МРНТИ 27.39.19
УДК 517.98

10.51889/2959-5894.2023.82.2.003

А.С. Касым

Евразийский национальный университет им. Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
**e-mail: kassym.aizhan@gmail.com*

ОБ ОДНОЙ КОЭРЦИТИВНОЙ ОЦЕНКЕ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЛЬТИПЛИКАТОРОВ

Аннотация

В работе рассматривается дифференциальное уравнение, которое задано несамосопряженным замкнутым и обратимым оператором второго порядка в пространстве Лебега $L_2(0;\infty)$. Предполагается, что переменные коэффициенты $a_k(x)$ при производных $y^{(k)}\,(k=0,1)$ невырождены и могут менять знак в любой окрестности ∞. В результате исследования получена коэрцитивная оценка для решений этого уравнения в терминах точечных мультипликаторов на паре весовых пространств Соболева (V,W). Весовые функции в этих простанствах непосредственно связаны с переменными коэффициентами рассматриваемого уравнения. Под точечным мультипликатором на паре функциональных пространств (V,W) понимают функцию, задающую ограниченный оператор умножения $Tf=\gamma f$ из V в W. Суть коэрцитивных оценок состоит в том, что они дают функциональные характеристики для решений, такие, к примеру, как гладкость, суммируемость и др. При решении задачи был использован метод локальных оценок на интервалах специальной длины. Данный метод позволяет выявить ряд важных в теории дифференциальных операторов характеристик, опираясь на внутренние связи переменных коэффициентов, а не задавая их априори.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, точечные мультипликаторы, коэрцитивная оценка, весовые пространства Соболева.

Аңдатпа
А.С. Қасым
Л.Н. Гумилев атындағы Еуразиялық ұлттық университеті
МУЛЬТИПЛИКАТОРЛАР КЕҢІСТІКТЕРІНДЕГІ БІР КОЭРЦИТИВТІ БАҒАЛАУ ТУРАЛЫ

Бұл жұмыста $L_2(0;\infty)$ Лебег кеңістігінде өзіне-өзі түйіндес тұйықталған және кері операторы бар екінші ретті оператор арқылы берілген дифференциалдық теңдеу қарастырылады. $y^{(k)}\,(k=0,1)$ туындылар алдындағы $a_k(x)$ айнымалы коэффициенттері азғындалмаған және ∞-тің кез келген маңайында таңбасын өзгерте алады деп болжанады. Зерттеу нәтижесінде (V,W) салмақты Соболев кеңістіктердің жұбындағы нүктелік мультипликаторлар бойынша осы теңдеудің шешімдерінің коэрцитивтік бағлауы алынды. Бұл кеңістіктердегі салмақтық функциялар қарастырылатын теңдеудің айнымалы коэффициенттерімен тікелей байланысты. (V,W) функционалдық кеңістіктер жұбындағы нүктелік мультипликатор деп V-дан W-ға әрекет ететін $Tf=\gamma f$ шектелген көбейту операторын анықтайтын функцияны атаймыз. Коэрцитивті бағалаудың мәні мынада: олар шешімдерге, мысалы, тегістік, жинақтылық және т.б. сияқты функционалдық сипаттама береді. Есепті шешу кезінде арнайы ұзындық аралықтардағы локалды бағалаулар әдісі қолданылды. Бұл әдіс дифференциалдық операторлар теориясында маңызды болып табылатын бірқатар сипаттамаларды алдын-ала бермей-ақ, айнымалы коэффициенттердің ішкі байланыстарына сүйене отырып, анықтап табуға мүмкіндік береді.

Түйін сөздер: дифференциалдық теңдеулер, нүктелік мультипликаторлар, коэрцитивті бағалау, салмақты Соболев кеңістіктері.

