

*М.Ж.Мынжасарова**

Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

**e-mail: mynzhasarova.m@mail.ru*

ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ЕСЕПТЕРДІ ВЕКТОРЛЫҚ ӘДІСПЕН ШЫҒАРУДЫҢ ЕРЕКШЕЛІКТЕРІ

Аннотация

Мақалада геометриялық есептерді шығаруда қолданылатын векторлық әдіс туралы айтылған. Оқушылардың вектор тақырыбы бойынша негізгі ұғымдарды меңгеруінің маңыздылығы, олардың жоғары оқу орнында оқытылатын жоғары математика және аналитикалық геометрия курстарын меңгерудегі қажеттілігі туралы айтылған. Вектор ұғымының қалыптасу тарихы және оның қолданылуына арналған зерттеу жұмыстарына талдау жасалған. Мектептің геометрия курсынағы векторларды есептер шығаруда қолдану тақырыбының мазмұнын анықтау мақсатында геометрия пәнінің оқу бағдарламалары мен оқулықтары талданған. Геометриялық есептерді шығаруда дәстүрлі және векторлық әдістерді қолданудың ерекшеліктері айтылған. Геометриялық есептерді шығаруда векторлық әдісті қолданудың тиімділігі баяндалған. Векторлық әдіспен есептерді шығаруда басшылыққа алынатын алгоритм ұсынылған. Мысалдар келтіру арқылы векторлық әдістің қолданысының кең екендігі көрсетілген. Қарастырылған мысалдар негізінде білім алушылардың мектептің геометрия курсы мен жоғары математика курсының есептерін шығарулары үшін вектор тақырыбы бойынша негізгі ұғымдарды білулері қажет деген қорытынды жасалған.

Түйін сөздер: геометрия, есеп, вектор, векторлық әдіс, векторлық әдіспен есеп шығару.

М.Ж. Мынжасарова

Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан

ОСОБЕННОСТИ РЕШЕНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ВЕКТОРНЫМ МЕТОДОМ

Аннотация

В статье рассказывается о векторном методе, используемом при решении геометрических задач. Речь идет о важности усвоения обучающимися основных понятий по теме вектор, их необходимости в освоении курсов высшей математики и аналитической геометрии, преподаваемых в вузе. Проведен анализ исследовательской работы, посвященной истории становления понятия вектор и его применению. Проанализированы учебные программы и учебники школьного курса геометрии с целью определения тем, содержащих использование векторов в решении задач. Изложены особенности использования традиционных и векторных методов при решении геометрических задач. Показана эффективность использования векторного метода при решении геометрических задач. Предложены алгоритмы, которыми нужно руководствоваться при решении задач векторным методом. С помощью приведения примеров показано, что векторный метод имеет широкое применение. На основе рассмотренных примеров сделан вывод о том, что обучающиеся должны знать основные понятия по теме вектора, необходимые для решения задач школьного курса геометрии и курса высшей математики.

Ключевые слова: геометрия, задача, вектор, векторный метод, решение задач векторным методом.

M.Zh. Mynzhasarova

Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

FEATURES OF SOLVING GEOMETRIC PROBLEMS BY THE VECTOR METHOD

Abstract

The article describes the vector method used in solving geometric problems. We are talking about the importance of mastering the basic concepts of vector by students, their need to master the courses of higher mathematics and analytical geometry taught at the university. The analysis of the research work devoted to the history of the formation of the concept of vector and its application is carried out. The study programs and

textbooks of the school geometry course are analyzed in order to determine the topics containing the use of vectors in solving problems. The features of the use of traditional and vector methods in solving geometric problems are described. The efficiency of using the vector method in solving geometric problems is shown. Algorithms are proposed that should be guided when solving problems by the vector method. With the help of examples, it is shown that the vector method has a wide application. Based on the considered examples, it is concluded that students should know the basic concepts on the subject of vector, necessary to solve the problems of the school geometry course and the course of higher mathematics.

Keywords: geometry, problem, vector, vector method, problem solving by vector method.

Кіріспе

Векторлық әдіс – геометриялық есептерді шығарудың кең түрде қолданылатын әдістерінің бірі. Вектор тақырыбының мектептің геометрия курсына енгізілгеніне көп уақыт өтсе де әлі күнге дейін оны меңгеру оқушыларға қиындық туғызатыны анық. Бұл жоғары оқу орнында оқитын студенттерге жоғары математика курсы, аналитикалық геометрия пәндерінен сабақтар жүргізу үдерісінде анық байқалады. Бұл пәнді меңгеру барысында вектор тақырыбы алғашқы бөлім болып беріліп, келесі бөлімдердің барлығында оның қолданылуы қарастырылады. Сондықтан да студенттердің вектор тақырыбы бойынша қарапайым ұғымдарды: вектордың проекциясы; векторларды қосудың үшбұрыш, параллелограмм ережелері; векторларды қосу және азайту, санға көбейту амалдары және олардың қасиеттері; векторлардың скаляр көбейтіндісі және оның қасиеттері т.с.с. білгені маңызды болып табылады [1].

