МРНТИ 27.31.17
УДК 517.95

10.51889/2959-5894.2023.82.2.005

Ж.А. Сартабанов

Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г. Актобе, Казахстан
**e-mail: sartabanov42@mail.ru*

ПЕРИОДИЧНОСТЬ ХАРАКТЕРИСТИК ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ДИАГОНАЛИ

Аннотация

В теории многопериодических систем уравнений с оператором D важное значение имеет необходимое и достаточное условие многопериодичности их решений. Но такое условие представляется в виде систем уравнений в конечных разностях, рассматриваемых в пространстве гладких многопериодических функций. Для решения задач такого характера применение известных методов функционального анализа является проблемным. Главная помеха в данном вопросе – отсутствие периодических характеристик оператора D в евклидовом пространстве с декартовыми координатами. В данном исследовании приведены основные необходимые свойства периодических характеристик, касающиеся преобразований однопараметрического семейства группы. Основные вопросы досконально изучены для двухмерного случая характеристических систем, а затем распространены на многомерный случай. Для интегрирования многопериодических функций важно рассмотрение разверток винтовых линий на плоскость, которому уделено определенное внимание. Также установлены достаточные условия многопериодичности характеристик более общего оператора дифференцирования по направлениям постоянных векторов.

Ключевые слова: оператор дифференцирования, периодическая характеристика, векторное поле, тор, бесконечная цилиндрическая поверхность, винтовые линии.

Аңдатпа

Ж.А. Сартабанов
Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ДИАГОНАЛ БОЙЫНША ДИФФЕРЕНЦИАЛДАУ ОПЕРАТОРЫНЫҢ АРАКТЕРИСТИКАЛАРЫНЫҢ ПЕРИОДТЫЛЫҒЫ

D операторлы көппериодты теңдеулер жүйесінің теориясында олардың шешімдерінің көппериодты болуының қажетті және жеткілікті шарты маңызды. Бірақ бұл шарт жатық көппериодты функциялар кеңістігінде қарастырылатын ақырлы айырымдылық теңдеулер жүйесі түрінде беріледі. Осындай сипаттағы есептерді шешу үшін функционалдық талдаудың белгілі әдістерін қолдану күрделірек болып табылады. Бұл сұрақтағы басты кедергі - декарттық координатталы евклид кеңістігінде D операторының периодты характеристикаларының болмауы. Бұл зерттеуде группаның бір параметрлі үйірінің түрленуіне қатысты болатын, периодты характеристикалардың негізгі қажетті қасиеттері келтірілген. Негізгі сұрақтар характеристикалық жүйелердің екі өлшемді жағдайы үшін мұқият зерттеледі, содан кейін көп өлшемді жағдайға таралады. Көппериодты функцияларды интегралдау үшін, белгілі бір назар аударылған жазықтыққа бұрандалы сызықтардың жазбасын қарастыру маңызды. Сондай-ақ тұрақты векторлардың бағыттары бойынша неғұрлым жалпы дифференциалдау операторының характеристикаларының көппериодтылығының жеткілікті шарттары орнатылады.

Түйін сөздер: дифференциалдау операторы, периодты характеристика, векторлық өріс, тор, шексіз цилиндрлік бет, бұрандалы сызықтар.

Abstract

FREQUENCY OF CHARACTERISTICS THE DIAGONAL DIFFERENTIATION OPERATOR

Sartabanov Zh.A.
K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

In the theory of multiperiodic systems of equations with an operator D, necessary and sufficient condition for multiperiodicity of their solutions is important. But such condition is represented in the form of systems of equations in finite differences considered in the space of smooth multiperiodic functions. To solve these problems, using well-known methods of functional analysis is problematic. The main obstacle in this matter is the absence of periodic characteristics of operator D in Euclidean space. This study presents the major necessary properties of periodic characteristics concerning transformations of one-parameter family of group. The main issues are thoroughly studied for two-dimensional case of characteristic systems, and then extended to multidimensional case. For integration of multiperiodic functions, it's important to consider unfolding of helical lines on a plane, which is given some attention. Sufficient conditions for multiperiodicity of characteristics of more general differentiation operator in directions of constant vectors are established.

Keywords: differentiation operator, periodic characteristic, vector field, torus, infinite cylindrical surface, helical lines.

Введение

Известно, что оператор дифференцирования вида

$$D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial}{\partial t_j},\ (\tau,t_1,...,t_m)=(\tau,t)\in R\times R^m=R^{1+m} \tag{0.1}$$

в евклидовом пространстве R^{1+m} не имеет периодических характеристик, определяемых единичными векторными полями. Но можно указать некоторые геометрические образования, где они имеют периодические характеристики.

Дифференциальный оператор вида (0.1) для изучения проблем многомерных колебаний, описываемых уравнениями в частных производных введен в [1] и системы с таким оператором исследованы в [2-8]. Реализация методов Пуанкаре и Ляпунова [9] разработанные для исследования задач периодических дифференциальных систем не увенчалась особыми успехами в теории многопериодических систем с указанным оператором дифференцирования по диагонали. Основная причина в этом было отсутствие периодических характеристик оператора в евклидовом пространстве. Но известно, что характеристические уравнения такого оператора в евклидовом пространстве допускают разрывные периодические решения [10]. В данной заметке обоснованы методами [11, 12], что эти разрывные решения могут быть получены развертками гладких кривых, определенных этими же характеристическими системами, заданными на поверхностях типа многомерного тора или цилиндра. Естественно, что здесь ограничивались изучением свойств периодических характеристик операторов дифференцирования по направлениям постоянных векторов. Заметим, что в случае экспоненциальной дихотомичности рассматриваемых систем с оператором дифференцирования переход от евклидового пространства с декартовыми координатами к цилиндрическим поверхностям не обязателен [1-8, 13-17].

1. Единичное векторное поле на окружности

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dt}{d\tau}=1 \tag{1.1}$$

с единичным векторным полем $v(t)\equiv 1$ при $\tau\in(-\infty,+\infty)=R$ на окружности S с радиусом r длины $2\pi r=\theta$, на которой выбрано начало отсчета 0 положительное направление обхода, где $\theta=const>0$.