Abstract
ON A COERCIVE ESTIMATE IN SPACES OF MULTIPLIERS
Kassym A.S.
L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan

The paper considers a differential equation, which is given by a non-self-adjoint, closed and reversible second order operator in the Lebesgue space $L_2(0;\infty)$. It is assumed that the variable coefficients $a_k(x)$ on the derivatives $y^{(k)}\,(k=0,1)$ are non-degenerate and can change sign in any neighborhood of ∞. As a result, we obtain a coercive estimate for solutions of this equation in terms of point multipliers on a pair of weighted Sobolev spaces (V,W). The weight functions in these spaces are directly related to the variable coefficients of the equation under consideration. A point multiplier on a pair of function spaces (V,W) is a function that defines a bounded multiplication operator $Tf=\gamma f$ from V to W. The essence of coercive estimates is that they give functional characteristics for solutions, such as, for example, smoothness, summability, etc. The method of local estimates on intervals of special length was used to solve the problem. This method makes it possible to reveal a number of characteristics that are important in the theory of differential operators, relying on internal connections of variable coefficients, rather than setting them a priori.

Keywords: differential equations, point multipliers, coercive estimate, weighted Sobolev spaces.

Введение

В работе продолжены исследования замкнутого и обратимого оператора

$$\mathrm{L}y=-a_2(x)y''+a_1(x)y'+a_0(x)y,\ \ D(L)\subset L_2(I), \tag{1}$$

рассмотренного в [1]. В (1) $I=[0,\infty)$, коэффициенты $a_j\in L_{2,loc}(I)\ (j=0,1,2), a_2>0,$ $a_2^{-1}=\dfrac{1}{a_2}\in L_2(I),$ $a_j\ (j=0,1)$ невырожденны на ∞, а именно, для любого $t>0$ мера $\left|a_{j,(t)}\right|>0$, где $a_{j,(t)}=\left\{x\geq t: a_{j,(t)}\neq 0\right\}$. Через $\left|G\right|, G\subset \text{Ў}=(-\infty,+\infty)$, обозначается лебегова мера; $L_p(G), L_{p,loc}(G)\ (1\leq p<\infty)$ – соответственно пространство Лебега с нормой

$$\left\|g\right\|_{L_p(G)}=\left\|g;L_p(G)\right\|=\left(\int\limits_G\left|g(x)\right|^p dx\right)^{1/p},$$

пространство всех функций g, принадлежащих $L_p[a,b]$ для любого отрезка $[a,b]\subset G$. Обозначим через $L^+_{p,loc}(I)$ класс неотрицательных невырожденных (весовых) функций $f\in L_{p,loc}(I)$.

Основные результаты

В настоящей работе была получена коэрцитивная оценка для решений уравнения

$$\mathrm{L}y=f,\ f\in L_2(I)$$

в пространствах мультипликаторов.

Пусть X,Y – банаховы пространства вещественных функций, определенных на полуоси I. Функцию $\gamma: I\to \text{Ў}$ будем называть (точечным) мультипликатором на паре (X,Y), если оператор умножения $Tf=\gamma f$ есть ограниченный оператор, действующий из X в $Y, D(T)=X$. Пространство всех мультипликаторов на паре (X,Y) обозначается как $M(X\to Y)$. В пространстве $M(X\to Y)$ вводится норма (см. [2-7])

$$\mathrm{P}\gamma;M(X,Y)\,\|\overset{def}{=}\|T;X\to Y\|=\sup_{0\neq f\in X}\frac{\|Tf\|_Y}{\|f\|_X}.$$

Пусть $w,\rho,v\in L^+_{p,loc}(I)\ (i=1,2)$. Через $W^m_p(G;\rho,v)$ обозначим пополнение класса $C_0^\infty(I)$, бесконечно дифференцируемых и финитных в I функций по норме

$$\|y;W^m_p(G;\rho,v)\|=\left(\int\limits_G\left|y^{(m)}\right|^p\rho(x)dx\right)^{1/p}+\left(\int\limits_G\left|y\right|^p v(x)dx\right)^{1/p},$$

через $V^m_p(G;w)$ – пополнение $C_0^\infty(I)$ по норме

$$\mathrm{P}y;V^m_p(G;w)\|=\sum_{k=0}^m\left(\int\limits_G\left|y^{(k)}\right|^p w(x)dx\right)^{1/p}.$$

