МАТЕМАТИКА

MATHEMATICS

МРНТИ 27.31.15
УДК 517.951

10.51889/2959-5894.2023.83.3.001

А.У. Бекбаувова [1], М.Ж. Талипова [1], А.Е. Иманчиев [1], Е.К. Курмангалиев [1], Н.Ж. Утеуова [2]*

[1]Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[*]e-mail: mirra478@mail.ru

ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ДИФФЕРЕЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ЖҮЙЕСІНІҢ КЕҢ МАҒЫНАДАҒЫ ШЕШІМДЕРІН ТҰРҒЫЗУ

Аңдатпа

Мақалада бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда кең мағынадағы шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарттарын анықтау сұрақтары қарастырылған. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер гидроаэромеханиканың, химиялық кинетиканың, каталитикалық реакциялар теориясының әр түрлі қолданбалы есептерін модельдейді. Бастапқы функциялар қаншалықты жатық болса да, уақыт өтуіне қарай бірінші ретті дербес туындылы теңдеулердің классикалық шешімдері қандай да бір ерекшеліктерге ие болатыны белгілі, осы мәселе бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің классикалық шешімдерін кеңейту қажеттілігін туғызды. Мақалада бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша қойылған периодты шарттарда кең мағынадағы шешімнің бар және жалғыз болуының қажетті шарты табылды. Біртекті және біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің фундаменталь шешімі тұрғызылып, шешімнің қойылған айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды қанағаттандыратындығы көрсетілді, шешімнің шектелгендігі, жалғыздығы, қандай шарттарда бар болатындығы тұжырымдар арқылы берілді.

Түйін сөздер: дербес туындылы теңдеулер жүйесі, қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесі, кең мағынадағы шешімдер, периодты шешімдер, фундаменталь шешім.

Аннотация

А.У. Бекбаувова [1], М.Ж. Талипова [1], А.Е. Иманчиев [1], Е.К. Курмангалиев [1], Н.Ж. Утеуова [2]
[1]НАктюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан,
[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ СИСТЕМ ДИФФЕРЕЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В статье рассмотрены вопросы существования и единственности решения в широком смысле системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с одинаковой главной частью с периодическими по части переменных условиями. Во многих математических моделях, особенно в теории «мелкой воды», движение несжимаемой жидкости в неглубоких каналах, плоское установившееся сверхзвуковое течение сжимаемого газа возникают дифференциальные уравнения в частных производных. Классические решения нелинейных уравнений обладают свойством неограниченного возрастания величины производных, которое называют градиентной катастрофой (ударная волна, образованная из волны сжатия). Смысл этого свойства состоит в том, что при сколь угодно гладких начальных значениях первые производные решения остаются ограниченными, лишь в течение конечного времени. Поэтому возникает насущная необходимость расширить понятие классических решений систем уравнения в частных производных первого порядка. В статье установлены достаточные условия существования и единственности решения в широком смысле систем уравнений в частных производных с одинаковой главной частью с периодического по части переменных условиями.

Ключевые слова: системы уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения, решения в широком смысле, периодические решения, фундаментальное решение.

Abstract

CONSTRUCTION OF SOLUTION IN BROAD SENSE OF SYSTEMS OF DIFFERETIAL EQUATIONS IN PRIVATE DERIVATIVES

Bekbauova A.U.[1], Talipova M.Zh.[1], Imanchiev A.E.[1], Kurmangaliev E.K.[1], Uteuova N.Zh.[2]
[1]Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan,
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

The article considers the issues of existence and uniqueness of the solution in the broad sense of a system of differential equations in partial derivatives of the first order with the same main part with periodic conditions in part of variables. In many mathematical models, especially in the theory of "fine water," the movement of an uncompressible liquid in shallow channels, a flat steady supersonic flow of a compressible gas, differential partial differential equations arise. Classical solutions of nonlinear equations have the property of an unlimited increase in the magnitude of derivatives, which is called a gradient catastrophe (a shock wave formed from a compression wave). The meaning of this property is that with arbitrarily smooth initial values, the first derivative solutions remain limited, only for a finite time. Therefore, there is an urgent need to expand the concept of classical solutions to first-order partial differential equation systems. The article establishes sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution in the broad sense of systems of partial differential equations with the same main part with periodic conditions in terms of variables.

