ҒТАХР 27.31.15, 27.31.21

10.51889/2959-5894.2023.84.4.004

А.М. Сыздыкова[1], О.В. Разина[1], С.К. Бургумбаева[1]*

[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан
[*]e-mail: syzdykova_am@mail.ru

ЕКІ-ӨЛШЕМДІ КОНОПЕЛЬЧЕНКО-ДУБРОВСКИЙ ТЕҢДЕУІНІҢ НАҚТЫ ШЕШІМДЕРІ

Аңдатпа

Математикалық физика теңдеулерінің нақты шешімдерін зерттеу кейбір физикалық процесстерді түсіндіруде өте маңызды орын алады. Әртүрлі математикалық әдістерді қолданумен байланысты математикалық физика теңдеулерінің шешімдерінің әртүрлілігі химия, биология, сұйықтық механикасы, оптикалық талшықтар, ғарыштық инженерия, инженерлік басқару есептері, гидродинамика, метеорология, плазма физикасы, қолданбалы математика және информатика сияқты көптеген ғылымдар үшін өте маңызды. Соңғы жылдары зерттеушілердің көпшілігі Дарбу түрлендіруі әдісі, экспоненциалды функция әдісі, гиперболалық тангнес әдісі, Хирота әдісі, Кудряшовтың жалпыланған әдісі және басқалары сияқты Математикалық физика теңдеулерінің нақты шешімдерін алудың бірқатар әдістерін дамытты. Бұл жұмыста екі-өлшемді Конопельченко-Дубровский теңдеуі зерттеледі. Бұл теңдеуді зерттеу физикада қолданылуына байланысты өзекті болып табылады, атап айтқанда ол таяз суда пайда болатын шағын амплитудалық дисперсиялық толқындардың эволюциясын сипаттайды және бұл теңдеуді Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, модификацияланған Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, Гарднер теңдеуіндей жалпыланған түрі ретінде де қарастыруға болады. Нақты шешімдерді алу үшін синус-косинус әдісі қолданылады. Синус-косинус әдісі математикалық физика теңдеулерінің дәл шешімдерін табудың тиімді математикалық құралы екендігі белгілі. Периодтық толқындар түріндегі жаңа шешімдер алынады. Алынған шешімдердің графиктері ұсынылады.

Түйін сөздер: синус-косинус әдісі, қарапайым дифференциалдық теңдеу, дербес туындылы дифференциалдық теңдеу, бейсызықтық, Конопельченко-Дубровский теңдеуі.

А.М. Сыздыкова[1], О.В. Разина[1], С.К. Бургумбаева[1]*
[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ДВУМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ КОНОПЕЛЬЧЕНКО-ДУБРОВСКОГО

Аннотация

Изучение точных решений уравнений математической физики занимает очень важное место в объяснении некоторых физических явлений. Разнообразие решений уравнений математической физики, связанных с использованием различных математических методов, очень важно для многих наук, таких как химия, биология, механика жидкости, оптические волокна, космическая техника, инженерные задачи управления, гидродинамика, метеорология, физика плазмы, прикладная математика и компьютерные науки. В последние годы большинство исследователей усовершенствовали ряд методов для получения точных решений уравнений математической физики, таких как метод Дарбу преобразования, метод экспоненциальной функции, метод гиперболического тангнеса, метод Хироты, обобщенный метод Кудряшова и многие другие. В данной работе исследовано двумерное уравнение Конопельченко-Дубровского. Исследование данного уравнения актуально в связи с тем, что оно имеет приложение в физике, а именно описывает эволюцию дисперсионных волн малой амплитуды, возникающих на мелководье, а также данное уравнение можно рассматривать как обобщённая форма уравнения Кадомцева-Петвиашвилли, модифицированного уравнения Кадомцева-Петвиашвилли, уравнения Гарднера. Для получения точных решений применен метод синуса-косинуса. Показано, что метод синуса-косинуса представляет собой эффективный математический инструмент для поиска точных решений уравнений математической физики. Получены новые решения в виде периодических волн. Графики полученных решений представлены на рисунках.

Ключевые слова: метод синуса-косинуса, обыкновенное дифференциальное уравнение, дифференциальное уравнение в частных производных, нелинейность, уравнение Конопельченко-Дубровского.

