МРНТИ 27.31.15
УДК 517.95

10.51889/2959-5894.2023.82.2.004

М.Д. Кошанова[1*], *М.А. Муратбекова*[1], *Б.Х. Турметов*[1]

[1]*Қ.А. Ясауи атындағы Халықаралық қазақ-түрік университеті, Түркістан қ., Қазақстан*
[*]*e-mail: maira.koshanova@ayu.edu.kz*

ИНВОЛЮЦИЯЛЫ ПАРАБОЛАЛЫҚ ТЕҢДЕУ ҮШІН КЕЙБІР КЕРІ ЕСЕПТЕР ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл мақалада инволюция қасиетіне ие болған түрлендіру көмегімен Лаплас операторының бейлокал аналогы ұғымын енгізіледі. Осы операторға сәйкес келетін бейлокал параболалық теңдеу үшін цилиндрлік аймақта кейбір кері есептердің шешімділігі зерттеледі. Теңдеудің оң жағын табуға арналған кері есептердің екі түрі қарастырылады. Бірінші есепте теңдеуді шешімімен қатар, кеңістіктік айнымалыларына тәуелді көбейткіш ізделеді. Ал екінші есеп уақыт айнымалына тәуелді функцияны табуға арналады. Бұл есептерді зерттеу барысында бейлокал Лаплас операторына Дирихле түрінде шекаралық шартпен берілген спектрлік есебінің меншікті функцияларының маңызды қасиеттері қолданылады. Меншікті функциялардың бұл қасиеттері қарастырылатын есептердің шешімін табу үшін айнымалыларын ажыратудың Фурье әдісін қолдануға мүмкіндік береді. Бірінші есептің шешімі меншікті функциялар арқылы жіктелген қатар түрінде анықталадаы. Екінші есептің шешімін табу кезінде екінші тектес Вольтерра түріндегі интегралдық теңдеулер теориясы қолданылады. Қарастырылатын есептердің шешімдерінің бар болуы және жалғыздығы туралы теоремалар дәлелденеді.

Түйін сөздер: кері есеп, инволюция, параболалық теңдеу, меншікті функциялар, меншікті мәндер, шешімнің бар болуы, шешімнің жалғыздығы.

Аннотация

М.Д. Кошанова[1], *М.А. Муратбекова*[1], *Б.Х. Турметов*[1]
[1] *К.А. Международный казахско-турецкий университет Ясави, г. Туркестан, Казахстан*

О НЕКОТОРЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ИНВОЛЮЦИЕЙ

В статье с помощью отображения, обладающей свойством инволюции вводится понятие нелокального аналога оператора Лапласа. Для соответствующего нелокального параболического уравнение в цилиндрической области исследуются вопросы разрешимости некоторых обратных задач. Рассматриваются два вида обратных задач по отысканию правой части уравнения. В первой задаче кроме решения уравнения ищется множитель, зависящий от пространственной переменной. А вторая задача посвящена отысканию функции, зависящий от временной переменной. При исследовании этих задач используется существенные свойства собственных функций спектральной задачи для нелокального оператора Лапласа с краевым условием типа Дирихле. Эти свойства собственных функций позволяют применить к нахождению решения рассматриваемых задач метод разделения переменных Фурье. Решение первой задачи находится в виде ряда разложенной по собственным функциям. При решении второй задачи используются теория интегральных уравнений Вольтерра второго рода. Доказываются теоремы существования и единственности решения рассматриваемых задач.

Ключевые слова: обратная задача, инволюция, параболическое уравнение, собственные функции, собственные значения, существование решение, единственность решение.