Каждому числу t поставим в соответствие точку β окружности S, отложив от начала отсчета 0 дугу длины t (Рисунок 1).

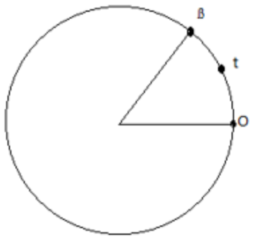

Рисунок 1.

При этом каждому из множества чисел вида $t+k\theta$ с целым $k\in Z$ соответствует одна та же точка β. Так как $v(t+k\theta)\equiv 1\equiv v(t)$, $k\in Z$, то можно положить $v(t)=v(\beta)$. Если $t=t(\tau)$ – некоторое, решение уравнения (1.1) на плоскости $(\tau,t)\in R\times R=R^2$, то соответствующая точка $\beta=\beta(\tau)$ движется по окружности S со скоростью $\beta(\tau)=1$.

Если точка $\beta(\tau)$ отправится из положения β^0 при τ^0 то через время θ она вернется в исходное положение $\beta^0=\beta(\tau^0)=\beta(\tau^0+\theta)$. Следовательно, $\beta(\tau)$ периодически зависит от τ с периодом θ:

$$\beta(\tau+\theta)=\beta(\tau),\ \tau\in R,\ \beta\in S \tag{1.2}$$

а решение $t = t(\tau)$ уравнения (1.1) на плоскости $(\tau, t) \in R \times R = R^2$ удовлетворяет условию

$$t(\tau + \theta) = t(\tau) + \theta .$$

Таким образом, при $(\tau, t) \in R \times S$, согласно (1.2), решение $t = \beta(\tau)$ уравнения (1.1) представляет собой θ-периодическое движение точки, а окружность S является фазовым пространством уравнения (1.1). Рассмотрение уравнения (1.1) на окружности S или на евклидовой плоскости R^2 зависит от целесообразности их для решения задач, где уравнение (1.1) играет решающую роль.

Так как решение (1.2) системы (1.1) на окружности S удовлетворяет условию $\beta(\tau^0) = t^0$, то его можно представить в виде $t = \beta(\tau, \tau^0, t^0)$, удовлетворяющим условию $\beta(\tau^0, \tau^0, t^0) = t^0$. Очевидно, что $\beta(\tau, \tau^0 + \theta, t^0) = \beta(\tau, \tau^0, t^0)$ и $\beta(\sigma, \tau^0, \beta(\tau^0, \tau, t)) = \beta(\sigma, \tau, t)$ функцию $\beta(\tau, \tau^0, t^0)$ называют характеристикой оператора дифференцирования

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial t}, \tag{1.3}$$

так как она устанавливает связь между операторами D и $\frac{d}{d\tau}$ следующего вида

$$Dx(\tau, t)\big|_{t = \beta(\tau, \tau^0, t^0)} = \frac{d}{d\tau} x(\tau, \beta(\tau, \tau^0, t^0)),$$

где $x(\tau, t)$ - произвольная дифференцируемая функция переменных $(\tau, t) \in G \subset R^2$.

Таким образом установлена теорема 1.

Теорема 1. Оператор дифференцирования (1.3) на окружности S имеет θ-периодическую характеристику $t = \beta(\tau, \tau^0, t^0) = \beta(\tau + \theta, \tau^0, t^0)$, обладающих свойствами динамических движений.

2. Прямое произведение единичных векторных полей на торе

Рассмотрим прямое произведение двух единичных векторных полей

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = 1, \\ \dfrac{d\sigma}{d\tau} = 1, \end{cases} \tag{2.1}$$

где поля $v_1(t, \sigma) = 1$ и $v_2(t, \sigma) = 1$, соответствующие первому и второму уравнениям являются периодическими с произвольными периодами $\theta = const : v_j(t + \theta, \sigma) = v_j(t, \sigma + \theta) = v_j(t, \sigma)$, $j = 1, 2$.

При такой трактовке систему (2.1) разумно рассмотреть на поверхности тора (Рисунок 2).

Теперь каждому числу t поставим точку β окружности S_1. Поворотом плоскости (x, z) на угол σ находим положение β_2 точки β_1. Таким образом, точка тора T^2 однозначно определяется двумя циклическими координатами $(\beta_1, \beta_2) = (\beta_1 + k_1\theta, \beta_2 + k_2\theta)$.

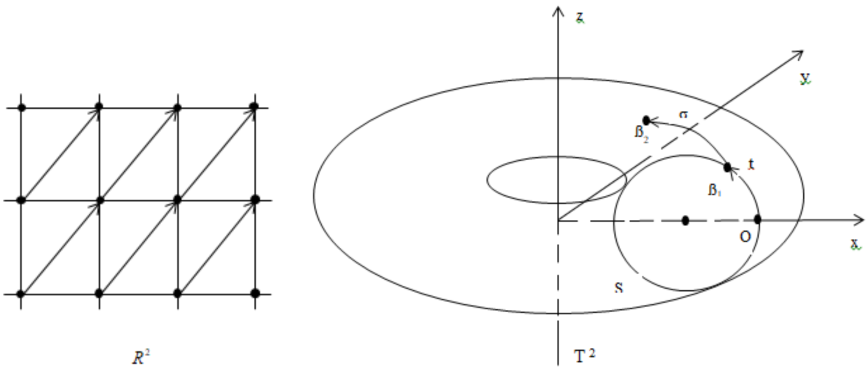

Рисунок 2.

Тор T такого вида в пространстве (x, y, z) с прямоугольными координатами имеет уравнения:

$$x = \left(a + b\cos 2\pi\theta^{-1}t\right)\cos 2\pi\theta^{-1}\sigma,$$
$$y = \left(a + b\cos 2\pi\theta^{-1}t\right)\sin 2\pi\theta^{-1}\sigma,$$
$$z = b\sin 2\pi\theta^{-1}t$$

с постоянными $a = 3r,\ b = r$. Точка тора T^2 описываются декартовыми координатами (t, σ), причем две точки (t_1, σ_1) и (t_2, σ_2) идентичные, если $t_1 - t_2 = k_1\theta$, $\sigma_1 - \sigma_2 = k_2\theta$ с целыми $k_1, k_2 \in Z$.