Keywords: partial differential equation systems, ordinary differential equations, solutions in the broad sense, periodic solutions, fundamental solution.

Кіріспе

Көптеген математикалық модельдерде, әсіресе «таяз су» теориясында, терең емес арналардағы сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысында, сығылатын газдың тегіс, тұрақты дыбыстан жоғары ағындарын сипаттауда, дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйелері қолданылады.

Квазисызықты гиперболалық теңдеулердің 3D телеграфты теңдеулерде қолданысы, сонымен қатар бірінші ретті гиперболалық дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің тербелістер комбинациясын оптимизациялап, ұшқышсыз ұшу аппаратының каналдарын жоспарлауда қолданыстары, және де әртүрлі физикалық құбылыстарда қолданыстары қәзіргі таңда өзекті мәселелердің бірі, көптеген зерттеулерде зерттелген [1-6].

А. Пуанкаренің үш денеге арналған есебі мен А.М.Ляпуновтың кез-келген механикалық жүйенің қозғалысы туралы есептерінде дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері теориясының негізі салынды [7-8].

А. Ляпунов, А. Пуанкаремен қатар периодты және периодты дерлік тербелістер теориясының терең де мазмұнды зерттеулері және сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің практикалық қолданыстары туралы көптеген авторлар жұмыстарында зерттелген, сызықты емес тербелістердің жалпы теориясы мен периодты коэффициентті сызықты жүйелердің классикалық теориясы Н.М. Крылов, Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский, А.М. Самойленко және т.б. ғалымдар зерттеулерінде қарастырылды [9-10].

В.Х. Харасахал [11] жұмысында оң жағы квазипериодты қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің көптеген сұрақтары дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерге байланыстырылып қарастырылған. Бұл байланыс П. Боль мен Г. Бор ұсынған, бір айнымалылы квазипериодты функция мен көпайнымалылы периодты функция арасындағы байланыстың нәтижесі болып табылады.

Д.У. Умбетжанов және т.б. ғалымдар еңбектерінде сызықты емес қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесінің квазипериодты шешімдерінің табылатындығы туралы критерий алынып, бұл нәтижелер банах кеңістігіндегі шексіз жүйелерге, интегро-дифференциалдық теңдеулер жүйесіне, қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесіне қолданылған [12-13].

Сызықты емес теңдеулердің классикалық шешімдері туындылардың шексіз өсу қасиетіне ие, ол әдетте градиенттік апат (сығу толқынынан пайда болған соққы толқыны) деп аталады. Бұл қасиет, қаншалықты жатық бастапқы мәндер үшін шешімнің бірінші туындылары тек шектеулі уақыт ішінде шектелген болып қалатындығын көрсетеді. Бірінші ретті дербес туындылы теңдеулердің классикалық шешімдерінде бастапқы функциялар қаншалықты жатық болса да, уақыт өтуіне қарай ерекшеліктер пайда болуы мүмкін. Сондықтан да бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің классикалық шешімдерін кеңейту қажеттілігі туындады. Квазисызықты екі тәуелсіз айнымалылы гиперболалық типті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің Фридрихс бойынша кең мағынадағы шешімдері зерттеушілер еңбектерінде қарастырылған [14-15].

Келесі жұмыстарда [16-17], бірінші ретті шектелген және шектелмеген дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша көппериоды кең мағынадағы шешімдерінің анықтамасы берілген, шешімдер тұрғызылып, қандай шарттарда айнымалылардың бір бөлігі бойынша көппериоды кең мағынадағы шешім классикалық шешім болатындығы көрсетілген.

Есептің қойылымы мен зерттеу әдісі

Бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылады:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{j=1}^{m}a_j(t,x,y)\frac{\partial u}{\partial x_j}+\sum_{j=1}^{k}b_j(t,x,y)\frac{\partial u}{\partial y_j}=P(t,x,y)u+f(t,x,y) \tag{1}$$

$$u(0,x,y)\big|_{t=0}=\mu(x,y) \tag{2}$$

мұндағы $t\in(-\infty,+\infty)$ $x=(x_1,...,x_m)\in R^m$, $y=(y_1,...,y_k)\in R^k$, $a(t,x,y)$, $b(t,x,y)$ –сәйкесінше m,k өлшемді үздіксіз вектор-функциялар, олар периодты және жатықтық шарттарды қанағаттандырады

$$\begin{gathered}a(t,x+\theta,y)=a(t,x,y)\in C^{(0,1,1)}_{t,x,y}(R\times R^m\times R^k),\\ b(t,x+\theta,y)=b(t,x,y)\in C^{(0,1,1)}_{t,x,y}(R\times R^m\times R^k),\end{gathered} \tag{3}$$