Жоғары оқу орнына оқуға түскен бірінші курс студенттерінің көпшілігінің базалық білім деңгейлерінің төмендігі, вектор тақырыбын оқу барысында үлкен қиындықтарға кездесетіндігі анықталып отыр. Жүргізілген зерттеу нәтижесінде мұндай жағдайдың себептерін анықталды:

- вектор тақырыбын оқыту әдістемесі мектепте әлі толықтай шешілмегендігі;
- векторларды есептерді шығаруда қолдану тақырыбын оқытуға бөлінетін сағаттың аздығы;
- орта білім беру деңгейінде алған геометриялық білім мен біліктерінің жеткіліксіздігі болып табылады.

Зерттеудің мақсаты геометриялық есептерді шығаруда векторды қолдану, яғни векторлық әдісті ерекшелігін көрсету, бұл әдісті есептерді шығаруда қолдануға қажетті мектептің геометрия курсына меңгеруі қажет білім мен біліктерді нақтылау.

Зерттеу әдіснамасы

Вектор ұғымы қазіргі заман математикасының іргелі де негізгі ұғымдарының бірі. Векторлар қолдануларға бай. Техникалық ғылымдар үшін, халық шаруашылығына байланысты көптеген мәселелерді шешу үшін векторлардың маңызы зор.

XIX ғасырдың екінші жартысында векторлық есептеулер дүниеге келді де, үлкен қарқынмен тез дамыды және математиканың құрамдас бір бөлігі болып қалыптасты. Векторлық есептеулердің бастауы Аристотелдің «Механикалық проблемалар» атты еңбегінде табылды. XVII ғасырда Галилео Галилей (1564-1642) күш және оның денені қозғайтын құраушысының арасындағы метрикалық байланысты зерттеді. Ағылшын математигі, әрі физигі атақты Исаак Ньютон (1643-1727) қозғалыстарды қосуға алғаш рет «параллелограмм» ережесін пайдаланды. Неміс математигі Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646-1716) «геометриялық есептеудің» идеясын берді, бірақ оны әрі қарай дамытпады.

Механикадағы векторлық алгебраның негізін қалаушы Джон Валлис (1616-1703) механикаға геометриялық аппарат жасап беруде жаңа әрі аса ірі қадам жасады. Ол екі, үш күштің тең әсерлі және қорытқы күшін табуға, қорытқы жылдамдықты табуға қолданылатын параллелограмм ережесін берді. Оған қоса параллелепипед ережесін ғылымға алғаш рет енгізді. Вектор ұғымын 1846 жылы ғылымға енгізген алғаш рет Ирландия математигі әрі астроном Уильям Гамильтон (1805-1865) болды.

Есептеудің жаңа түрі бойынша жинақталған бай, мазмұнды материалды ортақ идея бойынша біріктіріп, механикадан ажыратып, бұл аппаратты математикалық пән дәрежесіне көтерген ресей ғалымы И.И. Сомов (1815-1876) болды. Векторлық есептеулерді және олардың қолдануларын дамытуға ресей ғалымдары М.В. Остроградский, П.А. Котельников, А.Л. Фридман, Н.Е. Кочин, Я.И. Френкель, П.А. Широков, Д.И. Зейлигер өз үлестерін қосты [2].

И. Кушнирдің зерттеу жұмысында классикалық геометрияның дәстүрлі есептерін шығаруда вектордың мүмкіндігі кеңінен қарастырылған. Кейбір есептерді шығаруда дәстүрлі әдіске қарағанда векторлық әдіс тиімді болғанымен, ал кейбір есептердің шығарылу жолы ұзақ болуы мүмкін екендігі мысалдармен көрсетілген. Дәстүрлі және векторлық әдіс – бұл біз үйренуге тиіс математиканың әртүрлі тілдері екені айтылған [3].

А.Қ. Қарабаевтың зерттеу жұмысында кейбір алгебралық және тригонометриялық стандартты емес есептерді геометриялық немесе векторлық тілге аудару арқылы шешуді қарастырған. Теңсіздіктерді дәлелдеуге, теңдеулер мен теңдеулер жүйелерін шешуге және функциялар мен өрнектердің экстремумдарын табуға векторлық әдісті қолдану мысалдармен көрсетілген [4]. Бұл зерттеулерді талдау векторлық әдістің қолданулары кең екендігін көрсетеді. Мемлекеттік жалпыға міндетті стандартына сәйкес әзірленген 2017 жылы жаңартылған мазмұндағы негізгі орта білім беру деңгейінің 7-9 сыныптарына арналған «Геометрия» пәнінен үлгілік оқу бағдарламасына [5] және 10-сынып оқушылары үшін 01.09.2019, 11-сынып оқушылары үшін 01.09.2020 бастап қолданысқа енгізілген жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-11-сыныптарына арналған "Геометрия" оқу пәнінен жаңартылған мазмұндағы үлгілік оқу бағдарламасына [6] талдау жасалып, вектор тақырыбының мазмұны анықталды (Кесте 1). Мектептің геометрия курсында 9 сыныпта жазықтықтағы вектор және 10-сыныпта кеңістіктегі вектор тараулары қарастырылады. Бағдарлама мазмұнында вектор тақырыбының барлық негізгі ұғымдарының толық қамтылғанын байқауға болады.

