. Сагындыков[1]

[1]Казахский национальный педагогический университет им.Абая, г.Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧАХ

В основе всех математических исследований лежат дедуктивные и индуктивные методы. Метод дедуктивного мышления – это переход от общего к частному, т.е. рассуждение, где исходное является общим положением, а заключение частным результатом. Метод индукции используется при переходе от частного случая к общему положению, т.е. это метод, противоположный дедуктивному. В работе рассмотрены возможности применения необходимого и эффективного метода доказательства математических утверждений – метода математической индукции к решению задач различных разделов математики.

В данной статье приведены применения метода математической индукции для доказательства различных тождеств, неравенств, для вычисления n-ой степени матриц различных порядков, производных n-го порядка функций, определителей n-го порядка, некоторых несобственных интегралов *1*-го рода, и для доказательства утверждений на делимость.

Ключевые слова: метод математической индукции, принцип математической индукции, равенство, неравенство, интеграл, базис индукции, определитель n-го порядка, производная n-го порядка.