вектор-функциялардың евклидтік метрикасын максималдайтын норма бойынша шектелген

$$\begin{gathered}\|a\|\le\alpha_0,\ \left\|\frac{\partial}{\partial x}a\right\|\le\alpha_1,\ \ \left\|\frac{\partial}{\partial y}a\right\|\le\alpha_2,\\ \|b\|\le\beta_0,\ \left\|\frac{\partial}{\partial x}b\right\|\le\beta_1,\ \ \left\|\frac{\partial}{\partial y}b\right\|\le\beta_2,\end{gathered} \tag{4}$$

θ - период, α_0,β_0, α_1,α_2, β_1,β_2 – кейбір оң тұрақтылар, $u=(u_1,...,u_{n_1})$ – ізделінді вектор-функция, $P(t,x,y)$ $-n_1\times n_1$ – матрица, бұл матрица айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шартты қанағаттандырады және шектелген:

$$\begin{gathered}\|P\|\le k_0=const>0,\\ P(t,x+\theta,y)=P(t,x,y)\in C(R\times R^m\times R^k),\end{gathered} \tag{5}$$

$f(t,x,y)$ – n_1 - вектор-функция, айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шартты қанағаттандырады

$$f(t,x+\theta,y)=f(t,x,y)\in C(R\times R^m\times R^k), \tag{6}$$

және шектелген

$$\|f\|\le K=const>0. \tag{7}$$

$\mu(x,y)=(\mu_1(x,y),...,\mu_n(x,y))$ n – вектор-функция, x,y бойынша $R^m\times R^k$ шектелген және

$$\mu(x+\theta,y)=\mu(x,y)\in C(R^m\times R^k),\quad \text{функцияның нормасы } \|\mu\|=\sup_{R^m\times R^k}\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\mu_j^2(x,y)}.$$

Есептің қойылымы: (1) бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды және бастапқы шартты қанағаттандыратын кең мағынадағы шешімдерінің бар болуы және жалғыздығының қажетті шартын анықтау.

Қойылған есепті шешу үшін алдымен айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды қанағаттандыратын кең мағынадағы шешімнің анықтамасы беріліп, алдымен біртекті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесі қарастырылып, одан соң біртекті емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің шешімі тұрғызылады.

Характеристикалар әдісін қолдана отыра, келесі қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырамыз :

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a(t, x, y) \\ \dfrac{dy}{dt} = b(t, x, y) \end{cases} \tag{8}$$

Бұл жүйенің $(0, x_0, y_0) \in R \times R^m \times R^k$ бастапқы берілулермен, кез-келген $t \in R$ үшін, (3), (4) шарттарда, анықталған шешімі бар болады:

$$\begin{aligned} x &= \lambda(t, 0, x_0, y_0), \\ y &= \xi(t, 0, x_0, y_0) \end{aligned} \tag{9}$$

Бұл шешім жалғыздық қасиетке ие болады [10]. Бұл қисықтар (1) дербес туындылы дифференциалдық жүйесінің характеристикалары деп аталады және келесі интегралдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады

$$\begin{cases} \lambda(t, 0, x_0, y_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} a[s, \lambda(s, 0, x_0, y_0), \xi(s, 0, x_0, y_0)]ds, \\ \xi(t, 0, x_0, y_0) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b[s, \lambda(s, 0, x_0, y_0), \xi(s, 0, x_0, y_0)]ds, \end{cases}$$

Одан әрі сызықты бірінші ретті біртекті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} a_j(t, x, y)\frac{\partial u}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{k} b_j(t, x, y)\frac{\partial u}{\partial y_j} = P(t, x, y)u \tag{10}$$

Анықтама 1. *$R \times R^m \times R^k$ облысында үздіксіз $u(t, x, y)$ функциясы x айнымалысы бойынша θ периодты, барлық айнымалылар бойынша шектелген болса және $\lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0)$ характеристикалар бойында t бойынша үздіксіз дифференциалданатын болса, онда $u(t, x, y)$ функциясы (10) сызықты біртекті жүйенің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды қанағаттандыратын кең мағынадағы шешімі деп аталады. Сонымен қатар, t бойынша толық туынды үшін келесі шарт орындалады:*

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{P} \cdot \tilde{u}\,, \tag{10_1}$$

мұндағы $\tilde{u} = u(t, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0))$, $\tilde{P} = P(t, \lambda(t, 0, x_0, y_0), \xi(t, 0, x_0, y_0))$.