Кесте 1. 7-11 сыныптардағы вектор тақырыбының мазмұны

<i>Тараулардың атауы және мазмұны</i>	
<i>9-сынып</i>	<i>10-сынып</i>
<i>Жазықтықтағы векторлар</i>	<i>Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі және векторлар</i>
<i>Вектор ұғымы. Нөлдік вектор. Бірлік вектор. Коллинеар векторлар. Вектордың ұзындығы (модулі). Векторлардың теңдігі. Векторларды қосу және оның қасиеттері, векторларды азайту, векторды санға көбейту. Жазықтықтағы векторды екі коллинеар емес векторлар бойынша жіктеу. Вектордың координаталары. Координаталық түрде берілген векторларға амалдар қолдану. Векторлардың коллинеарлық белгісі. Нүктенің радиус-векторы. Жазықтықтағы нүктелердің координаталары мен векторлардың координаталары арасындағы байланыс. Векторлардың арасындағы бұрыш. Векторлардың скалярлық көбейтіндісі. Векторларды есептерді шығаруда қолдану.</i>	<i>Кеңістіктегі векторлар және оларға амалдар қолдану. Коллинеар және компланар векторлар. Кеңістіктегі тікбұрышты координаталар жүйесі. Кеңістіктегі вектордың координаталары. Координатасымен берілген векторларды қосу және азайту, координатасымен берілген векторды санға көбейту. Векторды үш компланар емес вектор бойынша жіктеу. Екі нүктенің арақашықтығы. Кесіндіні берілген қатынаста бөлу. Кесінді ортасының координаталары. Векторлардың скаляр көбейтіндісі. Сфера теңдеуі. Жазықтық теңдеуі. Кеңістіктегі түзудің теңдеуі.</i>

Бағдарлама мазмұнының жүзеге асырылуын анықтау үшін жалпы білім беретін мектепке арналған геометрия оқулықтарына талдау жасалды. Мектеп курсына қазіргі уақытта қолданыстағы 9-сыныптың геометрия оқулығында векторларды есеп шығаруда қолдану тақырыбында векторлық әдіс және оның кезеңдері туралы мәлімет берілген және осы әдіске үш мысал келтірілген [7]. Сонымен қатар тақырыпқа ұсынылған есептердің ішінде де векторлық әдіспен шығарылатын есептер кездеседі, бірақ саны аз. Келесі геометрия оқулығында векторларды есеп шығаруда қолдану тақырыбы бар, бірақ векторлық әдіс туралы ешқандай мәлімет берілмеген. Үлгі ретінде 4 есептің шығарылу жолы келтірілген, мысалдың біріншісі вектордың физикада қолданысына, қалғандары түзулердің теңдеуін жазуға және екі түзудің перпендикулярлығын дәлелдеуде векторды қолдануға арналған. Тақырып соңында ұсынылған санаулы тапсырма вектордың физикада қолданысына бағытталған және бұл тапсырмаларды қандай әдіспен орындау қажеттігі туралы айтылмаған [8]. Ал келесі геометрия оқулығында бағдарламада ұсынылған векторларды есеп шығаруда қолдану тақырыбы мүлде жүзеге асырылмаған [9]. Мектеп курсына қолданыстағы 10-сыныптың геометрия оқулығында векторларды есеп шығаруда қолдану тақырыбында векторлық әдіс және оның кезеңдері туралы тағы да мәлімет келтірілген және осы әдіске екі мысал берілген [10]. Векторлық әдіспен шығаруға ұсынылған тапсырмалардың барлығы С-тобында берілген.

Оқулықтарды талдау айқындағандай геометриялық есептерді векторлық әдіспен шығаруға үйрету, мұндай есептердің мән-мағынасын түсіндіру мәселесі әлі де зерттеуді қажет ететіндігін көрсетеді.

Зерттеу нәтижесі

Векторлық әдіс – геометриялық есептерді шығарудың жалпы әдістерінің бірі. Векторлық әдісті іске асыру және пәнішілік байланысты орнату, математикалық моделдеудегі дағдыны жетілдіру сияқты векторлық әдістің есепті шығарудағы көптеген мүмкіндігі бар.

Векторлық әдісті:

- түзу тақырыбына берілген есептерді (түзулердің параллелдігін және перпендикулярлығын дәлелдеу, нүктелердің бір түзудің бойында жататынын дәлелдеу, түзулердің арасындағы бұрышты табу) шығаруда;

- кесіндіні берілген қатынаста бөлуге берілген есептерді шығаруда;

- геометриялық фигуралардың белгілі бір қасиеттерін дәлелдеуде;

- теоремаларды дәлелдеуде;

- теңдіктер мен теңсіздіктерді дәлелдеуде қолдану тиімді болып табылады.

