МРНТИ 27.23.15
УДК 517:372.8

10.51889/2959-5894.2023.83.3.012

Б.С. Ханжарова

Казахский Национальный женский педагогический униветситет, г. Алматы, Казахстан
**e-mail: hanzharovabayan@gmail.com*

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫХ ФУНКЦИЙ БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация

В школьном курсе изучения алгебры и начал анализа основное внимание уделяется обучению учащихся исследованию функций с помощью дифференциального исчисления, т. е. исследованию функции новым методом - методом математического анализа. Развитие функциональных представлений помогает старшеклассникам получить наглядные представления о непрерывности функции на области ее определения, научиться строить их графики. Это объясняется тем, что понятие функции широко используется в разных разделах математики, в решении различных прикладных задач. В статье рассматриваются различные приемы для исследования наибольших и наименьших значений некоторых алгебраических и трансцендентных функций без использования производной. Умение применять различные методы исследования функций может способствовать успешному усвоению элементов математического анализа, развитию исследовательских навыков, интереса учащихся к проведению научных исследований и, в целом, повысить интерес к математике.

Ключевые слова: алгебра и начала алализа, исследование функций, наибольшее и наименьшее значение, производная, методы.

Аңдатпа

Б.С. Ханжарова
Казақ Ұлттық қыздар педагогикалық униветситеті, Алматы қ., Қазақстан

КЕЙБІР АЛГЕБРАЛЫҚ ЖӘНЕ ТРАНСЦЕНДЕНТТІК ФУНКЦИЯЛАРДЫ ТУЫНДЫНЫ ПАЙДАЛАНБАЙ ЗЕРТТЕУ

Мектеп алгебра және талдау бастамаларын оқыту курсында оқушылардың негізгі назары функцияларды дифференциалдық есептеулер көмегімен зерттеуге, яғни функцияны жаңа әдіспен - математикалық талдау әдісімен зерттеуге үйретуге аударылады. Функционалдық көріністерді дамыту жоғары сынып оқушыларына функцияның анықтау облысында үздіксіздігі туралы көрнекі түсініктер алуға, олардың графиктерін құруды үйренуге көмектеседі. Бұл функция ұғымының математиканың әр түрлі бөлімдерінде, түрлі қолданбалы есептерді шешуде кеңінен қолданылуына байланысты. Мақалада кейбір алгебралық және трансценденттік функциялардың ең үлкен және ең кіші мәндерін зерттеу үшін туындыны пайдаланбай әртүрлі тәсілдер қарастырылады. Функцияларды зерттеудің әртүрлі әдістерін қолдана білу математикалық талдау элементтерін ойдағыдай меңгеруге, зерттеу дағдыларын дамытуға, оқушылардың ғылыми зерттеулер жүргізуге қызығушылығын арттыруға және жалпы математикаға қызығушылықты арттыруға ықпал етеді.

Түйін сөздер: алгебра, функцияларды зерттеу, ең үлкен және ең кіші мәні, туынды, әдістер.

Abstract

STUDY OF CERTAIN ALGEBRAIC AND TRANSCENDENTAL FUNCTIONS WITHOUT THE USE OF A DERIVATIVE

Khanzharova B.S.
Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

In the school course study of algebra and the beginning of analysis, the main focus is on teaching students to study functions using differential calculus, that is, to study function by a new method - the method of mathematical analysis. The development of functional representations helps high school students get visual ideas about the continuity of a function in the area of its definition, learn to build their graphs. This is due to the fact that the concept of function is widely used in different branches of mathematics, in solving various applied problems. The paper examines various techniques for investigating the largest and smallest values of some algebraic and transcendental functions without using a derivative. The ability to apply various methods of studying functions can contribute to the successful assimilation of elements of mathematical analysis, the development of research skills, the interest of students in conducting scientific research and, in general, increase interest in mathematics.

Keywords: algebra, function study, largest and smallest value, derivative, methods.