(10) сызықты біртекті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің кең мағынадағы айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды қағанаттандыратын фундаментальды шешімін тұрғызамыз, ол үшін интегральдық теңдеуді қарастырайық

$$U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)=E+\int_{t_0}^{t}P\left(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)\right)\times$$
$$\times U\left(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)ds\,. \tag{11}$$

(11) теңдеуді шешу үшін тізбектей жуықтау әдісін қолданамыз

$$U^{(0)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)=E,$$
$$U^{(\nu)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)=E+\int_{t_0}^{t}P\left(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)\right)\times$$
$$\times U^{(\nu-1)}\left(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)ds\,, \tag{11_1}$$

$(\nu=1,2,\ldots)$. $t\ge 0$ болғанда қатарлардың жинақтылығын көрсетейік

$$E+\sum_{\nu=1}^{\infty}\left[U^{(\nu)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)-U^{(\nu-1)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right] \tag{12}$$

Әрбір жуықтауды (5) шартты ескере отыра бағалайық, онда

$$\left|U^{(0)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|=1, \tag{12_0}$$

$$\left|U^{(1)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le 1+k_0|t|\,, \tag{12_1}$$

$$\left|U^{(2)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le 1+k_0|t|+k_0^2\frac{|t|^2}{2!}\,, \tag{12_2}$$

Математикалық индукция әдісін қолдана отыра, келесі өрнекті аламыз

$$\left|U^{(\nu)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le\sum_{\alpha=0}^{\nu}\frac{(k_0t)^{\alpha}}{\alpha!}\,,\ t\ge 0\,. \tag{12ν}$$

(12ν) ескере отыра, кез-келген ν үшін мына бағалауды аламыз

$$\left|U^{(\nu)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le e^{k_0\cdot t},\quad t\ge 0, \tag{13}$$

$(\nu=1,2,\ldots)$. $t\ge 0$ жағдайда мына қатарлардың жинақтылығын зерттесек және $t\ge 0$ жағдайда бағаласақ, онда

$$\left|U^{1}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))-U^{0}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))\right|\le k_0t,\ t\ge 0 \tag{13_1}$$

$$\left|U^{2}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))-U^{1}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))\right|\le\frac{(k_0t)^2}{2!} \tag{13_2}$$

Математикалық индукция әдісін қолданып, келесі өрнекті табамыз

$$\left|U^{(\nu)}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))-U^{(\nu-1)}(0,t,x,y,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))\right|\le\frac{(k_0t)^{\nu}}{\nu!},\ t\ge 0 \tag{13ν}$$

(13ν) теңсіздіктен, (12) қатардың бірқалыпты жинақталатыны шығады, $t\ge t_0=0$ болғанда қатар R сандық осьте жинақталады, және де (13) ескерсек шекті матрица

$$U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)=\lim_{\nu\to\infty}U^{(\nu)}\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right) \tag{14}$$

мына бағалауды қанағаттандырады

$$\left|U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le e^{k_0\cdot t},\quad t\ge 0 \tag{15}$$

(15) матрицаның t бойынша характеристиканың бойында дифференциалданатынын көрсетейік, ол үшін (9) шешімнің бойында келесі интегральдық теңдеуді қарастырамыз

$$\begin{gathered}U\left(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0),0,x_0,y_0\right)=E+\\+\int_{t_0}^{t}P\left(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0),s,\lambda(s,0,x_0,y_0),\xi(s,0,x_0,y_0)\right)\times\\\times U\left(s,\lambda(s,0,x_0,y_0),\xi(s,0,x_0,y_0),0,x_0,y_0\right)ds\,,\end{gathered} \tag{16}$$

тізбек бірқалыпты жинақталатындықтан, теңдеудің оң жағы t бойынша дифференциалданады. Демек, (14) шекті матрица үздіксіз және t бойынша толық туындысы келесідей:

$$\begin{gathered}\frac{d}{dt}U\left(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0),0,x_0,y_0\right)=P(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0))\times\\\times U\left(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0),0,x_0,y_0\right)\end{gathered} \tag{17}$$

Әрі қарай, (16) теңдеуде x_0,y_0 айнымалыларын дифференциалданатын $x_0=\lambda(0,t,x,y),\ y_0=\xi(0,t,x,y)$ вектор-функциялармен алмастырамыз, сонда барлық айнымалылар бойынша үздіксіз және характеристикалар бойында үздіксіз дифференциалданатын $U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)$ матрицасын аламыз.