Геометриялық есептерді векторлық әдіспен шығару оларды элементар геометрияның құралдарымен шығарудан жеңіл. Сонымен қатар, есептің шешімін іздеуді қиындататын қосымша салулардың қажеті жоқ болады. Есептердің мәтінінде векторларды қолдану жөнінде айқын жазылған мәліметтер жоқ болғандықтан, есеп қиындап шешілмейтіндей көрінеді. Сондықтан геометрияның есептерін векторлық әдіспен шығару алдымен геометриялық есептің шартын «векторлық» тілге аудару қажет. Осындай аудармадан кейін векторлармен алгебралық есептеулер жүзеге асырылады, содан кейін алынған нәтиже «геометриялық» тілге аударылады. Осы айтылған қағидаларды іс жүзінде қолдану үшін фигуралардың қасиеттерін векторлық тепе-теңдіктер түрінде өрнектей білу қажет. Векторлық әдістің ерекшелігі жылдам қорытынды жасауға мүмкіндік беруінде болып табылады. Векторлық аппаратты меңгерген оқушыларға күрделі есептерді қарапайым жолмен шығару қиындық туғызбайды.

Дискуссия

Векторлық әдістің геометриялық есептерді шығарудағы қолданысы кең екенін жоғарыда айттық. Жоғарыда айтылғандай векторлық әдістің дәстүрлі әдіске қарағанда тиімділігін салыстырмалы түрде келесі қарапайым мысалдан көруге болады (Кесте -2).

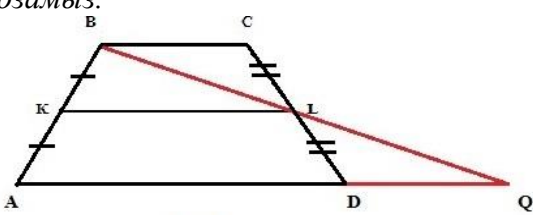
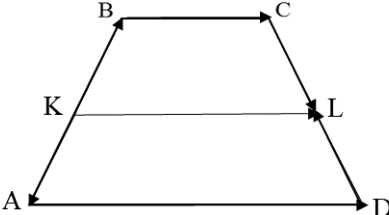
№1. Трапецияның орта сызығы оның табандары қосындысының жартысына тең болатынын дәлелде [11].

Берілгені: $ABCD$ - трапеция. KL - трапецияның орта сызығы.

Дәлелдеу керек: $KL = \frac{1}{2} / BC + AD /$.

Дәлелдеуі.

Кесте 2. Дәстүрлі және векторлық әдістерді салыстыру

Дәстүрлі әдіс	Векторлық әдіс
<p>B, L нүктелері арқылы BQ түзуін жүргіземіз және AD табанын Q нүктесіне дейін созамыз.</p>  <p>Салу нәтижесінде алынған LBC, LQD үшбұрыштарын қарастырамыз.</p> <ol style="list-style-type: none"> KL трапецияның орта сызығы болғандықтан L нүктесі CD кесіндісінің қақ ортасы болып табылады. Бұдан CL мен LD кесінділері өзара тең екенін көреміз. $\angle BLC = \angle QLD$ - вертикаль бұрыштар. $\angle BCL = \angle LDQ$ бұрыштары параллель жатқан AD және BC кесінділері мен оларды қиюшы CD кесіндісі арқылы айқас түзулердің арасындағы бұрыштар болып есептеледі. <p>Үшбұрыштар теңдігінің екінші белгісі бойынша LBC, LQD үшбұрыштары тең. Бұл $\angle LBC = \angle LQD, BC=DQ$ және $BL=LQ$ екенін береді. Осыдан $ABCD$ трапециясының орта сызығы KL, ABQ үшбұрышының да орта сызығы екенін байқаймыз. Үшбұрыштың орта сызығының қасиетіне сәйкес :</p> $KL = \frac{AQ}{2} = \frac{AD + DQ}{2} = \frac{AD + BC}{2}$	 <p>$\vec{KL} = \vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CL}$ - векторларды қосудың «көпбұрыш» ережесі бойынша. $\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AD} + \vec{DL}$ - векторларды қосудың «көпбұрыш» ережесі бойынша.</p> <p>Осы екі теңдікті мүшелеп қосамыз: $2\vec{KL} = \vec{KB} + \vec{BC} + \vec{CL} + \vec{KA} + \vec{AD} + \vec{DL}$. \vec{KB} мен \vec{KA}, \vec{CL} мен \vec{DL} - өзара қарама-қарсы векторлар. Қарама-қарсы векторлардың қосындысы нөлдік вектор болатындығын ескерсек мынадай теңдік аламыз: $2\vec{KL} = \vec{BC} + \vec{AD}$. Осыдан $\vec{KL} = \frac{\vec{BC} + \vec{AD}}{2}$ немесе $\vec{KL} = \frac{1}{2} / \vec{BC} + \vec{AD} /$</p>

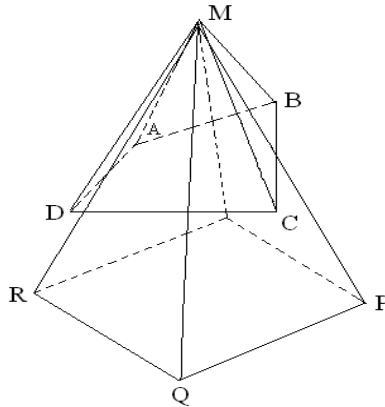
Геометриялық фигуралардың қасиеттерін дәлелдеуде векторлық әдісті қолдануға тоқталайық.