В частности, при $w=\rho=v=1$ $W^m_p(G;1,1)=W^m_p(G),$ $V^m_p(G;1)=V^m_p(G)$ – пространства Соболева. Положим $W=W^2_2(a_2^2,a_0^2)=W(I;a_2^2,a_0^2), V^m_p(w)=V^m_p(I;w).$

Пусть

$$Py=c_2y''+c_1y'+c_0y$$

– оператор в $L_2 = L_2(\text{Ў})$ с постоянными коэффициентами c_k $(0 \le k \le 2)$. В [2] было показано, в частности, что имеет место импликация:

$$z \in W_2^2(\text{Ў})\,\text{I}\;\; M(V_2^3(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})),\;\; Pz \in M(V_2^3(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})) \Rightarrow$$
$$z \in M(V_2^3(\text{Ў}) \to W_2^2(\text{Ў})).$$

Норма

$$\left\| z; M(V_2^3(\text{Ў}) \to W_2^2(\text{Ў})) \right\| \le c\left(\left\| Pz; M(V_2^3(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})) \right\| + \left\| z; M(V_2^3(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})) \right\| \right). \tag{2}$$

Неравенство (2) было названо коэрцитивной оценкой для решения дифференциального уравнения $(Pz = f)$ в пространствах мультипликаторов.

В работе [3] для решений уравнения (Штурма-Лиувилля)

$$Qz \equiv -z'' + q(x)z = f,\; f \in L_2(\text{Ў})$$

с потенциалом $q \ge 1$ была получена коэрцитивная оценка

$$\left\| z; M(W_2^m(\text{Ў}) \to W_2^2(\text{Ў}; 1, q^2)) \right\| \le$$
$$\le c\left(\left\| Qz; M(W_2^m(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})) \right\| + \left\| z; M(W_2^{m-2}(\text{Ў}) \to L_2(\text{Ў})) \right\| + \left\| z; W_2^2(\text{Ў}; 1, q^2) \right\| \right).$$

Пусть $w, \rho, v \in L_{1,loc}(I),\, \rho > 0$. Положим $(x \ge 0,\, h > 0)$:

$$S(x,h;v) = \inf_{R \in \Re_{x,h}} \int_x^{x+h} v(t)\left|R(t)\right|^2 dt,$$

$$\text{M}\,(x,h;\rho,v) = h^3 S(x,h;v) \int_x^{x+h} \frac{1}{\rho}\, dt,$$

где $\Re_{x,h}$ есть пространство всех аффинных функций $R(t) = a + bt$ таких, что

$$\int_x^{x+h} \left|R(t)\right|^2 dt = 1.$$

В частности, $R(t) \equiv h^{-1/2} \in \Re_{x,h}$. Поэтому

$$S(x,h;v) \le h^{-1} \int_x^{x+h} v(t)\,dt. \tag{3}$$

Положим

$$\text{K}_r(x,h;\rho,w) = h^{1-r}\left(\int_x^{x+h} \frac{1}{\rho}\,dt \cdot \int_x^{x+h} w\,dt \right)^{1/2},\; r = 0, 1.$$

Пусть $h(\cdot)$ – положительная функция в I. Будем говорить, что пара (ρ, v) допустима относительно (функции длины) $h(\cdot)$, если

$$S(x,h(x);\rho,v) \ge h(x)^{-3} \int_{\Delta(x)} \frac{1}{\rho} dt,\; \Delta(x) = [x, x + h(x)).$$

Запись: (ρ, v) допустима относительно ф.д. $h(\cdot)$.