Демек, жоғарыда көрсеткендерді ескерсек, $U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)$ матрицасы (16) интегралдық теңдеуді қанағаттандырады, ал характеристикалар бойында (17) дифференциалдық теңдеуді қанағаттандырады.

Олай болса, $U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)$ матрицасы (10) сызықты біртекті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің кең мағынадағы шешімі болады, сонымен бірге (3), (5) ескерсек, айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты болады.

$U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)$ матрицасы келесі теңсіздікті қанағаттандырады

$$\left|U\left(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right)\right|\le \Gamma e^{-\gamma t} \tag{18}$$

мұндағы $\Gamma=const\ge 1,\quad \gamma>0,\ t\ge 0$.

Олай болса (1_0) бастапқы шартты қанағаттандыратын шешімді келесідей өрнектеуге болады

$$u(t,x,y)=U(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))\times\mu\left(\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y)\right) \tag{19}$$

Олай болса, (10) біртекті жүйенің нольдік шешімнен басқа айнымалыларының бір бөлігі бойынша периодты кең мағынадағы шешімі жоқ.

Тұжырым 1. *(3), (4), (5) және (18) шарттары орындалғанда (10) бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда нольдік шешімнен басқа кең мағынадағы шешімдері табылмайды.*

Әрі қарай (1) біртекті емес бірдей бас бөлікті сызықты дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда кең мағынадағы шешімдерін тұрғызайық.

Анықтама 2. *$R\times R^m\times R^k$ облысында үздіксіз $u(t,x,y)$ функциясы x айнымалысы бойынша θ периодты, барлық айнымалылар бойынша шектелген болса және $\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0)$ характеристикалар бойында t бойынша үздіксіз дифференциалданатын болса, онда $u(t,x,y)$ функциясы (10) сызықты біртекті жүйенің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды қанағаттандыратын кең мағынадағы шешімі деп аталады. Сонымен қатар, t бойынша толық туынды үшін келесі шарт орындалады:*

$$\frac{d\tilde{u}}{dt}=\tilde{P}\tilde{u}+\tilde{f} \tag{20}$$

мұндағы

$\tilde{u}=u(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0))$, $\tilde{P}=P(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0))$,

$\tilde{f}=f(t,\lambda(t,0,x_0,y_0),\xi(t,0,x_0,y_0))$.

(1) жүйенің Коши шартын қанағаттандыратын шешімі бар және ол жалғыз болады, бұл шешімді келесі өрнекпен өрнектейміз:

$$\begin{gathered}u(t,x,y)=U(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))\cdot\mu(\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))+\\+\int_0^t U(t,x,y,s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))f(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))ds\end{gathered} \tag{21}$$

мұндағы $U(t,x,y,0,\lambda(0,t,x,y),\xi(0,t,x,y))$ – (10) біртекті сызықты жүйенің фундаментальды шешімі.

Бастапқы функцияны (1) жүйенің кең мағынадағы айнымалылардың бір бөлігі бойынша периоды шарттарды қанағаттандыратын шешімі болатындай етіп таңдау жасаймыз. Онда ізделінді шешім келесі түрде болады

$$u^*(t,x,y)=\int_{-\infty}^t U\ (t,x,y,s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))\times f(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))ds \tag{22}$$

Шешім келесі бағалауды қанағаттандырады:

$$\|u^*(t,x,y)\|\le\frac{\Gamma}{\gamma}\|f(t,x,y)\| \tag{23}$$

(22) вектор-функция үшін (18) бағалау мен (6), (7) шарттарды ескерсек, онда бұл вектор-функция $R\times R^m\times R^k$ анықталған x бойынша (θ)- периодты, барлық айнымалылар бойынша шектелген, характеристикалардың бойында (20) қарапайым дифференциалдық теңдеулер жүйесін қанағаттандырады.