Введение

Перед школьным учителем математики стоит задача не только обеспечить математическую подготовку учащихся, достаточную для продолжения образования, но и развивать их интеллектуально, формировать у них математический стиль мышления. Практика работы показывает, что в овладении учащимися специальными умениями, особенно при обучении началам анализа, есть определённые трудности [1,2]. Например, учащиеся не всегда могут правильно применять формулы, теоремы, правила для решения конкретной задачи, другими словами, они не могут применять знания для выполнения определённых действий; некоторые учащиеся чётко формируют достаточные условия возрастания и убывания функции, но не всегда могут на основе этого отыскать промежутки возрастания и убывания конкретной функции. Отсюда возникает задача поиска новых методов обучения решению математически задач и выработки у учащихся соответствующих умений [3,4].

В данной статье рассматривается один из подходов к обучению умениям в курсе алгебры и начал анализа, относящимся, в частности, к решению задач на нахождение наибольших и наименьших значений функции.

Методология исследования

Задачи, представленные в данной статье требуют необычных идей, заключающиеся в использовании теоремы о среднем арифметическом *n* положительных чисел $A=\dfrac{x_1+x_2+...+x_n}{n}$ и геометрическом $G=\sqrt{x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n}$ [5], оценки для суммы двух взаимно обратных положительных чисел *a* и *1/a* : $a+\dfrac{1}{a}\geq 2$, причем равенство возможно, если *a=1*, которая является следствием этой теоремы [6] . Также при исследовании функции на наибольшее и наименьшее значение используют метод выделения полного квадрата из квадратного трехчлена:

$$ax^2+bx+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a}=a(x+m)^2+p\text{, где } m=\frac{b}{2a},\ p=\frac{4ac-b^2}{4a}=-\frac{D}{4a};$$

и формулу сворачивания тригонометрического выражения $aSinx+bCosx$ с помощью специально подобранного вспомогательного угла φ:

$$aSinx+bCosx=\sqrt{a^2+b^2}Sin(x+\varphi)\ \ [7,8].$$

Использование этих методов исследования дает возможность ускорить решение задачи. На решение этих задач по классическому правилу отыскивания наибольшего и наименьшего значений функций с применением производной затратилось бы достаточно длительное время [9].

Методы исследования

Программа по алгебре для 10 класса в средней школе предусматривает исследования функций без использования производной до изучения элементов математического анализа. Наиболее трудным этапом исследования функций является нахождение глобальных экстремумов функций. Рассмотрим различные приемы для исследования на наибольшее и наименьшее значения некоторых алгебраических и трансцендентных функций.

Пример 1. Найти наибольшее значение функции

$$f(x)=tg\left(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\right)$$

при условии $arctg\frac{x}{2\sqrt{3}}\geq\frac{\pi}{6}$;

Решение:

Найдем область определения функции из следующих условий:

$$\begin{cases} 2-\sqrt{1+3x-x^2}>0 \\ 1+3x-x^2\geq 0 \\ arctg\dfrac{x}{2\sqrt{3}}\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+3x-x^2<4 \\ x^2-3x-1\leq 0 \\ \dfrac{x}{2\sqrt{3}}\geq\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+3>0 \\ x^2-3x-1\leq 0 \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R \\ \dfrac{3-\sqrt{10}}{2}\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{10}}{2} \\ x\geq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x\leq\frac{3+\sqrt{10}}{2};$$

$$D(f)=\left[2;\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right] \quad (1)$$

Рассмотрим функцию

$$\varphi(x)=\sqrt{1+3x-x^2} \quad (2)$$

так как $\varphi'(x)=\frac{-2x+3}{2\sqrt{1+3x-x^2}}<0$,

$\forall x\in\left[2;\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right]$, то $\varphi(x)$ $\left[2;\frac{3+\sqrt{10}}{2}\right]$, следовательно $max\varphi(x)=\varphi(2)=\sqrt{3}$.