Таким образом, векторные поля $v_1(t, \sigma) = 1 = v_2(t, \sigma)$ вполне можно рассматривать на поверхности тора:

$$v_j(\beta_1, \beta_2) = v_j(t, \sigma),\ \ j = 1, 2.$$

Если $(t(\tau), \sigma(\tau))$ - некоторое решение системы (2.1), то поставив в соответствие точку $(\beta_1(\tau), \beta_2(\tau))$ с циклическими координатами имеем движение точки по тору T^2.

Очевидно, что

$$t(\tau + \theta) = t(\tau) + \theta,\ \ \sigma(\tau + \theta) = \sigma(\tau) + \theta. \tag{2.2}$$

Тогда на торе T^2 имеем

$$\beta_j(\tau + \theta) = \beta_j(\tau),\ \ j = 1, 2. \tag{2.3}$$

Изображение фазовых траекторий системы (2.1) на поверхности тора T^2 представляет u_x сферическое свойство вида (2.3), которое связано с периодичностью системы.

Из $v_1 = v_2$ следует, что

$$\beta_1 = \beta\left(\tau, \tau^0, t^0\right),\ \ \beta_2 = \beta\left(\tau, \tau^0, \sigma^0\right), \tag{2.4}$$

где $\left(\tau^0, t^0\right) \in R \times R$, $\beta\left(\tau^0, \tau^0, t^0\right) = t^0$.

Следовательно, решение (2.3) в силу (2.4) определяется одной периодической функцией.

Очевидно, что из системы (2.1) имеем уравнение

$$\frac{dt}{d\sigma} = 1, \tag{2.5}$$

следовательно, все фазовые кривые уравнения (2.4) замкнутые, так как $t - t^0 = \sigma - \sigma^0 = \theta$, то есть, $t = t^0 + \theta,\ \sigma = \sigma^0 + \theta$ и $(t, \sigma) = \left(t^0, \sigma^0\right) modd\ \theta$. Это означает, что кривая замыкается после одного оборота по параллели и одного оборота по меридиану. Следовательно, уравнение (2.5) имеет решение $t = \beta\left(\sigma, \sigma^0, t^0\right) = \beta\left(\sigma + \theta, \sigma^0, t^0\right)$.

Также ясно, что плоскость R^2 накрывает тор T^2, следовательно, замкнутым кривым на торе соответствуют кривые $y=\varphi(x)$ на плоскости R^2, обладающие свойством $(x_0,\varphi(x_0))=(x_0+k_1\theta,\varphi(x_0)+k_2\theta)$. В данном, рассматриваемом случае замкнутым кривым $t=\beta(\sigma,\sigma^0,t^0)$ соответствуют диагональные отрезки квадратов стороной θ (Рисунок 2.).

Теперь введем оператор дифференцирования вида

$$D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial\sigma}, \tag{2.6}$$

который можно применить к дифференцируемой функции $x(\tau,t,\sigma)$, $(\tau,t,\sigma)\in G\subset R^3$. Очевидно, что имеем

$$Dx(\tau,t,\sigma)\Big|_{\substack{t=\beta(\tau,\tau^0,t^0)\\ \sigma=\beta(\tau,\tau^0,\sigma^0)}}=\frac{d}{d\tau}x\left(\tau,\beta\left(\tau,\tau^0,t^0\right),\left(\tau,\tau^0,\sigma^0\right)\right), \tag{2.7}$$

где $\dfrac{d}{d\tau}$ – оператор полной производной по τ.

В связи с соотношением (2.7) оператор (2.6) называется оператором дифференцирования по диагонали $\sigma=t=\tau$, а вектор-функция

$$\beta\left(\tau,\tau^0,\beta^0\right)=\left(\beta\left(\tau,\tau^0,t^0\right),\beta\left(\tau,\tau^0,\sigma^0\right)\right) \tag{2.8}$$

названа характеристикой оператора D.

Тогда полученные результаты можно привести в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Оператор дифференцирования (2.6) по диагонали $\sigma=t=\tau$ на тороидальной поверхности T^2 допускает θ-периодические характеристики вида (2.8):

$$\beta\left(\tau+\theta,\tau^0,\beta^0\right)=\beta\left(\tau,\tau^0,\beta^0\right),$$

обладающих свойствами динамических движений: а) $\beta\left(\tau^0,\tau^0,\beta^0\right)=\beta^0$, б) непрерывности по совокупности аргументов τ,τ^0,β^0, в) группы $\beta\left(\sigma,\tau^0,\beta\left(\tau^0,\tau,t\right)\right)=\beta(\sigma,\tau,t)$.

Доказательство первой части теоремы приведено выше, а свойства а)-в) общеизвестны для динамических систем.

Теорема 2 является обобщением теоремы 1 на двухмерный случай.

3. Прямое произведение единичных векторных полей на бесконечной цилиндрической поверхности

Рассмотрим прямое произведение единичных векторных полей

$$\begin{cases}\dfrac{dt}{d\tau}=1,\\[2mm] \dfrac{d\sigma}{dt}=1\end{cases} \tag{3.1}$$

с векторными полями $v_1(t,\sigma)=1=v_2(t,\sigma)$, соответствующими уравнениям системы на бесконечной цилиндрической поверхности, параллельной оси $O\tau$, заданной

$$\sigma=r+r\cos 2\pi\theta^{-1}\varphi,\ t=r\sin 2\pi\theta^{-1}\varphi,\ \ \tau\in R,\ \theta=const>0\,. \tag{3.2}$$

Очевидно, что векторные поля $v_1(t,\sigma)=1$, $j=1,2$ обладают свойством θ-периодичности по t и σ, следовательно, в полной мере можно рассматривать систему (3.1) на цилиндрической поверхности (3.2). Произвольной точке $K=K(\tau,t,\sigma)$ с декартовыми координатами τ,t,σ на бесконечной цилиндрической поверхности поставим в соответствие точку $K'=K'(t,\sigma)$ на фазовой окружности S: $(\sigma - r)^2 + t^2 = r^2$, $2\pi r = \theta$, находящейся на одной образующей $(K'K)$ цилиндра. Движение точки K состоит из суммы двух движений: вращательного движения образующей, на которой находится K и прямолинейного движения точки K вдоль образующей (Рисунок 3.).