A.M.Syzdykova[1], O.V. Razina[1], S.K. Burgumbayeva[1]
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

EXACT SOLUTIONS OF THE TWO-DIMENSIONAL KONOPELCHENKO-DUBROVSKY EQUATION

Abstract

The study of exact solutions of the equations of mathematical physics occupies a very important place in the explanation of certain physical phenomena. The variety of solutions to the equations of mathematical physics associated with the use of various mathematical methods is very important for many sciences, such as chemistry, biology, fluid mechanics, optical fibers, space technology, control engineering, fluid dynamics, meteorology, plasma physics, applied mathematics and computer science. In recent years, most researchers have improved several methods for obtaining exact solutions to the equations of mathematical physics, such as the Darboux transformation method, the exponential function method, the hyperbolic tangent method, the Hirota method, the generalized Kudryashov method, and many others. In this paper, the two-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation is studied. The study of this equation is relevant due to the fact that it has an application in physics, namely, it describes the evolution of dispersive waves of small amplitude arising in shallow water, and this equation can also be considered as a generalized form of the Kadomtsev-Petviashvili equation, the modified Kadomtsev-Petviashvili equation, the Gardner equation. To obtain exact solutions, the sine-cosine method was used. It is shown that the sine-cosine method is an effective mathematical tool for finding exact solutions to equations of mathematical physics. New solutions in the form of periodic waves are obtained. Graphs of the obtained solutions are presented in figures.

Keywords: sine-cosine method, ordinary differential equation, partial differential equation, nonlinearity, Konopelchenko-Dubrovsky equation.

Кіріспе

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер физика, математикалық биология және химияның көптеген салаларындағы сызықтық емес процестерді модельдеу үшін қолданылады [1-3]. Мысалы, бір өлшемді Кортевег-де Фриз теңдеуі [4] және бір өлшемді модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуі таяз суларда пайда болатын кіші амплитудалық дисперсиялық толқындардың эволюциясын анықтайды. Бір өлшемді коплексті модификацияланған Кортевег-де Фриз теңдеуі плазмалық толқындардың сызықтық емес эволюциясының үлгісі ретінде ұсынылды. Оптикада сызықтық емес Шредингер теңдеуі Керр орталарында оптикалық толқындардың таралуын сипаттайтын негізгі модель болып табылады [5]. Осы мәселелерге деген қызығушылыққа байланысты Exp функциясы әдісі [6], Дарбу түрлендіруі әдісі [7], Хирота әдісі [8], Кудряшов әдісі [9-10], синус-косинус әдісі [11-14], гиперболалық тангенс әдісі [15] сияқты әртүрлі аналитикалық шешу әдістері дамыған.

Осы жұмыста екі өлшемді Конопельченко-Дубровский (КД) теңдеулер жүйесін [16] зерттейміз, ол келесі түрде беріледі:

$$u_t - u_{xxx} - 6buu_x + \frac{3}{2}a^2u^2u_x - 3v_y + 3au_xv = 0, \quad (1)$$

$$u_y = v_x. \quad (2)$$

Мұндағы $u = u(x, y, t)$, $v = v(x, y, t)$, a және b-нақты параметрлер. Конопельченко-Дубровский жүйесі (1)-(2) әлсіз дисперсиясы бар математикалық физикадағы сызықтық емес толқындарды сипаттайды. Сонымен қатар, егер (1)-(2) теңдеулерде $a = 0$ жағдайын қарастырсақ, онда Кадомцев-Петвиашвилли теңдеуін алуға болады

$$(u_t - u_{xxx} - 6buu_x)_x - 3u_{yy} = 0.$$

Егер $b = 0$ деп алсақ, онда модификацияланған Кадомцев-Петвиашвилли теңдеуі шығады.