№2. Жазықтықта $ABCD$ төртбұрышы және одан тыс жатқан M нүктесі берілген. M нүктесіне $ABCD$ төртбұрыштың AB, CD, BC, DA қабырғаларының ортасына қарағанда симметриялы нүктелер параллелограмның төбесі болатындығын дәлелде.

Берілгені: $ABCD$ – төртбұрыш. R, N, P, Q – M нүктесіне AB, BC, CD және DA кесінділерінің ортасына қарағанда симметриялы нүктелер (Сурет 1).

Дәлелдеу керек: $RNPQ$ – параллелограмм.

Дәлелдеуі.



Сурет 1.

Векторларды қосудың параллелограмм ережесі бойынша:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{MB}; \quad \overline{MP} = \overline{MB} + \overline{MC}; \quad \overline{MQ} = \overline{MC} + \overline{MD}; \quad \overline{MR} = \overline{MD} + \overline{MA}. \quad (1)$$

Векторларды азайту ережесі бойынша: $\overline{NR} = \overline{MR} - \overline{MN}$ және $\overline{PQ} = \overline{MQ} - \overline{MP}$ теңдіктерін аламыз. Берілген теңдіктерді азайтамыз $\overline{NR} - \overline{PQ} = (\overline{MR} - \overline{MN}) - (\overline{MQ} - \overline{MP})$.

Осы теңдіктегі әрбір вектордың орнына (1) теңдіктерді қойсақ, $\overline{NR} - \overline{PQ} = (\overline{MD} + \overline{MA} - \overline{MA} - \overline{MB}) - (\overline{MC} + \overline{MD} - \overline{MB} - \overline{MC}) = 0$ болады. $\overline{NR} = \overline{PQ}$ сол сияқты $\overline{NP} = \overline{RQ}$, бұдан шығатыны $NR=PQ$ және $NP=RQ$, яғни параллелограмның анықтамасы бойынша $RNPQ$ – параллелограмм.

Теңдіктерді дәлелдеуде векторлық әдісті қолданайық.

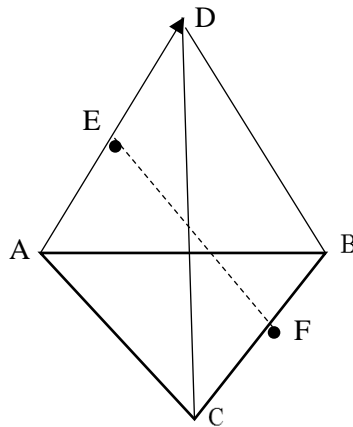
№3. Табаны ABC үшбұрышы болатын $ABCD$ тетраэдр берілген. Оның барлық қырлары тең. DA кесіндісінің ортасы - E нүктесі, ал BC қабырғасының ортасы - F нүктесі. $\overline{EF} \cdot \overline{AD} = 0$ болатынын дәлелде [11].

Берілгені: $ABCD$ - тетраэдр. $E = \frac{1}{2}\overline{AD}$; $F = \frac{1}{2}\overline{BC}$. Тетраэдрдың барлық қырлары тең.

Дәлелдеу керек: $\overline{EF} \cdot \overline{AD} = 0$.

Дәлелдеуі.

Тетраэдрдің барлық қырлары тең болғандықтан $\angle DEF$ және $\angle AEF$ бұрыштары тең (Сурет 2).



Сурет 2

Бұдан \overline{EF} және \overline{AD} векторларының арасындағы бұрыш 90° -қа тең екенін көреміз.

Сонда $\varphi = 90^\circ; \cos 90^\circ = 0$. Енді екі вектордың скаляр көбейтіндісін табайық:

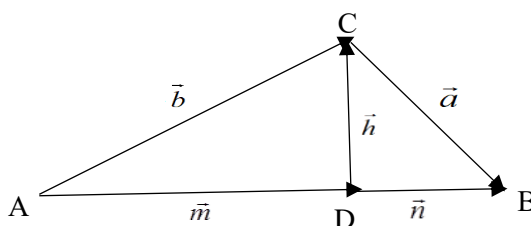
$$\overline{EF} \cdot \overline{AD} = |\overline{EF}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \cos 90^\circ; \cos 90^\circ = 0 \Rightarrow \overline{EF} \cdot \overline{AD} = 0.$$

№4. Тікбұрышты үшбұрыштың тік бұрышының төбесінен гипотенузаға түсірілген биіктік гипотенуза кесінділерінің пропорционал ортасы болатынын дәлелде.

Берілгені: ABC - тікбұрышты үшбұрыш. CD - AB гипотенузасына түсірілген биіктік.

Дәлелдеу керек: $\overline{DC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$.

Дәлелдеуі: ABC үшбұрышында $\angle ACB = 90^\circ$, $[CD] \perp [AB]$. $\overline{AC} = \overline{b}$, $\overline{CB} = \overline{a}$, $\overline{DC} = \overline{h}$, $\overline{AD} = \overline{m}$, $\overline{DB} = \overline{n}$ (Сурет-3). ADC үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{h} = \overline{b} - \overline{m}$ және BDC үшбұрышынан векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overline{h} + \overline{a} = \overline{n} \Rightarrow \overline{h} = \overline{n} - \overline{a}$ теңдіктерін аламыз.