Егер (1) жүйенің (22) басқа x бойынша (θ)- периодты, барлық айнымалылар бойынша шектелген кең мағынадағы шешімі бар деп есептесек, онда кең мағынадағы шешімдердің айырымы (10) біртекті жүйенің нольден өзгеше айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты кең мағынадағы шешімдері болар еді, ал Тұжырым 1 ескерсек, онда қарама-қайшылыққа тап болар едік.

Демек, (1) бірдей бас бөлікті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шартты қанағаттандыратын кең мағынадағы шешімі бар және жалғыз болады.

Тұжырым 2. *Айталық (3)-(7) және (18) шарттар орындалсын. Онда (1) бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарды және бастапқы шартты қанағаттандыратын кең мағынадағы жалғыз шешімі бар және ол (22) өрнекпен өрнектеледі, (23) бағалауды қанағаттандырады.*

Қорытынды

Мақалада бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда кең мағынадағы шешімдерінің бар болуы және жалғыздығының қажетті шарттары қарастырылған. Бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда кең мағынадағы шешімдерінің анықтамасы берілген. Біртекті және біртекті емес сызықты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шартты қанағаттандыратын шешімдері тұрғызылған. Бірдей бас бөлікті бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты шарттарда кең мағынадағы шешімдерінің бар болуы мен жалғыздығының қажетті шарты алынған.

Жұмыс 2023-2025 жылдарға арналған «Айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты және көпнүктелі шарттарда дербес туындылы теңдеулер жүйесінің кең мағынадағы шешімдері» ИРН AP19675358 жобасы бойынша ғылыми зерттеулерді қаржыландыру қаражаты есебінен орындалды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Oke Davies Adeyemo, Chaudry Masood Khalique. Shock waves, periodic, topological kink and singular soliton solutions of a new generalized two-dimensional nonlinear wave equation of engineering physics with applications in signal processing, electromagnetism and complex media // Alexandria Engineering Journal, 18 May 2023 Volume 73, P. 1-780, https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.04.049

2 Lohani Md. Badrul Alam, Jiang Xingfang, Abdulla-Al-Mamun, Samsun Nahar Ananna. Investigation of lump, soliton, periodic, kink, and rogue waves to the time-fractional phi-four and (2+1) dimensional CBS equations in mathematical physics // Partial Differential Equations in Applied Mathematics, https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100122

3 R. K. Mohanty, Bishnu Pada Ghosh, Urvashi Arora. High precision implicit method for 3D quasilinear hyperbolic equations on a dissimilar domain: Application to 3D telegraphic equation // Computers & Mathematics with Applications, Volume 122, 15 September 2022, Pages 93-116

4 Chong Tian, Kuo-Chi Chang, JinSong Chen. Application of hyperbolic partial differential equations in global optimal scheduling of UAV // Alexandria Engineering Journal, Volume 59, Issue 4, August 2020, P. 2283-2289, https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.013

5 Somveer Singh, Vijay Kumar Patel, Vineet Kumar Singh, Emran Tohidi. Application of Bernoulli matrix method for solving two-dimensional hyperbolic telegraph equations with Dirichlet boundary conditions // Computers & Mathematics with Applications, 1 April 2018, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.12.003

6 Alexei Rybkin. Method for solving hyperbolic systems with initial data on non-characteristic manifolds with applications to the shallow water wave equations // Applied Mathematics Letters, July 2019, https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.003

7 Пуанкаре А. Новые методы небесной механики. М.: Наука, 1971. 772 с.

8 Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. М.; Л.: ГИТТЛ, 1950. 472 с.

9 Самойленко А.М., Теплінський Ю.В., Пасюк К.В. Елементи математично¨ї теорі¨ї еволюційних рівнянь у банахових просторах. Киев, 2008.

10 Boichuk A., Pokutnij A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 39. P. 1-12.

11 Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970.

12 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. Алма-Ата: Наука, 1979. -179 с

13 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients //Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, No2(98), 125-140

14 Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N., Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics, Nauka, M., 1978, 687 p.

15 Абдикаликова Г.А. О разрешимости одной нелокальной краевой задачи. //Математический журнал. ИМ МОН РК - 2005. - Т. 5. - №3 (17). - С.5-10.