$$(u_t - u_{xxx} + \frac{3}{2}a^2u^2u_x)_x - 3u_{yy} = 0.$$

Егер (2)-ші теңдеуінде $u_y = 0$ болса, онда (1)-(2) жүйе Гарднер теңдеуіне келеді, бұл Кортевег-де-Фриз және модификацияланған Кортевег-де-Фриз теңдеулерінің комбинациясы болады. Осылайша (1)-(2) теңдеулер жүйесін зерттеу өзекті мәселе болып табылады, өйткені олар таяз судағы толқындық процестерді сипаттайды және Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, модификацияланған Кадомцев-Петвиашвили теңдеуі, Гарднер теңдеуі сияқты теңдеулердің жалпыланған түрі ретінде қарастырылуы мүмкін. КД теңдеулер жүйесі рационалды ыдырау әдісімен [17], бірінші интегралды әдіспен [18], F-ыдырау әдісімен [19], гиперболалық тангес және котангенс функциялар әдісімен [20], $(\frac{G^1}{G})$ кеңейтілген ыдырау әдісімен [21] зерттелген. Бұл жұмыста КД теңдеулер жүйесінің нақты шешімдерін алу үшін синус-косинус әдісі қолданылды. Жұмыстың негізгі жаңалығы-бұл әдісті КД жүйелері үшін қолдану және физикалық параметрлері бар жаңа шешімдер алу болып табылады. Бұған дейін бұл әдіс осы жүйе үшін қолданылмағанын ескереміз.

Зерттеу әдіснамасы

Бұл бөлімде синус-косинус әдісінің сипаттамасы беріледі [11-14]. Синус-косинус әдісі-математикалық физиканың көптеген сызықтық емес дербес туынды дифференциалдық теңдеулерін шешудің тиімді әдісі болып табылады. Әдіске сәйкес сызықтық емес дербес туынды дифференциалдық теңдеу, қарапайым дифференциалдық теңдеуге түрлендіріледі, содан кейін синус немесе косинус функциялары түрінде шешім ізделеді. Әрі қарай, әдістің сипаттамасы толығырақ берілген.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді

$$E_1(u_t, u_x, u_x, u_{xx}, u_{yy}, u_{xxx},..) = 0, \tag{3}$$

толқындық айнымалы аркылы

$$u(x, y, t) = u(\xi),\ \xi = (x + y - ct), \tag{4}$$

қарапайым дифференциалдық теңдеуге түрлендіруге болады

$$E_2(u, u', u'', u''',..) = 0. \tag{5}$$

(5) қарапайым дифференциалдық теңдеудің шешімін келесі түрде табуға болады

$$u(\xi) = \lambda \cos^{\beta}(\mu\xi), \tag{6}$$

немесе

$$u(\xi) = \lambda \sin^{\beta}(\mu\xi). \tag{7}$$

мұндағы $\xi = (x + y - ct)$, μ, λ, c-тұрақтылар. (6) теңдеудің туындылары келесідей алуға болады

$$u'(\mu\xi) = -\lambda\beta\mu\cos^{\beta-1}(\mu\xi)\sin(\mu\xi), \tag{8}$$

$$u''(\mu\xi) = -\lambda\beta^2\mu^2\cos^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi), \tag{9}$$

және (7) теңдеудің туындыларын келесі түрде алынады

$$u'(\mu\xi)=\lambda\beta\mu\sin^{\beta-1}(\mu\xi)\cos(\mu\xi), \tag{10}$$

$$u''(\mu\xi)=-\lambda\beta^2\mu^2\sin^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{11}$$

(6)-(11) теңдеулерді қарапайым дифференциалдық теңдеуге қойып, мүшелері $\cos^r(\mu\xi)$ және $\sin^r(\mu\xi)$ болатын тригонометриялық теңдеулерін аламыз. Содан кейін β-ны анықтау үшін косинус немесе синус жұбының дәрежелерін теңестіріп, параметрлерді анықтаймыз. Әрі қарай, біз $\cos^r(\mu\xi)$ немесе $\sin^r(\mu\xi)$ үшін бірдей дәрежедегі барлық коэффициенттерді жинаймыз. Белгісіз λ және μ арасындағы алгебралық теңдеулер жүйесін алып, одан коэффициенттерді анықтаймыз.

Зерттеу нәтижелері

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеуге синус-косинус әдісін қолдану үшін келесі түрлендіруді қолданамыз

$$u(x,y,t)=u(\xi)=u(x+y-ct), \tag{12}$$

мұнда c-тұрақты коэффициент. (12) теңдеуді (1)-(2) теңдеуге қойып, келесідей дифференциалдық теңдеулерді аламыз:

$$-cu'-u'''-6buu'+\frac{3}{2}a^2u^2u'-3v'+3au'v=0, \tag{13}$$

$$u'=v'. \tag{14}$$

(13)-(14) теңдеулерді бір рет интегралдап, интегралданған тұрақтыны ноль деп санап және $u=v$ болса, онда келесі теңдеуді табамыз

$$-cu-u''-3bu^2+\frac{1}{2}a^2u^3-3u+\frac{3}{2}au^2=0. \tag{15}$$

Егер $b=\dfrac{a}{2}$ болса, онда (15)-ші теңдеуден табамыз

$$(c+3)u+u''-\frac{1}{2}a^2u^3=0,\ a\neq 0. \tag{16}$$

Косинус шешімі

(16)-шы теңдеудің косинус шешімін табу үшін (6) түрлендіру қолданамыз

$$u(\mu\xi)=\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi), \tag{17}$$

$$u''(\mu\xi)=-\lambda\beta^2\mu^2\cos^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{18}$$