Сурет 3

Бұл теңдіктердің скаляр көбейтіндісін табамыз, сонда:

$$\overline{h} \cdot \overline{h} = (\overline{b} - \overline{m})(\overline{n} - \overline{a}) = \overline{b} \cdot \overline{n} - \overline{m} \cdot \overline{n} - \overline{b} \cdot \overline{a} + \overline{m} \cdot \overline{a}$$

немесе $h^2 = \overline{n} \cdot n - \overline{m} \cdot \overline{n} \cdot \cos 0^\circ - \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \cos 90^\circ + \overline{m} \cdot n - \overline{m} \cdot \overline{n} + \overline{m} \cdot \overline{n} = \overline{m} \cdot \overline{n}$.

Бұдан $h^2 = \overline{m} \cdot \overline{n}$ бұл $\overline{DC}^2 = \overline{AD} \cdot \overline{DB}$ екенін береді.

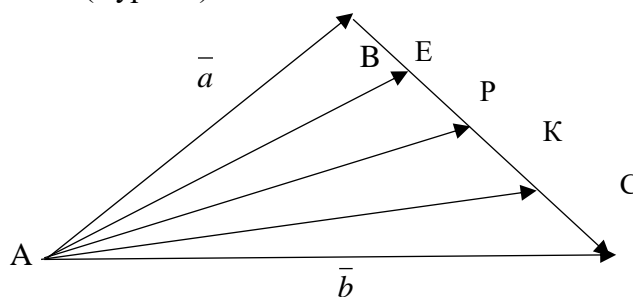
Енді жоғары математика курсында вектор тақырыбына ұсынылған есептерді қарастырайық.

№5. ABC үшбұрышының BC қабырғасы E, P, K нүктелерімен тең төрт бөлікке бөлінген. Егер $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$ болса, онда $\overline{AE}, \overline{AP}, \overline{AK}$ векторлары \overline{a} мен \overline{b} векторлары арқылы қалай өрнектеледі? [12].

Берілгені: ABC - үшбұрыш. $E, P, K \in BC$. $BE=EP=PK=KC$. $\overline{AB} = \overline{a}$, $\overline{AC} = \overline{b}$

Табу керек: $\overline{AE}, \overline{AP}, \overline{AK}$ -?

Шешуі: ABE үшбұрышынан векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overline{AB} + \overline{BE} = \overline{AE}$ теңдігін аламыз (Сурет 4).



Сурет 4

ABC үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$ теңдігін аламыз. Есептің шарты бойынша $\overline{BE} = \frac{\overline{BC}}{4} \Rightarrow \overline{BE} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{4}$ болады.

Осыдан ізделінді $\overline{AE} = \overline{a} + \frac{\overline{b} - \overline{a}}{4} = \frac{4\overline{a} + \overline{b} - \overline{a}}{4} = \frac{3\overline{a} + \overline{b}}{4} = \frac{1}{4}(3\overline{a} + \overline{b})$ болып өрнектелетінін табамыз.

ABP үшбұрышынан векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overline{AB} + \overline{BP} = \overline{AP}$ теңдігін аламыз. ABC үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$ теңдігін аламыз. Есептің шарты бойынша $\overline{BP} = \frac{\overline{BC}}{2} \Rightarrow \overline{BP} = \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2}$

болады. Осыдан ізделінді $\overline{AP} = \overline{a} + \frac{\overline{b} - \overline{a}}{2} = \frac{2\overline{a} + \overline{b} - \overline{a}}{2} = \frac{\overline{a} + \overline{b}}{2} = \frac{1}{2}(\overline{a} + \overline{b})$ болып өрнектелетінін табамыз.

ABK үшбұрышынан векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overline{AB} + \overline{BK} = \overline{AK}$ теңдігін аламыз. ABC үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB} = \overline{b} - \overline{a}$ теңдігін аламыз. Есептің шарты бойынша $\overline{BK} = \frac{3\overline{BC}}{4} \Rightarrow \overline{BK} = \frac{3(\overline{b} - \overline{a})}{4}$

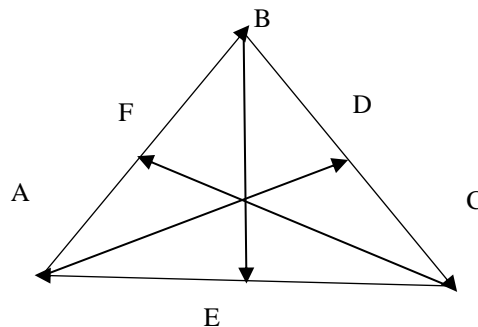
болады. Осыдан ізделінді $\overline{AK} = \overline{a} + \frac{3(\overline{b} - \overline{a})}{4} = \frac{4\overline{a} + 3\overline{b} - 3\overline{a}}{4} = \frac{\overline{a} + 3\overline{b}}{4} = \frac{1}{4}(\overline{a} + 3\overline{b})$ болып өрнектелетінін табамыз.