Abstract

ON SOME INVERSE PROBLEMS FOR PARABOLIC EQUATION WITH INVOLUTION

Koshanova M. [1], *Muratbekova M.* [1], *Turmetov B.* [1]
[1] *Khoja Akhmet Yassawi International Kazakh-Turkish University, Turkestan, Kazakhstan*

In this article, with the help of a mapping with the involution property, the concept of a nonlocal analogue of the Laplace operator is introduced. For the corresponding nonlocal parabolic equation in a cylindrical domain, the solvability of some inverse problems is studied. Two types of inverse problems of finding the right side of the equation are considered. In the first problem, in addition to solving the equation, a factor is sought that depends on the spatial variable. And the second task is devoted to finding a function that depends on a temporary variable. In the study of these problems, the essential properties of the eigenfunctions of the spectral problem for a nonlocal Laplace operator with a Dirichlet-type boundary condition are used. These properties of eigenfunctions make it possible to apply the Fourier variable separation method to finding solutions to the problems under consideration. The solution of the first problem is in the form of a series expanded in terms of eigenfunctions.

When solving the second problem, the theory of Volterra integral equations of the second kind is used. Theorems on the existence and uniqueness of solutions of the problems under consideration are proved.

Keywords: inverse problem, involution, parabolic equation, eigenfunctions, eigenvalues, existence of a solution, uniqueness of a solution.

1. Кіріспе

Айталық $x=(x_1,x_2,...,x_n)\in R^n$, Ω - бірлік шар, $\partial\Omega$ - бірлік сфера болсын делік. Q арқылы $Q=\Omega\times(0,T)$ түріндегі цилиндрлік облысты белгілейміз. Кез-келген $x=\left(x_1,x_2,...,x_n\right)\in\Omega$ нүктелері үшін $Sx=\left(-x_1,-x_2,...,-x_n\right)$ бейнелеуін қарастырамыз және $Lv(x)=a_0\Delta v(x)+a_1\Delta v(Sx)$ операторын енгіземіз. Жұмыста келесі есептер зерттеледі.

1-Есеп. $F(x,t)=f(x)g(t)$ түрінде берілсін. Келесі $u(t,x),u_t(t,x),L_xu(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$, $f(x)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$ кластарға тиісті және

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=L_xu(t,x)+F(t,x),(t,x)\in Q, \tag{1}$$

$$u(0,x)=\varphi(x),x\in\bar{\Omega}, \tag{2}$$

$$u(t,x)=0,0\le t\le T,x\in\partial\Omega, \tag{3}$$

$$u(t_0,x)=\psi(x),0<t_0\le T,x\in\partial\Omega, \tag{4}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(t,x)$ және $f(x)$ функцияларын табуымыз қажет. Мұндағы t_0 - $(0,T]$ аралығында жататын тиянақты нүкте, ал $g(t),\varphi(x)$ және $\psi(x)$ берілген функциялар.

2-Есеп. $F(x,t)=f(x)g(t)$ түрінде берілсін. Келесі $u(t,x),u_t(t,x),L_xu(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$, $g(t)\in C\left[0,T\right]$ кластарға тиісті, (1) теңдеуді, (2), (3) шарттарын және келесі

$$u(x_0,t)=h(t),x_0\in\Omega,0\le t\le T, \tag{5}$$

қосымша шартты қанағаттандыратын $u(t,x)$ және $g(t)$ функцияларын табуымыз қажет. Мұндағы x_0 - Ω облысында жататын белгілі бір нүкте, ал $f(x)$ берілген функция.

Теңдеуді шешімімен қатар оның оң жағын, теңдеудің коэффициентін немесе бастапқы және шекаралық функцияларын табу қажет есептерді зерттеу математикалық физиканың кері есептері деп аталатыны, белгілі. Қазіргі ғылымдағы кері есептердің көптеген қолданулары [1,2] еңбектерде жан-жақты зерттелген. Инволюциялы түрлендірулер қатысқан дифференциалдық теңдеулер үшін тура және кері есептер [3-9] жұмыстарда қарастырылған. Бұл жұмыстарда теңдеудің оң жағы мен шешімін табу мәселелері кеңістік айнымалысы бір өлшемді болған жағдайында зерттелген. Кеңістік айнымалылар көп өлшемді жағдайындағы кері есептер келесі жұмыстарда зерттелген [10-13]. Бұл мақалаларда қарастырылатын есептер классикалық теңдеулер үшін, яғни, инволюциялық түрлендірулері жоқ теңдеулер үшін зерттелгенін ескеруіміз керек.