тогда

$$2-\sqrt{1+3x-x^2}\geq 2-\sqrt{3} \quad (3)$$

Из неравенства (3) имеем

$$\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\leq\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right) \quad (4)$$

Из (4) следует

$$f(x)=tg(\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{1+3x-x^2}\right)\leq tg\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right),$$

Прием последнее неравенство обращется в равенство обращается в равенство, тогда и только тогда, когда

$x=2$. Значит $maxf(x)=f(2)=tg\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right), x\in D(f)$

Ответ: $maxf(x)=tg\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}\left(2-\sqrt{3}\right), x\in D(f)$

Пример 2. Найти наименьшее значение функции

$f(x)=4x+\dfrac{9\pi^2}{x}+sinx$, при $x>0$

Решение: Для нахождения $minf(x)\ x>0$ используем теорему о средних арифметическом и геометрическом: пусть $x_1,x_2,\dots,x_n$ положительных числа, то

$$G=\sqrt[4]{x_1,x_2,\dots,x_n}\leq\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}=A \quad (1)$$

В силу (1)

$$\frac{4x+\dfrac{9\pi^2}{x}}{2}\geq\sqrt{4x\cdot\frac{9\pi^2}{x}}=6\pi,$$

$\forall x>0$

Отсюда $4x+\frac{9\pi^2}{x}\geq 12\pi, x>0$ (2)

Тогда $f(x)\geq 12\pi+sinx\geq 12\pi-1$, так как $sinx\geq -1$

Прием $f(x)\geq 12\pi-1 \Leftrightarrow sinx=-1 \Rightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2n\pi\ n\in N$ (т.к. $x>0$)

$$min\,f(x)=min\,f(x)=12\,\pi-1=f(-\frac{\pi}{2}+2n\pi)\ n\in N$$

Ответ:
$min\,f(x)=12\,\pi-1$
$x\in(0;+\infty)$

Пример 3

Найти наибольшее значение функции

$$f(x) = \frac{10}{x^2 + 4\pi x + 40} + \cos x$$

Решение: область определения функции $D(f) = R = (-\infty, \infty)$

Так $x^2 + 4\pi x + 40 > 0$**,** $\forall x \in R$

Рассмотрим квадратный трехчлен:

$$x^2 + 4\pi x + 40 = (x + 2\pi)^2 - 4\pi^2 + 40 = (x + 2\pi)^2 + (40 - 4\pi^2) \geq 40 - 4\pi^2.$$

Тогда $0 < \frac{10}{x^2+4\pi x+40} \leq \frac{10}{40-4\pi^2} = \frac{5}{20-2\pi^2}$

Так как $-\text{I} \leq cosx \leq 1$, то $-\text{I} \leq f(x) \leq 1 + \frac{5}{20-2\pi^2} = \frac{25-2\pi^2}{20-2\pi^2}$

$$max\, f(x) = \frac{25 - 2\pi^2}{20 - 2\pi^2} = f(2n\pi)$$

$x \in R$

Ответ: $max\, f(x) = \frac{25-2\pi^2}{20-2\pi^2}\ x \in R$

Пример 4.

Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = \frac{3x + 1}{(3x + 1)^2 + 1}$$

Решение: Очевидно $D(f) = R$

Принимаем оценку для сумма двух, взаимно обратных неотрицательных чисел:

$$|a| + \frac{1}{|a|} \geq 2, \forall x \neq 0 \quad (1)$$

а) если $a > 0$, то $a + \frac{1}{a} \geq 2$ (2)

б) если $a < 0$, то $a + \frac{1}{a} \leq -2$ (3)

1) Пусть $3x + 1 > 0\ \Rightarrow\ x > -\frac{1}{3}$

Тогда для $x > -\frac{1}{3}$ в силу (2)

$3x + 1 + \frac{1}{3x+1} \geq 2$ (4)

Из (4) следует: $\frac{(3x+1)^2+1}{3x+1} \geq 2, x > -\frac{1}{3}$

Откуда $f(x) = \frac{3x+1}{(3x+1)^2+1} \leq \frac{1}{2}$

Причем $f(x) = \frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ x = 0$

2) Пусть $x < -\frac{1}{3}$. Тогда $3x + 1 < 0$ и в силу (3)

$3x + \frac{1}{3x+1} \leq -2\ \Leftrightarrow\ \frac{(3x+1)^2+1}{3x+1} \leq -2;\ \Rightarrow\ f(x) = \frac{(3x+1)^2+1}{3x+1} \geq -\frac{1}{2}$, причем

$f(x) = -\frac{1}{2}$, тогда и только тогда, когда $x = -\frac{2}{3}$;

3) Пусть $x = -\frac{1}{3}$; $f(-\frac{1}{3}) = 0$

Итак $-\frac{1}{2} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, x \in R\ \Rightarrow\ min\, f(x) = -\frac{1}{2};\ max\, f(x) = \frac{1}{2}\quad x \in R$

Ответ:

$min\, f(x) = -\dfrac{1}{2};\ x \in R$

$max\, f(x) = \frac{1}{2}; x \in R$

Пример 5.