Будем говорить, что весовая функция v $(\Re)$-регулярна относительно ф.д. $h(\cdot)$, если существует такое $\eta,\, 0 < \eta < 1$, что

$$S(x,h(x);v) \ge \eta h(x)^{-1} \int_{\Delta(x)} v\,dt,\; (x \ge 0).$$

Теорема. Пусть выполнены условия:

a) a_2 возрастает и существует такое $\beta > 1$, что

$$a_2(k+1) \le \beta a_2(k)\; (k = 0,1,2,3,...),$$

b) пара (a_2^2, a_0^2) допустима и a_0^2 $(\Re)$-регулярна относительно ф.д. $h(x)$,

c) $K = \sup\limits_{x\ge 0}\left\{\max\limits_{r=0,1} \mathrm{K}_r(x,h(x);a_2^2,a_0^2)\right\} < \infty,$

d) $N = \sup\limits_{x\ge 0}\left(\int\limits_0^{x+h(x)} a_2^{-2}dt \cdot \int\limits_x^{\infty} a_1^2 dt\right)^{1/2} < \infty.$

Тогда имеет место импликация

$$\mathrm{L}z \in M(V_2^3(a_2) \to L_2(I)) \Rightarrow z \in M(V_2^3(a_2) \to L_2(I)).$$

Норма

$$\left\| z; M(V_2^3(a_2) \to L_2(I)) \right\| \le c(\beta,\eta)(1+N)\left(\left\|a_2^{-1}\right\|_{L_2(I)} + K\right)\left\| z; W_2^2(a_2,a_0)\right\|.$$

Замечание. В [1] было доказано, что условия теоремы являются достаточными для существования замкнутого и обратимого расширения L минимального оператора

$$\mathrm{L}_0 y = \mathrm{L}y,\ y \in C_0^\infty(I).$$

[8, 9] Область определения $D(\mathrm{L}) \subset W \subset L_2(I)$.

Пример. Пусть $a_2 > 0$ имеет непрерывную производную $a_2' > 0$, и пусть:

i) $a_0(x) = (1+x)^m \le \beta_1 a_2(x),\ x \ge 0\ (m \in \text{Ґ},\ \beta_1 > 1)$

ii) $\sup\limits_{x\le t\le x+1} a_2'(t) \le c a_2(x)\ (x \ge 0),$

iii) функции $a_2^{-1}, a_1 \in L_2(I)$.

Тогда:

1. $a_0^2 - (\Re)$-регулярна относительно ф.д.

$$h(x) = h^{\#}(x) \overset{def}{=} \sup\{h > 0 : \mathrm{M}\ (x,h;a_2^2,a_0^2) \le 1\},$$

а именно

$$S(x,h(x);a_0^2) = \inf_{R\in\Re_{x,h(x)}} \int\limits_x^{x+h(x)} (1+t)^{2m}\left|R(t)\right|^2 dt \ge \eta \frac{1}{h(x)} \int\limits_x^{x+h(x)} (1+t)^{2m}dt, \tag{4}$$

где $\eta = \dfrac{\tau^2}{2},\ \tau = \tau(\dfrac{1}{2}) > 0$.

2. Пара (a_2^2, a_0^2) допустима относительно ф.д. $h(x) = h^{\#}(x;a_2^2,a_0^2)$, т.к.

$$\mathrm{M}\ (x,h^{\#}(x);a_2^2,a_0^2)) = 1 \tag{5}$$

См.[1, Утв.1]

3.

$$a_2(x+1) = a_2(x)\left(\frac{a_2(x+1)-a_2(x)}{a_2(x)} + 1\right) \le a_2(x)\left(\frac{a_2'(\xi)}{a_2(x)} + 1\right) \le \beta_1 a_2(x),$$

где $\beta_1 = 1 + c$.

4. Из условия (iii) следует, что

$$N \le \frac{1}{2}\left(\left\|a_2^{-1}\right\|_{L_2(I)}^2 + \left\|a_1\right\|_{L_2(I)}^2\right) < \infty.$$

5. Из равенства (5) и оценок (3), (4) следует:

$$S(x,h(x);a_0^2) \le \frac{1}{h(x)} \int\limits_{\Delta(x)} a_0^2 dt \le \eta^{-1} S(x,h(x);a_0^2),$$

$$\frac{1}{h(x)} \le \left(\int\limits_{\Delta(x)} a_0^2 dt \int\limits_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt\right)^{1/2} = \mathrm{K}_1(x,h(x);a_2^2,a_0^2) \le \eta^{-1/2}\frac{1}{h(x)}.$$