(17)-(18) теңдеулерді (16) теңдеуге қойып келесі түрдегі теңдеуді табамыз

$$(c+3)\lambda\cos^{\beta}(\mu\xi)-\lambda\beta^2\mu^2\cos^{\beta}(\mu\xi)+\lambda\mu^2\beta(\beta-1)\cos^{\beta-2}(\mu\xi)-\frac{1}{2}a^2\lambda^3\cos^{3\beta}(\mu\xi)=0. \tag{19}$$

Тепе-теңдік әдісін қолданып, (19) теңдеудегі $\cos^{\beta}$ функциясының дәрежелерін теңестіріп, β мәнін анықтаймыз

$$\beta - 2 = 3\beta \text{, онда } \beta = -1. \tag{20}$$

Жоғарыда табылған β мәнін (19) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз

$$(c+3)\lambda\cos^{-1}(\mu\xi) - \mu^2\lambda\cos^{-1}(\mu\xi) + 2\mu^2\lambda\cos^{-3}(\mu\xi) - \frac{1}{2}a^2\lambda^3\cos^{-3}(\mu\xi) = 0. \tag{21}$$

Косинус функцияларының әрбір жұбының коэффициенттерін теңестіру арқылы келесі теңдеулер жүйесін табамыз:

$$\cos^{-1}(\mu\xi) \,\Big|\quad (c+3)\lambda - \mu^2\lambda = 0, \tag{22}$$

$$\cos^{-3}(\mu\xi) \,\Big|\quad 2\lambda\mu^2 - \frac{1}{2}a^2\lambda^3 = 0 \tag{23}$$

(22)- (23) теңдеулер жүйесінен келесі коэффициентердін мәндерін анықтаймыз

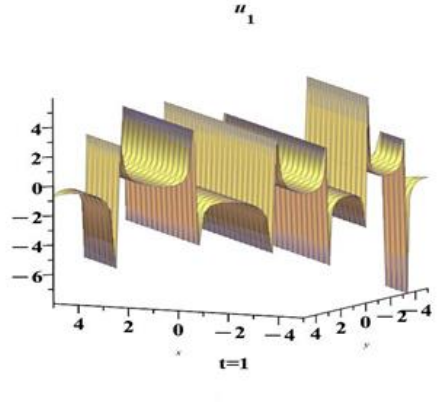
$$\lambda = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3},\ \mu = \sqrt{c+3}. \tag{24}$$

Жоғарыда табылған мәндерді (17) теңдеуге қойсақ, одан кейін алынған өрнекті (12) теңдеуге қойып, және $u = v$ ескеріп екі-өлшемді Конопельченко-Дубровский теңдеуінің нақты шешімдерін табамыз

$$u_1(x,y,t) = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3}\sec\ (\sqrt{c+3}(x+y-ct)),\ \text{егер } c \neq -3 \tag{25}$$

$$v_1(x,y,t) = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3}\sec\ (\sqrt{c+3}(x+y-ct)),\ \text{егер } c \neq -3 \tag{26}$$

Табылған (25) шешімнің графигі 1-ші суретте көрсетілген



Сурет 1. $u_1(x, y, t)$ *шешімінің графигі келесі параметрлермен* $a = 5; b = 2.5, c = -2$ *алынды.*

Синус шешімі

Синус шешімін табу үшін (7) түрлендіру қолданамыз

$$u(\mu\xi) = \lambda \sin^{\beta}(\mu\xi), \tag{27}$$

$$u''(\mu\xi) = -\lambda\beta^2\mu^2 \sin^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi). \tag{28}$$