Біз қарастырып жатқан 1 және 2 есептер тікбұрышты облыста классикалық параболалық теңдеу үшін $n=2$ жағдайында К.Б.Сабитов және А.Р.Зайнулловтардың [14] жұмысында зерттелген.

2. Бірінші кері есепті $g(t)=1$ жағдайында зерттеу

Бірінші кері есепті алдымен $g(t)=1$ жағдайында зерттелік. Айталық, $w_k(x)$ функциялары және μ_k сандары сәйкесінше

$$-\Delta w(x)=\mu w(x),x\in\Omega,w(x)=0,x\in\partial\Omega$$

Дирихле есебінің меншікті функциялары мен меншікті мәндері болсын. [16] еңбегінде келесі тұжырым дәлелденген.

1-Лемма. $w_k(x)$ меншікті функцияларды $w_{2k-1}(Sx)=-w_{2k-1}(x)$ және $w_{2k}(Sx)=w_{2k}(x)$ қасиеттерге ие болатындай бөліктерге бөлуге, яғни $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}=\{w_{2k-1}(x),w_{2k}(x)\}_{k=1}^{\infty}$ түрінде нөмірлеуге болады.

$u(t,x)$ функциясы 1-есептің шешімі болсын. Осы функцияға сәйкес келетін келесі

$$u_k(t)=\int_{\Omega}u(t,x)w_k(x)dx$$

функцияларды қарастырайық. (1)-шартты қолданып, $u_k(t)$ функциялары үшін мынаны аламыз

$$u_k'(t)=\int_{\Omega}u_t(t,x)w_k(x)dx=\int_{\Omega}\left[a_0\Delta u(t,x)+a_0\Delta u(t,Sx)+f(x)\right]w_k(x)dx=$$

$$=-a_0\mu_k\int_{\Omega}u(t,x)w_k(x)dx-a_1\mu_k\int_{\Omega}u(t,x)w_k(Sx)dx+f_k\,.$$

Ары қарай, 1-лемманың тұжырымынан келесі нәтиже келіп шығады

$$\int_{\Omega}u(t,x)w_k(Sx)dx=\begin{cases}\int_{\Omega}u(t,x)w_{2m}(Sx)dx=u_{2k}(t),k=2m\\-\int_{\Omega}u(t,x)w_{2m-1}(Sx)dx=u_{2k-1}(t),k=2m-1\end{cases}.$$

Егер (3) және (4) шарттарды қолдансақ, онда $u_k(t)$ функциялары үшін

$$u_k(0)=\int_{\Omega}u(0,x)w_k(x)dx=\int_{\Omega}\varphi(x)w_k(x)dx=\varphi_k\ ,\ u_k(t_0)=\int_{\Omega}u(t_0,x)w_k(x)dx=\int_{\Omega}\psi(x)w_k(x)dx=\psi_k\ ,$$

теңдіктерге ие боламыз.

Осылайша, $u_k(t)$ функциялары үшін келесі

$$u_k'(t)+\lambda_k u_k(t)=f_k,0<t<T\,, \tag{6}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,u_k(t_0)=\psi_k\,, \tag{7}$$

есепке ие боламыз. Мұнда $\lambda_{2k-1}=\left(a_0-a_1\right)\mu_{2k-1},\lambda_{2k}=\left(a_0+a_1\right)\mu_{2k}$. Бұдан кейін $a_0\pm a_1>0$ шарттары орындалады деп есептейміз.

(6)-теңдеудің жалпы шешімі мына түрде болады

$$u_k(t)=C_k e^{-\lambda_k t}+\frac{f_k}{\lambda_k}\,, \tag{8}$$

мұндағы C_k кез келген тұрақтылар. (8)-функцияны (7) шарттарға қойып

$$\begin{cases}C_k+\dfrac{f_k}{\lambda_k}=\varphi_k\\ C_k e^{-\lambda_k t_0}+\dfrac{f_k}{\lambda_k}=\psi_k\end{cases}.$$

теңдіктерді аламыз. Бұдан C_k және f_k - ларды келесі $C_k=\dfrac{\varphi_k-\psi_k}{1-e^{-\lambda_k t_0}}$ және

$$f_k=\lambda_k\frac{\psi_k-\varphi_k e^{-\lambda_k t_0}}{1-e^{-\lambda_k t_0}}. \tag{9}$$

формулалар бойынша табамыз.