Поэтому

$$\mathrm{K}_0(x,h(x);a_2^2,a_0^2) \le \eta^{-1/2},$$
$$\mathrm{K}_1(x,h(x);a_2^2,a_0^2) \le \eta^{-1/2}, \text{ если } h(x) > 1.$$

В случае $h(x)\le 1$:

$$\mathrm{K}_1(x,h(x);a_2^2,a_0^2)\le\left[\int_x^{x+1}a_2^{-2}dt\cdot\int_x^{x+1}(1+t)^{2m}dt\right]^{1/2}\le 2^m\frac{(1+x)^m}{a_2(x)}\le 2^m\sqrt{\beta_1}.$$

Поэтому

$$\mathrm{K}=\sup_{x\ge 0}\left\{\max_{r=0,1}\mathrm{K}_r(x,h(x);a_2^2,a_0^2)\right\}\le\max\left\{\eta^{-1/2},2^m\,\mathrm{N}_0^{1/2}\right\}.$$

В оценке (4) было использовано следующее

Утверждение [10] Для любого $\delta, 0<\delta<1$, существует $\tau=\tau(\delta)>0$ такое, что

$$\sup_{R\in\Re_{x,h}}\left|\left\{t\in[x,x+h]:|R(t)|\le\tau h^{-1/2}\right\}\right|\le\delta h. \tag{6}$$

Пусть $\delta=\dfrac{1}{2}$. Т.к. $e=\left\{t\in\Delta=[x,x+h]:|R(t)|\le\tau h^{-1/2}\right\}$ есть отрезок $[a,b]\subset\Delta,\ a=a(R),\ b=b(R)$ для всех $R\in\Re_{x,h}$, то

$$\int_e|R|^2(1+t)^{2m}dt\le\frac{\tau^2}{h}\cdot\frac{(1+b)^{2m+1}-(1+a)^{2m+1}}{2m+1}=\frac{\tau^2}{(2m+1)h}(b-a)\sum_{k=0}^{2m}(1+b)^{2m-k}(1+a)^k\le$$

$$\le\frac{\tau^2}{2(2m+1)h}\left\{h\sum_{k=0}^{2m}(1+x+h)^{2m-k}(1+x)^{2m-k}\right\}=\frac{\tau^2}{2h}\int_\Delta(1+t)^{2m}dt.$$

Поэтому для всех $R\in\Re_{x,h}$ в силу (6)

$$\int_{\Delta\setminus e}|R|^2(1+t)^{2m}dt\ge\frac{\tau^2}{h}\int_{\Delta\setminus e}(1+t)^{2m}dt=\frac{\tau^2}{h}\left[\int_\Delta(1+t)^{2m}dt-\int_e(1+t)^{2m}dt\right]\ge$$

$$\ge\frac{\tau^2}{2h}\int_\Delta(1+t)^{2m}dt=\eta\frac{1}{h}\int_x^{x+h}(1+t)^{2m}dt.$$

Вспомогательные утверждения для доказательства теоремы.

Пусть $0\le k<m$ – целые, $1\le p<\infty$. Тогда для всех $y\in W_p^m(\Delta),\Delta=(x,x+h)\,(h>0)$, имеет место оценка

$$\sup_\Delta\left|y^{(k)}\right|\le C_0^* h^{m-k-1/p}\left[\int_\Delta\left(\left|y^{(m)}\right|^p+h^{-mp}\left|y\right|^p\right)dt\right]^{1/p}. \tag{7}$$

Постоянная $C_0^*=C_0^*(p,m,k)$.