№6. ABC үшбұрышында AD, BE, CF медианалары жүргізілген. $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ қосындысын тап.

Берілгені: ABC - үшбұрыш. AD, BE, CF – медианалар (Сурет 5).

Табу керек: $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF}$ - ?

Шешуі:



Сурет 5

ABD үшбұрышынан векторларды қосудың үшбұрыш ережесі бойынша $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BD}$ теңдігін аламыз. BCE үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{BE} - \overline{BC} = \overline{CE} \Rightarrow \overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE}$ теңдігі шығады. ACF үшбұрышынан векторларды азайту ережесі бойынша $\overline{CF} - \overline{CA} = \overline{AF} \Rightarrow \overline{CF} = \overline{CA} + \overline{AF}$ теңдігін аламыз. Медиананың қасиеті бойынша $\overline{BD} = \frac{\overline{BC}}{2}, \overline{CE} = \frac{\overline{CA}}{2}, \overline{AF} = \frac{\overline{AB}}{2}$. Осыдан

$$\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{AB} + \overline{BD} + \overline{BC} + \overline{CE} + \overline{CA} + \overline{AF} = \overline{AB} + \frac{\overline{BC}}{2} + \overline{BC} + \frac{\overline{CA}}{2} + \overline{CA} + \frac{\overline{AB}}{2} =$$

$$\frac{2\overline{AB} + \overline{BC} + 2\overline{BC} + \overline{CA} + 2\overline{CA} + \overline{AB}}{2} = \frac{3\overline{AB} + 3\overline{BC} + 3\overline{CA}}{2} = \frac{3}{2}(\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA}) = \frac{3}{2}(\overline{AC} + \overline{CA}) = 0$$

Қорытынды

Векторлық әдістің мектептің геометрия курсына өз деңгейінде оқытылуы біріншіден геометрия пәнінің оқу бағдарламаларында ұсынылған мазмұнның геометрия оқулықтарында табысты жүзеге асырылуына байланысты. Талдау көрсеткендей қолданыстағы мектептің геометрия оқулықтарының тек біреуінде векторды есеп шығаруда қолдану тақырыбы жүзеге асырылған. Сонымен қатар, бұл тақырыпқа берілген тапсырмалардың саны шектеулі екені анықталды.

Екіншіден білім беру деңгейлерінің арасында тығыз байланыстың болуы маңызды. Яғни жоғары оқу орнында аналитикалық геометрия пәнін мектептегі геометрия курсының мазмұнын ескере отырып оқыту. Педагогикалық жоғары оқу орнында аналитикалық геометрия пәнін оқыту мазмұны және оны студенттерге оқыту әдістемесі мектептегі геометрияны оқытумен байланысты болуы қажет. Нәтижесінде, геометрияны оқытудағы сабақтастық бірінші курс студенттерінің мектеп пен университеттегі алған білімдері арасындағы ажырамас байланыстарды қамтамасыз етеді. Білім беру деңгейлерінің арасында сабақтастықты сақтау геометрияны оқытудың негізгі талаптардың бірі екенін ұмытпау қажет.

Жоғарыдағы мысалдарды қарастыра отырып мектептің геометрия курсына және жоғары оқу орнында жоғары математика курсына геометриялық есептерді векторлық әдіспен шығару үшін білім алушылар төмендегілерді білулері қажет деген қорытындыға әкеледі:

- 1) геометриялық терминдерді векторлар тіліне аудару және керісінше;
- 2) векторлармен амалдар орындау (векторлардың қосындысын, айырмасын, векторлардың санға көбейтіндісін табу);
- 3) векторға қолданылатын амалдардың қасиеттерін пайдалану;
- 4) векторлардың байланысын түрлендіру.
- 5) векторларды скаляр көбейту және оның қасиеттерін қолдану.

Геометриялық есептерді шығарудың векторлық әдісін келесі мақсаттарда меңгеруге болады:

- әртүрлі есептерді шығарудың және теоремаларды дәлелдеудің тиімді әдісін ұсыну;
- білім алушыларда жалпылау мен нақтылауды қалыптастыру мақсатында пайдалану;
- білім алушыларда икемділік, мақсаттылық, ұтымдылық, сынилық сияқты ойлау қасиеттерін қалыптастыру.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Степаненко Г.А. Об эффективности векторного метода при решении некоторых геометрических и алгебраических задач / Г. А. Степаненко, Т. А. Пономаренко, Д. Р. Сытникова // Мир науки. Педагогика и психология. -2023. Т.11. - № 2. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/31PDMN223.pdf>

2 Бүкібаева К. Векторлық есептеулер және оның жасалу тарихын оқыту туралы. - Қазақстан жоғары мектебі, №2, 2004.

3 Кушнир И.А. Векторные методы решения задач. – Киев: Издательство «Обериг», 1994. -208 с.

4 Қарабаев А.Қ. Векторлық әдісті есептерді шығаруға қолдану. – Жезқазған. ЖезУ. 2000. -137 б.