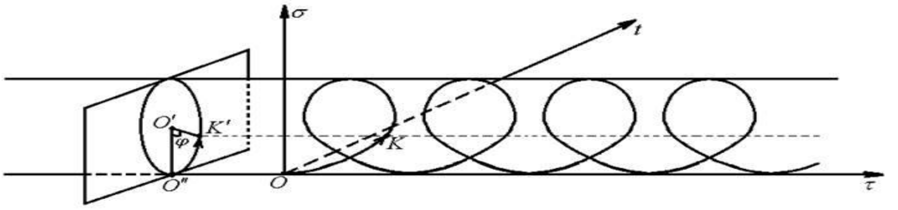

Рисунок 3.

Теперь исследуем интегральную кривую (β) системы (3.1) исходящую из точки (τ^0, t^0, σ^0), которую обозначим в виде

$$t = \beta(\tau, \tau^0, t^0),\ \sigma = \beta(\tau, \tau^0, \sigma^0),\ \tau \in R\ , \tag{3.3}$$

так как $v_1 = v_2 = l$, причем будем считать, что она описывает движение точки K на бесконечной цилиндрической поверхности. Очевидно, что в силу (3.1) переменные τ, t, σ изменяются с одинаковой скоростью. Следовательно, точка K' изменяясь в соответствии с точкой K совершает путь $\breve{O}''K'$, равный сдвигу h переменной τ направо по оси $O\tau$. За это время точка K проходит путь равный длине дуги $\breve{O}K$ интегральной кривой (β) при $\tau^0 = 0, t^0 = 0, \sigma^0 = r$. Так как $\breve{O}''K = h$, то при $h = \theta$ точка K' по окружности S совершив один виток, возвращается в исходное положение, в точку O''. А точка K исходя из точки $(0,0,r)$ двигаясь по интегральной кривой (β) приходит к точке $(\theta, \theta, r+\theta)$, которая идентична с точкой $(\theta, 0, r)$, находящейся на одной образующей цилиндра. Это означает, что шаг $h = 2\pi r = \theta$ и интегральная кривая (β) является винтовой спиралью. Следовательно, решение (3.3) θ-периодично и имеем

$$\beta(\tau + \theta, \tau^0, t^0) = \beta(\tau, \tau^0, t^0),\ \tau \in R\ . \tag{3.4}$$

Здесь заметим, что если $\beta^*(\tau)$ с условием $\beta^*(0) = 0$ является периодическим, то решение $\beta(\tau, \tau^0, t^0) = t^0 + \beta^*(\tau - \tau^0)$ также периодическое, где τ^0 и t^0 - произвольные постоянные. Следовательно, справедливо соотношение (3.4) для произвольных τ^0 и t^0.

Таким образом, движение точки K совершается вдоль винтовой линии на поверхности бесконечной цилиндрической поверхности.

Разворачивая бесконечную цилиндрическую поверхность на плоскость $\tau O t$, разрезая её вдоль образующую $O\tau$ имеем развертку винтовой линии (3.3), проходящую через точку $(0,0,r)$ в виде графика функции

$$t = \theta\{\theta^{-1}\tau\} \equiv S(\tau),\quad \tau \in R \tag{3.5}$$

θ-периодической с разрывами в точках $\tau = k\theta$, $k \in Z$ и недостигающей своего максимума (Рисунок 4). Развертка примечательна тем, что она в силу (3.5), дает важную информацию о периодичности фазовой интегральной кривой на цилиндрической поверхности.

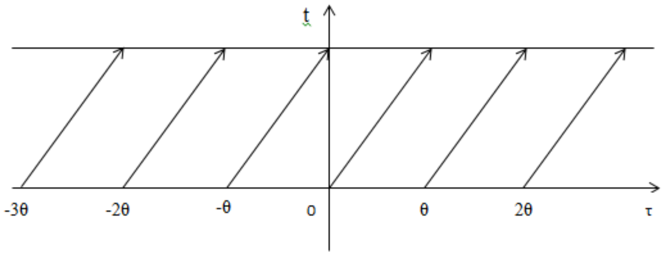

Рисунок 4.

Заметим, что на развертке длины дуг сохраняются. Поскольку дуга окружности S измеряется центральным углом φ, то заменив φ на равную длину отрезка $S(\tau)$ вида (3.5) получим уравнения винтовой линии

$$\sigma = r + r\cos 2\pi\theta^{-1}\tau\,,\ t = r\sin 2\pi\theta^{-1}\tau,\ \tau \in R \tag{3.6}$$

с параметром $\tau \in R$. Вдоль линии (3.6) совершает свой путь периодическое движение, описываемое системой (3.1).