16 Bekbauova A., Baibaktina A., Omarova B., Abilmazhinova B., Sultangaliyeva L., Erzhanova G., Tleubergenova M., Periodic solution of a single system of differential equations in partial derivatives // International journal of advanced and applied sciences. - 2018. - Vol.5. No 6. - P. 61-63, DOI 10.21833/ijaas.2018.06.009

17 Kurmangaliev E.K., Multiperiodic solutions of systems of partial differential equations from a countable set of variables in terms of variables // Abstract, Almaty, 2010. (in Russian).

References:

1 Oke Davies Adeyemo, Chaudry Masood Khalique. Shock waves, periodic, topological kink and singular soliton solutions of a new generalized two-dimensional nonlinear wave equation of engineering physics with applications in signal processing, electromagnetism and complex media // Alexandria Engineering Journal, 18 May 2023 Volume 73, P. 1-780, https://doi.org/10.1016/j.aej.2023.04.049

2 Lohani Md. Badrul Alam, Jiang Xingfang, Abdulla-Al-Mamun, Samsun Nahar Ananna. Investigation of lump, soliton, periodic, kink, and rogue waves to the time-fractional phi-four and (2+1) dimensional CBS equations in mathematical physics // Partial Differential Equations in Applied Mathematics, https://doi.org/10.1016/j.padiff.2021.100122

3 R. K. Mohanty, Bishnu Pada Ghosh, Urvashi Arora. High precision implicit method for 3D quasilinear hyperbolic equations on a dissimilar domain: Application to 3D telegraphic equation // Computers & Mathematics with Applications, Volume 122, 15 September 2022, Pages 93-116

4 Chong Tian, Kuo-Chi Chang, JinSong Chen. Application of hyperbolic partial differential equations in global optimal scheduling of UAV // Alexandria Engineering Journal, Volume 59, Issue 4, August 2020, P. 2283-2289, https://doi.org/10.1016/j.aej.2020.02.013

5 Somveer Singh, Vijay Kumar Patel, Vineet Kumar Singh, Emran Tohidi. Application of Bernoulli matrix method for solving two-dimensional hyperbolic telegraph equations with Dirichlet boundary conditions // Computers & Mathematics with Applications, 1 April 2018, https://doi.org/10.1016/j.camwa.2017.12.003

6 Alexei Rybkin. Method for solving hyperbolic systems with initial data on non-characteristic manifolds with applications to the shallow water wave equations // Applied Mathematics Letters, July 2019, https://doi.org/10.1016/j.aml.2019.02.003

7 Poincare A. New methods of celestial mechanics. M.: Nauka, 1971. 772 p. (in Russian).

8 Lyapunov A.M. The general problem of motion stability. M.; L.: GITTL, 1950. 472 p. (in Russian).

9 Samoylenko A.M., Teplinsky Yu.V., Pasyuk K.V.Elements of the mathematical theory of evolutionary equations in Banach spaces. Kyiv, 2008. (in Ukrainian).

10 Boichuk A., Pokutnij A. Bounded solutions of linear perturbed differential equations in a Banach space // Tatra Mt. Math. Publ. 2007. V. 39. P. 1-12.

11 Kharasakhal V.H. Almost periodic solutions of ordinary differential equations. – Alma-Ata: Nauka, 1970. (in Russian).

12 Umbetzhanov D.U. Almost periodic solutions of evolutionary equations. Alma-Ata: Nauka, 1979. -179 s. (in Russian).

13 Sartabanov Zh.A., Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients //Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, No2(98), 125-140

14 Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N., Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics, Nauka, M., 1978, 687 p.

15 Abdikalikova G.A. On the solvability of a non-local boundary value problem. //Mathematical journal. IM MES RK - 2005. - T. 5. - №3 (17). - Pp.5-10. (in Russian).

16 Bekbauova A., Baibaktina A., Omarova B., Abilmazhinova B., Sultangaliyeva L., Erzhanova G., Tleubergenova M., Periodic solution of a single system of differential equations in partial derivatives // International journal of advanced and applied sciences. - 2018. - Vol.5. No 6. - P. 61-63, DOI 10.21833/ijaas.2018.06.009

17 Kurmangaliev E.K., Multiperiodic solutions of systems of partial differential equations from a countable set of variables in terms of variables // Abstract, Almaty, 2010. (in Russian).