Найти наименьшее инаибольшее значения функции

$$f(x) = \ sin^2 x + cosx - \frac{1}{2}$$

Решение: $D(f) = (-\infty, \infty)$

Имеем

$$f(x) = 1 - cos^2 x + cosx - \frac{1}{2} = -cos^2 x + cosx + \frac{1}{2} \quad (1)$$

Выделим полный квадрат в квадратном трехчлене относительно $cosx$.

Тогда

$$f(x) = -\left(\left(cosx - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4} - \left(cosx - \frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{3}{4} \quad (2)$$

Причем $f(x) = \frac{3}{4}$ тогда и только тогда, когда $cosx = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in z$

Получим: $max\, f(x) = \frac{3}{4}\ x \in R$

Так как

$$sin^2 x \ge 0, cosx \ge -1, \text{то } f(x) = \ sin^2 x + cos^2 x - \frac{1}{2} \ge -\frac{3}{2} \quad (3)$$

Значит $min\, f(x) = -\frac{3}{2} = f(\pi + 2\pi)\ x \in R\ n \in z$

Ответ: $\max f(x) = \frac{3}{4}; x \in R \qquad min\, f(x) = -\frac{3}{2}\ x \in R$

Для решения сравнительно трудных задач необходимо и достаточно иследование, соотведующих выражений на экстремальные значениия, упрощающих уравнения, неравенства, системы уравнений.

Пример 6

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3sin3x + cosy = -4 \ (1) \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2} \ (2) \end{cases}$$

Решение:

Для выполнение равенства (1) необходимо и достаточно чтобы выражения $3sin3x$, $cosy$ принимали наименьше значения, тогда система уравнений упрощается

$$\begin{cases} 3sin3x = -3 \\ cosy = -1 \\ x + y = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin3x = -1 \\ cosy = -1 \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin3x = -1 \\ \cos\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right) = -1 \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin3x = -1 \\ -sin3x = -1 \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} sin3x = -1 \\ sin3x = 1 \\ y = \dfrac{3\pi}{2} - x \end{cases}$$

$sinx = 1 \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi, n \in z$ (3)

Подставим (3) в уравнение $sin3x = -1$: $\sin(3(\frac{\pi}{2} + 2n\pi)) \equiv 1, n \in z$

Значит (3) есть решение уравнение $sin3x = -1$.

Тогда $y = \frac{3\pi}{2} - x = \frac{3\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = \pi - 2n\pi, n \in z$

Ответ: множество $(x; y)$, где $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$, $y = \pi - 2n\pi$ или $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi;\ \pi - 2n\pi\right), n \in z$

Пример 7.

Решить уравнение

$$x^{\mathbf{2}} + 1 + |x - 1| = 2|x| \quad (1)$$

Решение.

Имеем

$$x^{\mathbf{2}} - 2|x| + 1 + |x - 1| = 0 \ \Rightarrow \ (|x| - 1)^2 + |x - 1| = 0 \quad (2)$$

Так как $(|x|-1)^2 \geq 0$, то есть $\min\limits_{x\in R}(|x|-1)^2 = 0$ и $|x-1| \geq 0$, значит $\min\limits_{x\in R}(|x-1|) = 0$, то сумма нетривиальных чисел (2) равно нулю тогда и только тогда когда $|x|-1)^2$ и $|x-1|$ примут значение 0, то есть одновременно наименьшие значения.

Отсюда

$$\begin{cases}(|x|-1)^2 = 0 \\ |x-1| = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x| = 1 \\ x-1 = 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = \pm 1 \\ x = 1\end{cases} \Rightarrow x = 1$$

Таким образом получили общее значение $x = 1$.

Ответ: $x = 1$

Пример 8.