4. Периодические характеристики в многомерном случае и их основные свойства

В пунктах системы, определяющие характеристики операторов дифференцирования по диагонали рассматривали в случаях окружности S, шара $T^2 = S \times S$ и цилиндра $Ц = R \times S$. Теперь рассмотрим случай, который можно назвать многомерным шаром или многомерной цилиндрической поверхностью. Система, определяющая характеристики оператора D имеет вид

$$\frac{dt}{d\tau} = e \tag{4.1}$$

с m-мерным вектором $e = (1,...,1)$. Следовательно, векторное поле (4.1) является прямым произведением m единичных векторных полей

$$\frac{dt}{d\tau} = 1, \quad j = \overline{1,m} \tag{4.2}$$

При фиксированном значении j уравнение (4.2) рассмотрим на окружности S и согласно теореме 1 определим θ-периодическую характеристику

$$t_j = \beta(\tau,\tau^0,t_j^0),\ \beta(\tau+\theta,\tau^0,t_j^0) = \beta(\tau,\tau^0,t_j^0), \tau \in R \tag{4.3}$$

где $(\tau^0, t_j^0) \in R \times S$, причем (4.3) обладает групповыми свойствами а)-в). Здесь S - окружность с радиусом r длины $2\pi r = \theta$ с центром в начале координат плоскости τOt;

Так как система (4.1) состоит из прямого произведения уравнения (4.2) то и решение $t = \beta(\tau,\tau^0,t^0)$ её представляется прямым произведением решений (4.3):

$$t = \beta(\tau,\tau^0,t^0) \equiv (\beta(\tau,\tau^0,t_1^0),...,\beta(\tau,\tau^0,t_m^0)), \tag{4.4}$$

где $t^0 = (t_1^0,...,t_m^0) \in S \times ... \times S = S^m, \tau^0 \in R.$

Относительно обозначения (4.4) заметим, что функция $\beta(\tau,s,\sigma)$ является скалярной, если скалярная начальная данная σ, а если σ - векторная величина, то $\beta(\tau,s,\sigma)$ также становится векторной.

Очевидно, что вектор-функция (4.4) подчиняется требованиям, а)-в), поскольку её каждая компонента (4.3) обладает этими групповыми свойствами:

а) $\beta(\tau,\tau^0,t^0)$ - как преобразование от t^0 при $\tau=\tau^0$ обращается в тождественное преобразование:

$$\beta(\tau^0,\tau^0,t^0)=t^0; \tag{4.5}$$

б) точку $t^0\in S^m$ непрерывно и взаимно однозначно отображает в точку $t\in S^m$ при непрерывном изменении параметра $\tau\in R$, а также $\tau^0\in R$

$$t^0=\beta(\tau^0,\tau,t); \tag{4.6}$$

в) композиция отображений $\beta(s,\tau^0,t^0)$ и $\beta(\tau^0,\tau,t)$ одного параметрического семейства остается отображением $\beta(s,\tau,t)$ этого же семейства:

$$\beta(s,\tau^0,\beta(\tau^0,\tau,t))=\beta(s,\tau,t) \tag{4.7}$$

Эти свойства не требуют доказательств, поскольку система (4.1) является автономной и групповые свойства а)-в) обязательные для систем такого вида.

К этим свойствам следует присоединить свойства периодичности по τ с периодом θ:

$$\beta(\tau+\theta,\tau^0,t^0)=\beta(\tau,\tau^0,t^0),\ \tau\in R \tag{4.8}$$

так как $\beta(\tau+\theta,\tau^0,t_j^0)=\beta(\tau,\tau^0,t_j^0),\ j=\overline{1,m}.$

Из свойств

$$\beta(\tau,\tau^0,t^0)=\beta(\tau-\tau^0,0,t^0) \tag{4.9}$$

$$\beta(\tau,\tau^0,t^0+\omega)=\beta(\tau,\tau^0,t^0)+\omega,\ \omega=const \tag{4.10}$$

которые следуют из свойства единственности решений системы (4.1) при $\tau=\tau^0$ получим следствие свойств (4.8)-(4.10) при $(\tau,t)\in R\times S^m$ вида

$$\beta(\tau,\tau^0+\theta,t^0)=\beta(\tau,\tau^0,t^0) \tag{4.11}$$

$$\beta(\tau,\tau^0,t^0+\theta)=\beta(\tau,\tau^0,t^0)\,. \tag{4.12}$$

Таким образом, в силу (4.8), (4.11) и (4.12) для $t=\beta(\tau,\tau^0,t^0)$ имеем

$$\beta(\tau+\theta,\tau^0,t^0)=\beta(\tau,\tau^0+\theta,t^0)=\beta(\tau,\tau^0,t^0+\theta e)=\beta(\tau,\tau^0,t^0)\,. \tag{4.13}$$

В силу дифференцирования гладкой функции $x(\tau,t)\in G\subset R\times R^m$ в силу системы (4.1) имеем

$$Dx(\tau,t)\big|_{t=\beta(\tau,\tau^0,t^0)}=\frac{d}{d\tau}x(\tau,\beta(\tau,\tau^0,t^0))\,. \tag{4.14}$$

Свойство (4.14) является определяющим для понятия характеристики оператора D, заданного в виде (0.1).

В итоге проведенного изучения можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. При $(\tau,t)\in R\times S^m$ характеристики $t=\beta(\tau,\tau^0,t^0)$ оператора дифференцирования по диагонали D обладает свойствами θ-периодичности (4.13) и однопараметрической группы преобразований (4.5)-(4.7).

Многообразие $M = R \times S^m$ является многомерной цилиндрической поверхностью поскольку t_j изменяется на окружности, а τ принадлежит R. Следовательно, теорема 3 является обобщением теоремы 1 и 2.

5. Развертки винтовых линий и их применения

Если кривая и поверхностные области не пересекают линии разрыва, то при разворачивании цилиндра по образующим длины дуг и площади поверхности, а также свойство гладкости кривых сохраняются. В случае пересечения кривых с линией разреза, естественно, на развертке кривые становятся разрывными. Например, выше мы видели, что винтовая линия (3.3) на разрыве переходит в разрывную кривую (3.5) плоскости $(\tau, t) \in R \times R$.

Следовательно, развертку

$$t = \theta\{\theta^{-1}\tau\} \equiv S^*(\tau), \tau \in R \tag{5.1}$$

можно использовать для нахождения длины дуг соответствующей винтовой линий

$$\sigma = \beta(\tau,0,0), \quad t = \beta(\tau,0,0), \quad \tau \in R. \tag{5.2}$$

Наша цель заключается в использовании развертки вида (5.1) винтовой линии (5.2) в решении задач для систем уравнений с оператором D в евклидовом пространстве.

В связи с этим проведем несколько расширенное изучение функции (5.1).