5 Негізгі орта білім беру деңгейінің 7-9-сыныптарына арналған "Геометрия" пәнінен үлгілік оқу бағдарламасы. <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V2000021688#z42>

6 Жалпы орта білім беру деңгейінің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-11-сыныптарына арналған "Геометрия" оқу пәнінен жасап берілген мазмұндағы үлгілік оқу бағдарламасына қосымша. <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V1900018382#z60>

7 Шыныбеков А.Н. т.б. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық Алматы: Атамұра, 2019. -176 б.

8 Солтан Г.Н. т.б. Геометрия: Жалпы білім беретін мектептің 9-сынып оқушыларына арналған оқулық / Солтан А.Е., Жұмадилова А.Ж.-Көкшетау: Келешек-2030, 2019. -240 б.

9 Смирнов В.А., Тұяқов Е.А. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің 9-сыныбына арналған оқулық –Алматы: Мектеп, 2019. -184б.

10 Шыныбеков А.Н. т.б. Геометрия. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / Ә.Н.Шыныбеков, Д.Ә.Шыныбеков, Р.Н.Жұмабаев. –Алматы: Атамұра, 2020. -112 б.

11 Гусев В., Бекбоев И., Қайдосов Ж., Абдиев А. Жалпы білім беретін мектептің жаратылыстану-математика бағытындағы 10-сыныбына арналған оқулық / В.Гусев, И.Бекбоев, Ж.Қайдосов, А.Абдиев. -Алматы: Мектеп, 2010. -104 б.

12 Букенбаев К.Б. Математика – 1. Петропавл: М.Қозыбаев атындағы СҚМУ, 2007. -398 б.

References:

1 Stepanenko G.A. (2023) *Ob jeffektivnosti vektornogo metoda pri reshenii nekotoryh geometricheskikh i algebraicheskikh zadach* [On the effectiveness of the vector method in solving some geometric and algebraic problems] *Mir nauki. Pedagogika i psihologija*. -2023. T.11. - № 2. URL: <https://mir-nauki.com/PDF/31PDMN223.pdf> (in Russian)

2 Бүкібаева К. (2004) *Vektorlyk esepiteuler zhine onyn zhasalu tarihin okytu turaly*. [On teaching vector calculations and the history of its creation] *Қазақстан zhоғары mektebi*, №2.

3 Kushnir I.A. (1994) *Vektornye metody resheniya zadach*. Kiev: Izdatel'stvo «Oberig»,. 208 s.

4 Қарабаев А.Қ. (2000) *Vektorlyқ әdisti esepтерdi shyғаруға қoldanu* [Application of the Vector method to solving problems] *Zhezqazgan. ZhezU*. 137 b. (in Kazakh)

5 *Negizgi orta bilim beru deңgejiniң 7-9-synyptaryna arnalған "Geometrija" pәninen ylgilik oқu baғdarlamasy*. [Sample curriculum for the subject “Geometry” for grades 7-9 of basic secondary education.] <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V2000021688#z42> (in Kazakh)

6 *Zhalpy orta bilim beru deңgejiniң zharatylystanu-matematika baғytyndaғы 10-11-synyptaryna arnalған "Geometrija" oқu pәninen zhaңartylған mazmұndaғы ylgilik oқu baғdarlamasyна қosymsha*. [I added to the model curriculum of the subject "Geometry" for the 10-11th grades of Zharatylystanu-mathematics of Zhalpy secondary education] <https://adilet.zan.kz/kaz/docs/V1900018382#z60> (in Kazakh)

7 Shynybekov A.N. t.b. (2019) *Geometrija. Zhalpy bilim beretin mekteptiң 9-synybyna arnalған* [Textbook for the 9th grade of a general education school] –Almaty: Atamұra, 176 b.

8 Soltan G.N. t.b. (2019) *Geometrija: Zhalpy bilim beretin mekteptiң 9-synyp oқushylaryna arnalған oқulyқ* / [Geometry: Textbook for 9th grade students of general education school]-Көкshetau: Keleshek-2030, 240 b.

9 Smirnov V.A., Тұяқов Е.А. (2020) *Geometrija. Zhalpy bilim beretin mekteptiң 9-synybyna arnalған oқulyқ* [Geometry. Textbook for the 9th grade of a general education school] Almaty: Мектеп, 2019. -184b.

10 Shynybekov A.N. t.b. (2020) *Geometrija. Zhalpy bilim beretin mekteptiң zharatylystanu-matematika baғytyndaғы 10-synybyna arnalған oқulyқ* [Geometry. Textbook for the 9th grade of a general education school] Almaty: Atamұra, 112 b.

11 Gusev V., Bekboev I., Қajdosov Zh., Abdiev A. (2010) *Zhalpy bilim beretin mekteptiң zharatylystanu-matematika baғytyndaғы 10-synybyna arnalған oқulyқ* [Textbook for the 10th grade of a general education school in the field of science and mathematics] Almaty: Мектеп, 104 b.

12 Bukebaev K.B. (2007) *Matematika – 1. Petropavl* [Mathematics - 1.] М.Қозыбаев атындағы СҚМУ, 398 b.