Найти все a, при которых система

$$\begin{cases}x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 \leq 4siny - 3cosy \\ 0 \leq y \leq 2\pi\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение: упростим тригонометрическое выражение $4siny - 3cosy$ с помощью вспомогательнотельного угла φ.

$$4siny - 3cosy = \sqrt{4^2+3^2}\left(\frac{4}{5}siny - \frac{3}{5}cosy\right) = 5(sinycos\varphi - cosysin\varphi), \text{ где}$$

$$\begin{cases}cos\varphi = \frac{4}{5} \\ sin\varphi = \frac{3}{5}\end{cases} \Rightarrow tg\varphi = \frac{3}{4};\ \varphi = arctg\frac{3}{4};\ \text{вспомогательный угол.}$$

Тогда

$$4siny - 3cosy = 5\sin(y-\varphi) \quad (1)$$

Неравенство упрощается, если для его выполнения необходимо и достаточно, чтобы тригонометрическое выражение принимало наибольшее значение:

$$\max(4siny - 3cosy) = 5\ 0 \leq y \leq 2\pi$$

Тогда имеет:

$$\begin{cases}x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a + 3 - 5 \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 2\pi\end{cases} \quad (2)$$

Система (2) будет иметь единственное решение, если дискринимант квадратного трехчлена $(x^2 + 2ax + 4a^2 - 5a - 2)$ будет равен 0.

$$D_1 = a^2 - 4a^2 + 5a + 2 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+24}}{6} = \left[\begin{array}{l}2 \\ -\frac{1}{3}\end{array}\right.$$

1) Пусть $a = 2$, тогда из (2) $\Rightarrow \begin{cases}x^2 + 4x + 4 \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+2)^2 \leq 0 \\ 0 \leq y \leq 2\pi\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = -2 \\ 0 \leq y \leq 2\pi\end{cases}$

Так как

$4siny - 3cosy = 5 \Rightarrow$ в силу (1) $\Rightarrow y - \varphi = \frac{\pi}{2} + 2R\pi;\ y = \frac{\pi}{2} + actg\frac{3}{4} + 2R\pi$; Но $0 \leq y \leq 2\pi$, тогда $R = 0$, и $y = \frac{\pi}{2} + actg\frac{3}{4}$;

Итак $\begin{cases}x = -2 \\ y = \frac{\pi}{2} + actg\frac{3}{4},\end{cases}$

2) Пусть $a = -\frac{1}{3}$;

тогда из (2)

$$\Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{4}{9} + \frac{5}{3} - 2 \le 0 \Rightarrow x^2 - \frac{2}{3}x + \frac{19}{9} - 2 \le 0 \Rightarrow \begin{cases} (x - \frac{1}{3})^2 \le 0 \\ 0 \le y \le 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{\pi}{2} + actg\frac{3}{4} \end{cases}$$

Ответ: $a = 2$; $a = -\frac{1}{3}$

Заключение

Для успешного решения различных задач, связанных с исследованием функций с помощью производной и без применения производной обучающимся недостаточно рассматривать только типовые задания. Важно владеть понятием производной, знать свойства касательной к графику и уметь исследовать функцию, оценивать скорость процесса, описываемого функцией и изменения ее величины.

Умение исследовать функции на глобальный экстремемум необходимо учащимся для развития исследовательних навыков и для усвоения элементов математического анализа. Учащийся, овладевший умением исследовать функции, не только применяет его для решения некоторого задания, но и может описать содержание своей работы, охарактеризовать сущность решения. Такого рода задачи способствуют активизации мыслительной деятельности учащихся, вызывают больший интерес к изучению математики и могут быть использованы при подготовке к олимпиадам различного уровня.

Список использованных источников:

1 Таубаева Ш.Т. Методология и методы педагогического исследования [Электронный ресурс]: учебное пособие / Ш.Т. Таубаева, А.А. Булатбаева. Электрон. текстовые данные, Алматы: Казахский национальный университет им. Аль-Фараби. 2015- 214 с.

2 Шмигирилова И.Б. Задачный подход как основа эффективного обучения школьников математике // Актуальные проблемы методики обучения информатике и математике в современной школе. Материалы международной научно-практической интернет-конференции. М.: МПГУ. 2019. с. 449–456.

3 Далингер В.А. Методика обучения математике. Поисково-исследова-тельская деятельность учащихся: учебник и практикум для вузов /. – 2-е изд., испр. и доп. – М.: Издательство Юрайт, 2018. – 460 с.