1°. Очевидно, что функция (5.1) дифференцируема в обобщенном смысле

$$\frac{dS^*}{d\tau} = 1 - \sum_{k \in Z} \delta(\tau - k\theta), \tag{5.3}$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака. Выражение (5.3) информирует то, что функция $S(t)$ производную $\dot{S}^*(\tau)$, равную 1 при $\tau \neq k\theta$, а при $\tau = k\theta$ функция терпит разрыв со скачком $b = -1$ и она не имеет производных в этих точках. Но, так как $\dot{S}^*(\tau - k\theta) - \dot{S}^*(\tau + k\theta) = 1$,то приняв $\dot{S}^*(k\theta) = 1$ соотношение (5.3) представим в виде

$$\dot{S}^*(\tau) = 1, \quad \tau \in R. \tag{5.4}$$

Такое доопределение соответствует и случаю, когда из развертки переходим к цилиндрической поверхности.

2°. На основе (5.4) заключаем что скалярное уравнение

$$\frac{dt}{d\tau} = 1. \tag{5.5}$$

с начальным условием

$$t\big|_{\tau=\tau^0} = t^0 \tag{5.6}$$

в пространстве H θ-периодических обобщенно гладких функций $h(\tau)$ однозначно разрешимо, причем

$$t = t^0 + S^*(\tau - \tau^0) \equiv S(\tau, \tau^0, t^0), \tag{5.7}$$
$$S(\tau + \theta, \tau^0, t^0) - S(\tau, \tau^0 + \theta, t^0) = S(\tau, \tau^0, t^0).$$

3°. Известно [10], что решение (5.7) задачи (5.5)-(5.6), описывает однопараметрическое семейство динамических движений. Следовательно, оператор $t = S(\tau, \tau^0, t^0)$ а) при $\tau = \tau^0$ обращается в тождественный оператор, б) он обратим, то есть имеем $t^0 = S(\tau^0, \tau, t)$ и в) обладает свойством группы: $S(\sigma, \tau^0, S(\tau^0, \tau, t)) = S(\sigma, \tau, t)$.

Данные свойства а)-в) следуют из того что уравнение (5.5) является автономным.

4°. Если $h(\tau,t)$ непрерывно дифференцируемая функция, а D оператор дифференцирования по диагонали $t=\tau$

$$D=\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial}{\partial t}, \tag{5.8}$$

то имеет место следующие тождество

$$Dh(\tau,t)\big|_{t=S(\tau,\tau^0,t^0)}=\frac{d}{d\tau}h(\tau,S(\tau,\tau^0,t^0)). \tag{5.9}$$

Очевидно, что $t=S(\tau,\tau^0,t^0)$ представляет функцию $t\cdot\beta(\tau,\tau^0,t^0)$ в случае развертки.

Тождество (5.9) является следствием соотношений (5.5)-(5.8).

В связи с тождеством (5.9) функцию (5.7) можно назвать θ-периодической характеристикой оператора (5.8) и оно открывает путь к решению задач для уравнений с оператором D на евклидовой плоскости $(\tau,t)\in R^2$.

Таким образом обоснована следующая лемма.

Лемма 1. Оператор дифференцирования по диагонали (5.8) имеет θ-периодические характеристики вида (5.7), обладающие динамическими свойствами а)-в).

Теперь следует распространить лемму 1 на многомерный случай.

С этой целью положим $t=(t_1,...,t_m)$ и рассмотрим векторное уравнение

$$\frac{dt}{d\tau}=e \tag{5.10}$$

с правой частью $e=(1,...,1)$. Следовательно, (5.10) в скалярной форме представим в виде системы

$$\frac{dt_j}{d\tau}=1,\quad j=\overline{1,m} \tag{5.11}$$

которая, согласно лемме, имеет периодическое решение (5.7)

$$t_j=S(\tau,\tau^0,t_j^0),\quad j=\overline{1,m}. \tag{5.12}$$

Тогда так как (5.10) является прямым произведением (5.11), то и решение его t выражается в виде прямого произведения (5.12):

$$\begin{gathered}t=(S(\tau,\tau^0,t_1),...,S(\tau,\tau^0,t_m^0))\equiv S(\tau,\tau^0,t^0),\\ S=(\tau+\theta,\tau^0,t^0)=S(\tau,\tau^0+\theta,t)=S(\tau,\tau^0,t),\end{gathered} \tag{5.13}$$

где обозначение $S(\sigma,\tau,t)$ обозначает произведение, которое становится скалярным или векторным в зависимости от того, что t представляет собой скалярную или векторную величину.

Соответственно с соотношениями (5.5), (5.8) и (5.9) получим

$$\frac{dS(\tau,\tau^0,t^0)}{d\tau}=e, \tag{5.14}$$

$$S(\tau^0,\tau^0,t^0)=t^0,\ S(\tau^0,\tau,t)=t^0,\ S(\sigma,\tau^0,S(\tau^0,\tau,t))=S(\sigma,\tau,t), \tag{5.15}$$

$$Dx(\tau,t)\big|_{t=S(\tau,\tau^0,t^0)}=\frac{d}{d\tau}x(\tau,S(\tau,\tau^0,t^0)), \tag{5.16}$$

где $x(\tau,t)$ - произвольная гладкая функция, а D - оператор дифференцирования по диагонали вида

$$D = \frac{\partial}{\partial \tau} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial t_j} \equiv \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle e, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \tag{5.17}$$

выраженный знаком $\langle , \rangle$-векторного произведения векторов $e = (1,...,1)$ и $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$.

Теорема 4. Оператор дифференцирования (5.17) имеет θ-периодические характеристики (5.13), обладающие свойствами (5.14)-(5.16).

Если через $P_{k\theta}$ обозначим полосы плоскости $(\tau, t_j) \in R \times R = R^2$, заключенные между линиями $t_j = k\theta$ и $t_j = (k+1)\theta$, то объединив эти полосы получим плоскость R^2: $\bigcup_k P_{k\theta} = R^2$. Поэтому приведенные выше рассмотрения можно распространить на плоскость R^2, следовательно, на пространство $R \times R^m = R^{m+1}$ в многомерном случае.