Оценка (7) есть тривиальное следствие из неравенства вложения Соболева

$$\sup_{C[0,1]}|y^{(k)}|\le C_0^*\left\|y;W_p^m(0,1)\right\|.$$

Лемма [1]. Пусть выполнены условия

i) $\mathrm{M}\,(x,h;\rho,v)\ge 1$,

ii) существует такое $\eta, 0<\eta<1$, что

$$S(x,h;v)\ge\eta\frac{1}{h}\int_x^{x+h}v\,dt. \tag{8}$$

Тогда для всех $f\in W_2^2(\Delta;\rho,v)$, где $\Delta=(x,x+h)$, справедлива оценка

$$\left(\int_\Delta\left|f^{(r)}\right|^2w(t)dt\right)^{1/2}\le c_r\mathrm{K}_r(x,h;\rho,w)\left[\int_\Delta\left(\rho(t)\left|f''\right|^2+v(t)\left|f\right|^2\right)dt\right]^{1/2}, \tag{9}$$

где $c_r=c(r,\eta),\ r=0,1$.

В случае $w=1$

$$\mathrm{K}_r(x,h;\rho,1)=h^{\frac{3}{2}-r}\left(\int_x^{x+h}\frac{1}{\rho}dt\right)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы.

Пусть $y \in C_0^\infty(I),\ z \in D(\mathrm{L})$ и $\mathrm{L}z \in M(W_2^2(I) \to W_2^1(I))$. Заметим, что

$$a_2(x)(yz)'' = -y\mathrm{L}z + a_2(x)(y'z)' + a_2(x)y'z' + a_1(x)yz' + a_0(x)yz.$$

Введем обозначения. Пусть $z_k = Q_k(z),\ y_k = Q_k(y)$, где $Q_k : W_2^1(G_k) \to W_2^1(\check{\text{У}})$ – оператор продолжения с интервала $G_k = (k, k+1)$, на весь $\check{\text{У}}$ $(k = 0,1,...)$. Норма $\|Q_k\| \le c_1$ (см. [4]). Пространство $W_p^m = W_p^m(\check{\text{У}})$

Теперь выводим:

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 \le \sum_{k=0}^{\infty} a_2^2(k+1)\left(\|(z_k y_k')'\|_{L_2(I)}^2 + \|z_k y_k'\|_{L_2(I)}^2\right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_2^2(k+1)\|z_k y_k'; W_2^1\|^2 \le \sum_{k=0}^{\infty}\left\{a_2(k+1)\|z_k; M(W_2^2 \to W_2^1)\|\|y_k'; W_2^2\|^2\right\}^2.$$

Так как $a_2(k+1) \le \beta a_2(k) \le \beta a_2(x)$, для всех $x \in [k, k+1]$, то

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 \le 2(c_1\beta)^2 \sum_{k=0}^{\infty}\|z_k; M(W_2^2 \to W_2^1)\|^2\left(\int_k^{k+1}|a_2(x)y^{(3)}|^2 dx + \int_k^{k+1}|a_2(x)y'|^2 dx\right). \tag{10}$$

Норма

$$\|z_k; M(W_2^2 \to W_2^1)\| \le c_2 \sup_{x \in \check{\text{У}}}\|z_k; W_2^1(x, x+1)\|$$

См [2, 1.3.3]. Поэтому

$$\|z_k; M(W_2^2 \to W_2^1)\| \le c_2\|z_k; W_2^1\| \le c_2 c_1\left[\left(\int_k^{k+1}|z'|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_k^{k+1}|z|^2 dt\right)^{1/2}\right]. \tag{11}$$

В силу (10), (11)

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)}^2 \le 2c_1^2 c_2\beta\|y; V_2^3(a_2^2)\|\left[\int_0^\infty|z'|^2 dx + \int_0^\infty|z|^2 dx\right]^{1/2}. \tag{12}$$

Положим $x_1 = 0,\ x_{j+1} = x_j + h(x_j)$ $(j = 1,2,...)$. Из (12) и оценки (9) следует:

$$\left[\int_0^\infty|z'|^2 dt + \int_0^\infty|z|^2 dt\right]^{1/2} = \left[\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta(x_j)}|z'|^2 dt + \sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta(x_j)}|z|^2 dt\right]^{1/2} \le \tag{13}$$

$$\le c(\eta)\left(\sup_{x\ge 0} h(x)\int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt + \sup_{x \ge 0} h^3(x)\int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt\right)^{1/2}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\int_{\Delta(x_j)}(|a_2 z''|^2 + |a_0 z|^2)dx\right]^{1/2} \le c(\eta)K\|z\|_W,$$

где $\|z\|_W = \|z; W_2^2(a_2, a_0)\|$.