4 Кенбаева Н.А., Мунарбаева. Д.А. Оқушының өздігінен білім алуын және шығармашылық дағдысын қалыптастыру жолдары / International Scientific and Practical Conference “WORLD SCIENCE” №6 (22), vol.4, June 2017. – с. 32–35.

5 Байслонова Р.Н. «Производная» в общеобразовательных классах и в классах с углубленным изучением математики [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://infourok.ru/issledovatelskaya-deyatelnost-proizvodnayav-obscheobrazovatelnih-klassah-i-v-klassah-s-uglublennim-izucheniemmatematiki-731784.htm

6 Виленкин Н.Я., Ивашов - Мусатов О.С. Алгебра и начала математического анализа/учебник для учащихся общеобразовательных организаций.М.:2015г.

7 Сергеев И.Н. Математика: Сборник заданий письменных вступительных экзаменов в МГУ им. М.В.Ломоносова. М: 2008 г

8 Мордкович А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10- 11 классы./ Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений (базовый уровень) М.: Мнемозина, 2013. – 400 с.

9 Никольский С. М. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс: учебник для общеобразовательных организаций: базовый и проф. уровни - М.: Просвещение, 2009. — 464 с

10 Шаверская, О. Н. Развитие познавательных интересов учащихся / О. Н. Шаверская // Практический журнал для учителя и администрации школы. –2002. –No 10. –с. 60-64

11 Пластун С. В. «Формирование ключевых компетентностей обучающихся при изучении производной функции в школе» [Электронный ресурс] – Режим доступа: https://infourok.ru/formirovanie-klyuchevihkompetentnostey-obuchayuschihsya-pri-izuchenii-proizvodnoy-funkcii-v-shkole3428634.html

References:

1 Taubaeva Sh.T. Methodology and methods of pedagogical research [Electronic resource]: textbook/Sh.T. Taubaeva, A.A. Bulatbaeva. Electron. text data, Almaty: Al-Farabi Kazakh National University. 2015- 214 c.

2 Shmigirilova I.B. Task approach as the basis of effective teaching of schoolchildren in mathematics//Actual problems of the methodology of teaching computer science and mathematics in modern school. Materials of the international-native scientific and practical Internet conference. M.: Moscow State Pedagogical University. 2019. p. 449-456.

3 Dalinger V.A. Methodology for teaching mathematics. Search and research and physical activities of students: a textbook and a workshop for universities/. - 2nd ed., Rev. and additional. - M.: Publishing House Yuryt, 2018. - 460 s.

4 Kenbaeva N.A., Munarbaeva. D.A. Ways to form self-education and creative skills of the student/International Scientific and Practical Conference "WORLD SCIENCE" No. 6 (22), vol.4, June 2017. - p. 32-35.

5 R.N. Baislonova "Derivative" in general education classes and in classes with in-depth study of mathematics [Electronic resource] - Access mode: https://infourok.ru/issledovatelskaya-deyatelnost-proizvodnayav-obscheobrazovatelnih-klassah-i-v-klassah-s-uglublennim-izucheniemmatematiki-731784.htm

6 Vilenkin N.Ya., Ivashov - Musatov O.S. Algebra and the beginning of mathematical analysis/textbook for students of educational organizations. M.: 2015

7 Sergeev I.N. Mathematics: Collection of tasks of written entrance exams at Moscow State University named after M.V. Lomonosova. M: 2008

8 Mordkovich A. G. Algebra and the beginning of mathematical analysis. Grades 10-11/Textbook for students of educational institutions (basic level) M.: Mnemosina, 2013. - 400 p.

9 Nikolsky S. M. Algebra and the beginning of mathematical analysis. Grade 11: textbook for general education organizations: basic and prof. levels - M.: Enlightenment, 2009. - 464 p.

10 Shaverskaya, O. N. Development of cognitive interests of students/O. N. Shaverskaya//Practical magazine for teacher and school administration. –2002. –No 10. -s. 60-64

11 Plastun S. V. "Formation of key competencies of students in the study of a derivative function in school" [Electronic resource] - Access mode: https://infourok.ru/formirovanie-klyuchevihkompetentnostey-obuchayuschihsya-pri-izuchenii-proizvodnoy-funkcii-v-shkole3428634.html