В дальнейшем рассматриваются системы с оператором D, когда они обладают свойством $\omega = (\omega_1, ..., \omega_m)$-периодичности по $t = (t_1, ..., t_m)$. Следовательно, все рассмотрения оставались справедливыми на цилиндрической поверхности для этих систем, следует считать, что $\theta = \max\{\omega_0 = \theta, \omega_1, ..., \omega_m\}$.

Также заметим, что переход от цилиндрической поверхности к ее развертке позволяет провести вычислительную работу или преобразовывать систему в привычном в евклидовом пространстве.

6. Периодические характеристики операторов дифференцирования по направлениям постоянных векторов

Оператор дифференцирования по $\tau \in (-\infty; +\infty) = R$ и $t = (t_1, ..., t_m) \in R \times ... \times R = R^m$ вида

$$D_c = \frac{\partial}{\partial \tau} + \left\langle c, \frac{\partial}{\partial t} \right\rangle \tag{6.1}$$

назовем оператором дифференцирования по направлению вектора $c = (c_1, ..., c_m)$, где $c_1, ..., c_m$ - произвольные действительные постоянные, $\langle , \rangle$ - знак скалярного произведения, $\frac{\partial}{\partial t} = \left(\frac{\partial}{\partial t_1}, ..., \frac{\partial}{\partial t_m} \right)$ - векторный оператор дифференцирования.

Операторы вида (6.1) находят широкое применение в теории многомерных колебаний.

Векторное поле

$$\frac{dt}{d\tau} = c \tag{6.2}$$

называется характеристическим уравнением оператора (6.1).

Уравнение (6.2) достаточно простое, поэтому его можно рассматривать на различных многообразиях и в зависимости от видов многообразий его решения могут обладать различными качественными свойствами.

Для изучения уравнения (6.2) представим его в виде системы скалярных уравнений

$$\frac{dt_j}{d\tau} = c_j, \quad j = \overline{1, m} \tag{6.3}$$

Очевидно, что векторное поле (6.2) состоит из прямого произведения m скалярных полей вида (6.3). Следовательно, решение $t = \beta(\tau, \tau^0, t^0)$ системы (6.2) состоит из прямого произведения решений уравнений системы (6.3).

Нас интересует вопрос о θ-периодических решениях системы вида (6.2), а следовательно, (6.3).

Чтобы решить этот вопрос рассмотрим скалярное уравнение (6.3) с фиксированным номером j.

Предположим, что правая часть $v(t_j)$ θ_j-периодической по t_j: $v(t_j+\theta_j)=v(t_j)\equiv c_j$.

Решение $t_j=t_j^0+c_j(\tau-\tau^0)$ уравнения (6.3) евклидовом пространстве в θ-периодическим по τ случае должны удовлетворять условию

$$t_j^0+c_j(\tau+\theta-\tau^0)=t_j^0+c_j(\tau-\tau^0).$$

Отсюда получим необходимое условие периодичности решения с периодом θ в виде

$$c_j\theta=k\theta_j,\ \ k\in Z. \tag{6.4}$$

Это условие (6.4) имеет место при рациональном

$$c_j=\frac{p_j}{q_j}, \tag{6.5}$$

$q_j=N$ - множество натуральных чисел, $p_j\in Z$ - множество целых чисел. Тогда условие периодичности решения записывается в виде

$$p_j\theta=q_jk\theta_j,\ \ p_j\in Z,\ \tilde{q}_j=q_jk\in Z.$$

Из этих соотношений при $\theta_j=\theta$ видно, что условие существования периода выполнимо, но на плоскости R^2 решение

$$t=t^0+c_j(\tau-\tau^0)\equiv\delta_j(\tau,\tau^0,t_j^0) \tag{6.6}$$

не обладает этим свойством, так как

$$\delta_j(\tau+\theta,\tau^0,t_j^0)=\delta_j(\tau,\tau^0,t_j^0)+c_j\theta\equiv\delta_j(\tau,\tau^0,t_j^0)+k\theta_j,\ \ k\in Z.$$

Отсюда возникает задача об определении многообразия M, где реализуется периодичность решения (6.6) системы (6.3) при условии (6.5).

Согласно связи векторного уравнения (6.2) и системы (6.3) имеем решение

$$\delta(\tau,\tau^0,t_j^0)=\left(\delta(\tau,\tau^0,t_1^0),...,\delta(\tau,\tau^0,t_m^0)\right)$$

системы (6.2).

Чтобы решить этот вопрос в качестве многообразия M выберем цилиндрическую поверхность $Ц=R\times S^m$, рассмотренную в пункте 4.

Тогда сформулируем нижеследующую теорему.

Теорема 5. Система (6.2) при условии (6.5) на цилиндрическую поверхности $M=R\times S^m$ определяет θ-периодические характеристики $\beta(\tau,\tau^0,t^0)$ оператора (6.1), обладающие свойствами динамических движений: а) тождественности $\beta(\tau^0,\tau^0,t^0)=t^0$, б) обратимости $t^0=\beta(\tau^0,\tau,t)$ и в) группы $\beta(\sigma,\tau^0,\beta(\tau^0,\tau,t))=\beta(\sigma,\tau,t)$.

Благодарность. *Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант №AP 19676629.*

Список использованной литературы:

1 Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970. – 200 с.

2 Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. - Алма-Ата: Наука, 1979. – 210 с.

3 Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. -Алма-Ата: Наука, 1990. – 184 с.

4 Умбетжанов Д.У., Сартабанов Ж.А. О необходимом и достаточном условии многопериодичности решения одной системы уравнений в частных производных с одинаковой главной частью // В книге: Математика и механика. Алма-Ата: КазГУ, 1972, VII часть II, с.22-27.

5 Сартабанов Ж.А. Периодты функциялар және кейбір қарапайым дифференциалдық теңдеулердің периодты шешімдері. – Алматы: РБК, 2001. –108 б.

6 Сартабанов Ж.А. Об одном спососбе изучения периодических решений уравнений в частных производных специального вида // Изв. АН КазССР. Серия физ.-мат., 1989, №1, с. 42-48.