Из (12), (13) следует:

$$\|a_2(y'z)'\|_{L_2(I)} \le c_3(\beta, \eta)K\|z\|_W\|y; V_2^3(a_2)\|. \tag{14}$$

Далее в силу (7):

$$\|a_2 y'z'\|_{L_2(I)} \le \left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sup_{(k,k+1)}|z'|\right)^2\int_k^{k+1}|a_2 y'|^2 dx\right\}^{1/2} \le c_0^*\|y; V_2^3(a_2)\|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\int_k^{k+1}(|z''| + |z|)dx\right)^2\right\}^{1/2} \le \tag{15}$$

$$\le \sqrt{2}c_0^*\|y; V_2^3(a_2)\|\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1} a_2^{-2}\int_k^{k+1}|a_2 z''|^2 dx + \sum_{k=0}^{\infty}\int_k^{k+1}|z|^2 dx\right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2}c_0^*\|y; V_2^3(a_2)\|\left(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)}\|a_2 z''\|_{L_2(I)} + \left(\int_0^\infty|z|^2 dx\right)^{1/2}\right).$$

В силу (9)

$$\int_0^\infty |z|^2 dx \le \sum_{j=1}^\infty c^2 \left(h^3(x_j) \int_{\Delta(x_j)} a_2^{-2} dt \right)^2 \int_{\Delta(x_j)} \left(|a_2 z''|^2 + |a_0 z|^2 \right) dx \le c^2 \sup_{x\ge 0} \left[h^3(x) \int_{\Delta(x)} a_2^{-2} dt \right] \|z\|_W^2 . \qquad (16)$$

Из (15) и (16) выводим, что

$$\|a_2 y' z'\|_{L_2(I)} \le \sqrt{2} c_0^* \left(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + c(\eta) K \right) \|y; V_2^3(a_2)\| \|z\|_W . \qquad (17)$$

Для оценки нормы $\|a_1 y z'\|_{L_2(I)}$ возьмем в (8)-(9)

$$w(x) = a_1^2(x), v(x) = a_2^{-2}(x)$$

и оценку $\|z; W_1^2(I)\|$ из (15) и (16). Выводим:

$$\|a_1 y z'\|_{L_2(I)} \le \sqrt{2} c_0^* R \left(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + c(\eta) K \right) \|y; V_2^3(a_2)\| \|z\|_W . \qquad (18)$$

В свою очередь

$$\|a_0 y z\|_{L_2(I)} \le \left\{ \sum_{k=0}^\infty \left(\sup_{[k,k+1]} |y| \right)^2 \int_k^{k+1} |a_0 z|^2 dx \right\}^{1/2} \le \qquad (19)$$

$$\le \sqrt{2} c_0^* \|a_0 z\|_{L_2(I)} \left\{ \sum_{k=0}^\infty \int_k^{k+1} a_2^{-2} dx \left(\int_k^{k+1} |a_2 y'|^2 dx + \int_k^{k+1} |a_2 y|^2 dx \right) \right\}^{1/2} \le$$

$$\le \sqrt{2} c_0^* \|z\|_W \|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} \|y; V_2^3(a_2)\|.$$

Собирая оценки (14), (17)-(19), выводим:

$$\|yz\|_{L_2(I)} \le \|y\mathrm{L}z\|_{L_2(I)} + \|a_2 (y'z)'\|_{L_2(I)} + \|a_2 y' z'\|_{L_2(I)} + \|a_1 y z'\|_{L_2(I)} + 2\|a_0 y z\|_{L_2(I)} \le$$

$$\le \|\mathrm{L}z; M(V_2^3(a_2) \to L_2(I))\| + c(\beta, \eta)(1 + \mathrm{N}) \left(\|a_2^{-1}\|_{L_2(I)} + K \right) \|z\|_W \|y; V_2^3(a_2)\|.$$

Теорема доказана.