(27)-(28) теңдеулерді (16) теңдеуге қойып келесі түрдегі теңдеуді табамыз

$$(c+3)\lambda \sin^{\beta}(\mu\xi) - \lambda\beta^2\mu^2 \sin^{\beta}(\mu\xi) + \lambda\mu^2\beta(\beta-1)\sin^{\beta-2}(\mu\xi) - \frac{1}{2}a^2\lambda^3 \sin^{3\beta}(\mu\xi) = 0. \tag{29}$$

Тепе-теңдік әдісін қолданып, (29) теңдеудегі $\sin^{\beta}$ функциясының дәрежелерін теңестіріп, β мәнін анықтаймыз

$$\beta - 2 = 3\beta\text{, онда } \beta = -1. \tag{30}$$

Жоғарыда табылған β мәнін (29) теңдеуге қойып, келесі теңдеуді аламыз

$$(c+3)\lambda \sin^{-1}(\mu\xi) - \mu^2\lambda \sin^{-1}(\mu\xi) + 2\mu^2\lambda \sin^{-3}(\mu\xi) - \frac{1}{2}a^2\lambda^3 \sin^{-3}(\mu\xi) = 0. \tag{31}$$

Синус функцияларының әрбір жұбының коэффициенттерін теңестіру арқылы келесі теңдеулер жүйесін табамыз:

$$\sin^{-1}(\mu\xi) \mid \quad (c+3)\lambda - \mu^2\lambda = 0, \tag{32}$$

$$\sin^{-3}(\mu\xi) \mid 2\lambda\mu^2 - \frac{1}{2}a^2\lambda^3 = 0. \tag{33}$$

(32)- (33) теңдеулер жүйесінен келесі коэффициентердің мәндерін анықтаймыз

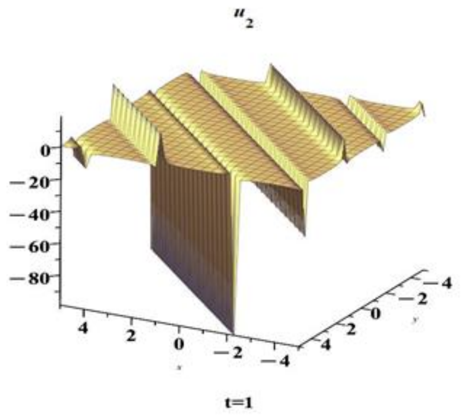
$$\lambda = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3},\ \mu = \sqrt{c+3}. \tag{34}$$

Жоғарыда табылған мәндерді (27) теңдеуге қойсақ, одан кейін алынған өрнекті (12) теңдеуге қойып, екі-өлшемді Конопельченко-Дубровский теңдеуінің нақты шешімдерін табамыз

$$u_2(x,y,t) = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3}\cos ec(\sqrt{c+3}(x+y-ct)),\ \text{егер } c \neq -3 \tag{35}$$

$$v_2(x,y,t) = \pm\frac{2}{a}\sqrt{c+3}\cos ec(\sqrt{c+3}(x+y-ct)),\ \text{егер } c \neq -3 \tag{36}$$

Табылған (35) шешімнің графигі 2-ші суретте көрсетілген



Сурет 2. $u_2(x,y,t)$ *шешімнің графигі келесі параметрлермен* $a=5; b=2.5, c=-2$ *алынды.*

Қорытынды

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер қолданбалы ғылымдарда кеңінен қолданылады: кванттық механика, электродинамика, термодинамика және т.б. сонымен қатар әртүрлі физикалық процестерді математикалық сипаттау және модельдеу кезінде. Сондықтан мұндай теңдеулер математикалық физика теңдеулерінің жалпы атауымен зерттеледі.

Бұл жұмыста екі-өлшемді Конопельченко-Дубровский теңдеуі зерттелді, бұл теңдеу таяз судағы толқындық процестерді сипаттайды және Кадомцев-Петвиашвилли теңдеуі, модификацияланған Кадомцев-Петвиашвилли теңдеуі, Гарднер теңдеуі сияқты теңдеулердің жалпыланған түрі ретінде қарастырылуы мүмкін. Нақты шешімдерді табу үшін косинус-синус әдісін қолдандық. Сондай-ақ зерттеу кезінде периодты шешімдерде табылды. Алынған шешімдер үшін графиктер тұрғызылды.

Зерттеу жұмысы Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Ғылым комитетінің жобасы аясында дайындалған (ЖТН жобасы: AP09057947).