7 Мухамбетова А.А., Сартабанов Ж.А. Устойчивость решений систем дифференциальных уравнений. Актобе: ПринтА, 2007. – 168 с.

8 Кульжумиева А.А., Сартабанов Ж.А. Периодические решения системы дифференциальных уравнений с многомерным временем. – Уральск: РИЦ ЗКГУ, 2013. – 152 с.

9 Малкин И.Г. Методы Ляпунова и Пуанкаре в теории нелинейных колебаний. – М: Едиториал УРСС, 2004. – 248 с.

10 Андронов А.А., Вит А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. - М.: Наука, 1981. – 568 с.

11 Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1965. – 332 с.

12 Арнольд В.И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1978. – 304 с.

13 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field // AIP Conference Proceedings, 2018, 1997, 020041. DOI: 10.1063/1.5049035.

14 Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.A. On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field // Eurasian Mathematical Journal, 2021, Vol. 12, №1, P. 68-81. DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-1-68-81.

15 Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2022, Vol. 12, №1, P. 32-48. WOS: 000824351800003.

16 Sartabanov Z.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with Dc-operator and ϵ-period of hereditarity // Eurasian Mathematical Journal, 2022, Vol. 13, №1, P. 86–100. DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-1-86-100.

17 Sartabanov Z.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. Многопериодическое решение начально-краевой задачи для интегро-дифференциального уравнения параболического типа. // Изв. вузов. Матем., 2022, № 8, С. 56–68. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-8-56-68.

References:

1 Kharasakhal, V.Kh. (1970). Pochti periodicheskie resheniia obyknovennykh differentsialnykh uravnenii [Almost periodic solutions of ordinary differential equations]. Alma-Ata: Nauka. 200. (in Russian).

2 Umbetzhanov, D.U. (1979). Pochti mnogoperiodicheskie reshenija differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh [Almost multiperiodic solutions of partial differential equations]. Alma-Ata: Nauka. 210. (in Russian).

3 Umbetzhanov, D.U. (1990). Pochti periodicheskie resheniia evoliutsionnykh uravnenii [Almost periodic solutions of evolutionary equations]. Alma-Ata: Nauka. 184. (in Russian).

4 Umbetzhanov, D.U., Sartabanov, Zh.A. (1972) O neobhodimom i dostatochnom uslovii mnogoperiodichnosti reshenija odnoj sistemy uravnenij v chastnyh proizvodnyh s odinakovoj glavnoj chast'ju [On the necessary and sufficient condition for the multiperiodicity of solving one system of partial differential equations with the same principal part]. Mathematics and mechanics. Alma-Ata: KazGU, 1972, 22-27. (in Russian).

5 Sartabanov, Zh.A.(2001). Periodty funkcijalar zhəne kejbir қarapajym differencialdyқ teңdeulerdiң periodty sheshimderi [Periodic functions and periodic solutions of some elementary differential equations] . – Alma-Ata: RBK. 108. (in Kazakh).

6 Sartabanov, Zh.A.(1989). Ob odnom sposobse izuchenija periodicheskih reshenij uravnenij v chastnyh proizvodnyh special'nogo vida [On one method of studying periodic solutions of partial differential equations of a special kind]. Izv. AN KazSSR. Serija fiz.-mat., №1, 42-48. (in Russian).

7 Mukhambetova A.A., Sartabanov, Zh.A.(2007). Ustojchivost' reshenij sistem differencial'nyh uravnenij [Stability of solutions of systems of differential equations]. Aktobe: Print A. 168. (in Russian).

8 Kulzhumieva A.A., Sartabanov, Zh.A.(2013). Periodicheskie reshenija sistemy differencial'nyh uravnenij s mnogomernym vremenem [Periodic solutions of a system of differential equations with multidimensional time]. Ural'sk: RIC ZKGU. 152. (in Russian).

9 Malkin I.G. (2004). Metody Ljapunova i Puankare v teorii nelinejnyh kolebanij [Lyapunov and Poincare methods in the theory of nonlinear oscillations]. M: Editorial URSS. 248. (in Russian).

10 Andronov A.A., Witt A.A., Haikin S.E. (1981). Teorija kolebanij [The theory of oscillations].M.: Nauka. 568. (in Russian).

11 Pontryagin L.S. (1965). Obyknovennye differencial'nye uravnenija [Ordinary differential equations]. M.: Nauka. 332. (in Russian).

12 Arnold V.I. (1978). Dopolnitel'nye glavy teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij [Additional chapters of the theory of ordinary differential equations]. M.: Nauka. 304. (in Russian).

13 Sartabanov Zh.A., Omarova B.Zh. (2018). Multiperiodic solutions of autonomous systems with operator of differentiation on the Lyapunov's vector field. AIP Conference Proceedings, 1997, 020041. DOI: 10.1063/1.5049035.

14 Omarova B.Zh., Sartabanov Zh.A. (2021). On multiperiodic solutions of perturbed nonlinear autonomous systems with the differentiation operator on a vector field. Eurasian Mathematical Journal, №1(12), 68-81. DOI: 10.32523/2077-9879-2021-12-1-68-81.

15 Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T. (2022). On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system. Azerbaijan Journal of Mathematics, №1(12), 32-48. WOS: 000824351800003.

16 Sartabanov Z.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. (2022). Multiperiodic solutions of quasilinear systems of integro-differential equations with Dc-operator and ϵ-period of hereditarity. Eurasian Mathematical Journal, №1(13), 86–100. DOI: 10.32523/2077-9879-2022-13-1-86-100.

17 Sartabanov Z.A., Aitenova G.M., Abdikalikova G.A. (2022). Mnogoperiodicheskoe reshenie nachal'no-kraevoj zadachi dlja integro-differencial'nogo uravnenija parabolicheskogo tip [Multiperiodic solution of the initial boundary value problem for an integro-differential equation of parabolic type]. Izv. vuzov. Matem., № 8, 56–68. DOI: 10.26907/0021-3446-2022-8-56-68. (in Russian).