Список использованной литературы:

1 Kussainova, L.K., Sultanaev, Ia.T., Kassym, A.S. On an invertible extension of a non-self-adjoint singular differential operator on a half-line. // Differential Equations. №57. P. 1408-1412. https://doi.org/10.1134/s0012266121100153

2 Мазья В.Г., Шапошникова Т.О. Теория мультипликаторов в пространствах дифференцируемых функций. Ленинград, Изд. ЛГУ, 1986. - 404 с. http://www.libex.ru/detail/book1054619.html

3 Kassym A.S. Kusainova L.K. On the Separation Property of the Sturm–Liouville Operator in Weighted Spaces of Multiplicators. //Journal of Mathematical Science. 2019. №241. P. 596-604. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04448-x

4 Triebel H. Theory of function spaces. Birkhäuser Verlag, Basel 1983. -281 c.https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0416-1

5 Kussainova L., Myrzagaliyeva A. On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part I // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Karaganda, 2016. Vol. 82, №2. P. 74-83.

6 Myrzagaliyeva A. Multipliers in weighted Sobolev spaces on the axis. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Karaganda, 2022. №3(107). P. 105-115. https://doi.org/10.31489/2022M3/105-115

7 Гаибов Д.С. Коэрцитивные оценки и разделимость дифференциальных операторов класса Трибеля. // Автореферат. Душанбе, 2008. -14 с. https://new-disser.ru/_avtoreferats/01004244003.pdf

8 Наймарк М.А. Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969. -528 с. http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf

9 Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. *М.: Наука, 1976. -544 с.*

10 Кусаинова Л.К. Теоремы вложения и интерполяция весовых пространств Соболева. // Дис.… д-ра физ.-мат. наук. Караганда, 1998, 228 с.

References:

1 Kussainova, L.K., Sultanaev, Ia.T., Kassym, A.S. (2021) On an invertible extension of a non-self-adjoint singular differential operator on a half-line. // Differential Equations. №57. P. 1408-1412. https://doi.org/10.1134/s0012266121100153

2 Mazia, V.G., Shaposhnikova, T.O. (1986). Teoriia multiplikatorov v prostranstvakh differentsiruemykh funktsii [Theory of multipliers in spaces of differentiable functions]. Leningrad: Izd.LGU (in Russian).

3 Kassym A.S. Kusainova L.K. On the Separation Property of the Sturm–Liouville Operator in Weighted Spaces of Multiplicators. // Journal of Mathematical Science. 2019. №241. P. 596-604. https://doi.org/10.1007/s10958-019-04448-x

*4 Triebel H. (1983) Theory of function spaces. Birkhäuser Verlag, Basel. 281c.*https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0416-1

5 Kussainova L., Myrzagaliyeva A. On multipliers in weighted Sobolev spaces. Part I // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Karaganda, 2016. Vol. 82, №2. P. 74-83.

6 Myrzagaliyeva A. Multipliers in weighted Sobolev spaces on the axis. // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. Karaganda, 2022. №3(107). P. 105-115. https://doi.org/10.31489/2022M3/105-115

7 Gaibov D.S. Koertsitivnye otsenki i razdelimost differentsialnykh operatorov klassa Tribelia [Coercive Estimates and Separability of Triebel Class Differential Operators] // Avtoreferat. Dushanbe, 2008. -14 s. (in Russian) https://new-disser.ru/_avtoreferats/01004244003.pdf

8 Naimark M.A. Lineinye differentsialnye operatory [Linear differential operators] M.: Nauka, 1969. -528 s. (in Russian)http://ikfia.ysn.ru/wp-content/uploads/2018/01/Najmark1969ru.pdf

9 Kolmogorov A.N., Fomin S.V. Elementy teorii funktsii i funktsionalnogo analiza [Elements of the theory of functions and functional analysis.] M.: Nauka, 1976. -544 s. (in Russian)

10 Kussainova, L.K. (1998) Teoremy vlozheniia i interpoliatsiia vesovykh prostranstv Soboleva [Embedding theorems and interpolation of weighted Sobolev spaces]. (dissertation). Karaganda (in Russian).