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Полянин А. Д., Манжиров А. В. Справочник по интегральным уравнениям //- М.: Физматлит, - 2003. 384с

2 Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. //-М.: Физматлит, -2003.

3 Полянин А. Д., Зайцев В. Ф. Справочник по нелинейным уравнениям математической физики. // - М.: Физматлит, -2002.

4 Полянин А. Д., Зайцев В. Ф., Журов А. И. Методы решения нелинейных уравнений математической физики и механики. -М.: Физматлит, -2005.

5 Burdik C., Shaikhova G., Rakhimzhanov B. Soliton solutions and travelling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equations// European Physical Journal Plus–136:1095. -2021 -P.1-17.

6 Boz A., Bekir A. Application of Exp-function method for (3 + 1)-dimensional nonlinear evolution equations.//Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 1451–1456 https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.045

7 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono equation // Journal of Physics: Conference Series 1416. -2019. -012003.

8 Kutum B.B., Yesmakhanova K.R., Shaikhova G.N. The differential-q-difference 2D Toda equation: bilinear form and soliton solutions // Journal of Physics: Conference Series 1391. -2019. -012122.

9 Serikbayev N.S., Shaikhova G.N., Yesmakhanova K.R., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations //Journal of Physics: Conference Series (1) -1391. -2019. -012166

10 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K., and Zhanbosinova Zh.K. Travelling wave solutions for the generalized nonlinear Schrödinger equation //Journal of Physics: Conference Series, 2090. -2021. -012062.

11.Yao Sh.-W., Behera S., Inc M., Rezazadeh H., Virdi J., Mahmoud W., Arqub O., Osman M.S. Analytical solutions of conformable Drinfel'd–Sokolov–Wilson and Boiti Leon Pempinelli equations via sine–cosine method. Results in Physics, 42, 2022, 105990. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105990

12. Ali M., Alquran M., Salman O. A variety of new periodic solutions to the damped (2+1)-dimensional Schrodinger equation via the novel modified rational sine–cosine functions and the extended tanh-coth expansion methods. Results in Physics, 37, 2022, 105462. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105462

13 Shaikhova G.N., Kalykbay Y.S.Exact solutions of the Hirota equation via the sine-cosine method // Вестник Южно-Уральского университета. Серия «Математика. Механика. Физика» -2021. -Том 13, №3. – С. 47-52.

14 Shaikhova G.N., Syzdykova A.M., Daulet S. Exact solutions of the the generalized nonlinear Scrodinger equation // Журнал «Математическая физика и компьютерное моделирование» -2021. -Том 24, №3. – С. 18-25.

*15 Malfliet W., Hereman W., The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. Physica Scripta **54**, 563–568 (1996)*

16 Konopelchenko, B.G., Dubrovsky, V.G., 1984. Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions. Phys. Lett. A 102 (1–2), 15–17.

17 Song, L.N., Zhang, H.Q., 2006. New exact solutions for Konopelchenko-Dubrovsky equation using an extended Riccati equation rational expansion method. Commun. Theor. Phys. 45 (5), 769–776.

18 Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., 2011. Exact travelling wave solutions for Konopelchenko-Dubrovsky equation by the first integral method. Appl. Appl. Math.: Int. J. 6 (1), 153–161.

19. Wang D, Zhang HQ. Further improved F-expansion method and new exact solutions of the Konopelchenko-Dubrovsky equation. Chaos Solitons Fract 2005; 25:601–10.

20 Wazwaz, A.M., 2007a. New kinks and solitons solutions to the (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation. Math. Comput. Modell. 45, 473–479.

21 Alam N., Tun C., New solitary wave structures to the (2 + 1)-dimensional KD and KP equations with spatio-temporal dispersion. Journal of King Saud University –-Science 32 (2020) 3400–3409.

References:

1. Polyanin A.D., Manjirov A.V. (2003) Spravochnik po integralnym uravneniyam [Handbook of integral equations]. M.: Fizmatlit. 384. (In Russian)

2. Zajcev V. F., Polyanin A. D. (2003) Spravochnik po differencialnym uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka [Handbook on partial differential equations of first order]. M.: Fizmatlit. (In Russian)

3. Polyanin A. D., Zajcev V. F. (2002). Spravochnik po nelinejnym uravneniyam matematicheskoj fiziki [Handbook on nonlinear equations of mathematical physics]. M.: Fizmatlit, (In Russian)

4. Polyanin A. D., Zajcev V. F., Zhurov A. I. (2005) Metody resheniya nelinejnyh uravnenij matematicheskoj fiziki i mehaniki [Methods for solving nonlinear equations of mathematical physics and mechanics]. M.: Fizmatlit, (In Russian)

5 Burdik C., Shaikhova G., Rakhimzhanov B. Soliton solutions and travelling wave solutions for the two-dimensional generalized nonlinear Schrodinger equations// European Physical Journal Plus–136:1095. -2021 -P.1-17.

6 Boz A., Bekir A. Application of Exp-function method for (3 + 1)-dimensional nonlinear evolution equations.//Computers and Mathematics with Applications 56 (2008) 1451–1456 https://doi.org/10.1016/j.camwa.2008.02.045

7 Bekova G., Shaikhova G., Yesmakhanova K., Myrzakulov R. Darboux transformation and soliton solution for generalized Konno-Oono equation//Journal of Physics: Conference Series 1416. -2019. -012003.

8 Kutum B.B., Yesmakhanova K.R., Shaikhova G.N. The differential-q-difference 2D Toda equation: bilinear form and soliton solutions //Journal of Physics: Conference Series 1391. -2019. -012122.

9 Serikbayev N.S., Shaikhova G.N., Yesmakhanova K.R., Myrzakulov R. Traveling wave solutions for the (3+1)-dimensional Davey-Stewartson equations //Journal of Physics: Conference Series (1) -1391. -2019. -012166

10 Shaikhova G.N., Rakhimzhanov B.K., and Zhanbosinova Zh.K. Travelling wave solutions for the generalized nonlinear Schrödinger equation //Journal of Physics: Conference Series, 2090. -2021. -012062.

11.Yao Sh.-W., Behera S., Inc M., Rezazadeh H., Virdi J., Mahmoud W., Arqub O., Osman M.S. Analytical solutions of conformable Drinfel'd–Sokolov–Wilson and Boiti Leon Pempinelli equations via sine–cosine method. Results in Physics, 42, 2022, 105990. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105990

12. Ali M., Alquran M., Salman O. A variety of new periodic solutions to the damped (2+1)-dimensional Schrodinger equation via the novel modified rational sine–cosine functions and the extended tanh-coth expansion methods. Results in Physics, 37, 2022, 105462. https://doi.org/10.1016/j.rinp.2022.105462

13 Shaikhova G.N., Kalykbay Y.S.Exact solutions of the Hirota equation via the sine-cosine method // Vestnik Juzhno-Ural'skogo universiteta. Serija «Matematika. Mehanika. Fizika» -2021. -Tom 13, №3. – S. 47-52. (In Russian)

14 Shaikhova G.N., Syzdykova A.M., Daulet S. Exact solutions of the the generalized nonlinear Scrodinger equation // // Zhurnal «Matematicheskaja fizika i komp'juternoe modelirovanie» -2021. -Tom 24, №3. – S. 18-25. (In Russian)

*15 Malfliet W., Hereman W., The tanh method: I. Exact solutions of nonlinear evolution and wave equations. Physica Scripta **54**, 563–568 (1996)*

16 Konopelchenko, B.G., Dubrovsky, V.G., 1984. Some new integrable nonlinear evolution equations in (2+1) dimensions. Phys. Lett. A 102 (1–2), 15–17.

17 Song, L.N., Zhang, H.Q., 2006. New exact solutions for Konopelchenko-Dubrovsky equation using an extended Riccati equation rational expansion method. Commun. Theor. Phys. 45 (5), 769–776.

18 Taghizadeh, N., Mirzazadeh, M., 2011. Exact travelling wave solutions for Konopelchenko-Dubrovsky equation by the first integral method. Appl. Appl. Math.: Int. J. 6 (1), 153–161.

19. Wang D, Zhang HQ. Further improved F-expansion method and new exact solutions of the Konopelchenko-Dubrovsky equation. Chaos Solitons Fract 2005; 25:601–10.

20 Wazwaz, A.M., 2007a. New kinks and solitons solutions to the (2+1)-dimensional Konopelchenko-Dubrovsky equation. Math. Comput. Modell. 45, 473–479.

21 Alam N., Tun C., New solitary wave structures to the (2 + 1)-dimensional KD and KP equations with spatio-temporal dispersion. Journal of King Saud University – Science 32 (2020) 3400–3409.