Осы табылған мәндерді (8) теңдіктің оң жақ бөлігіне апарып қойып, $u_k(t)$ функциялары үшін алатынымыз

$$u_k(t)=\frac{e^{-\lambda_k t}-e^{-\lambda_k t_0}}{1-e^{-\lambda_k t_0}}\varphi_k+\frac{1-e^{-\lambda_k t}}{1-e^{-\lambda_k t_0}}\psi_k. \tag{10}$$

Егер 1-есептің шарттарында $\varphi(x)\equiv 0$ және $\psi(x)\equiv 0$ теңдіктер орындалатын болса, онда $u_k(t)=0,\ f_k=0,\forall k\geq 1$ болатынын, ескеруіміз керек. Бұл шарттардан

$$\int_\Omega u(t,x)w_k(x)dx=0,\int_\Omega f(x)w_k(x)dx=0,k\geq 1.$$

теңдіктер келіп шығады. $w_k(x)$ меншікті функциялар толық ортонормальданған жүйе болғандықтан, дерлік барлық $t\in[0,T]$ үшін $f(x)\equiv 0,x\in\bar{\Omega}$ және $u(t,x)\equiv 0,x\in\bar{\Omega}$ теңдіктерді аламыз,. Ұйғарым бойынша $u(t,x)$ функциясы $\bar{Q}$ тұйық облысында үзіліссіз функция. Сонда $u(t,x)\equiv 0,(t,x)\in\bar{Q}$. Бұдан, егер 1-есептің шешімі бар болса, онда ол жалғыз болады.

Ендігі зерттеулерде біз [16] жұмыста дәлелденген кейбір тұжырымдарды қолданамыз.

2-Лемма. $\{w_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйе үшін келесі тұжырымдар орынды:

1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}w_k^2(x)$ қатары $\bar{\Omega}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақталады;

2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+2\right)}\left[\frac{\partial w_k(x)}{\partial x_i}\right]^2$ және $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)}\left[\frac{\partial^2 w_k(x)}{\partial x_i\partial x_j}\right]^2$ қатарлары Ω облысының кез келген $\bar{\Omega}_0$ қатаң тұйық ішкі облысында бірқалыпты жинақталады.

3-Лемма. $g(x)$ функциясы келесі шарттарды қанағаттандыратын болсын

1) $g(x)\in C^m\left(\bar{\Omega}\right),\dfrac{\partial^{m+1}g(x)}{\partial x_1^{m_1}...\partial x_n^{m_n}}\in L_2\left(\Omega\right),m_1+...+m_n=m+1,m\geq 1$,

2). $g(x)\big|_{\partial\Omega}=\Delta g(x)\big|_{\partial\Omega}=...=\Delta^{\left[\frac{m}{2}\right]}g(x)\Big|_{\partial\Omega}=0$.

Онда $\sum\limits_{k=1}^{\infty}g_k^2\mu_k^{m+1}$ сандық қатары жинақталады, мұндағы $g_k=\left(g,w_k\right)$.

1-есептің $g(t)=1$ жағдайындағы негізгі тұжырымын баяндайық.

1-Теорема. Айталық, $a_0\pm a_1>0$, $g(t)=1$, $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары 3 лемманың шарттарын $m=\left[n/2\right]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырсын. Онда 1-есептің шешімі бар, жалғыз болады және мына

$$f(x)=\left(a_0-a_1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{2k-1}\frac{\psi_{2k-1}-\varphi_{2k-1}e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}w_{2k-1}(x)+$$
$$+\left(a_0+a_1\right)\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_{2k}\frac{\psi_{2k}-\varphi_{2k}e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}w_{2k}(x), \tag{11}$$

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t}-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}\varphi_{2k-1}+\frac{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t}}{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}\psi_{2k-1}\right)w_{2k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t}-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}\varphi_{2k}+\frac{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t}}{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}\psi_{2k}\right)w_{2k}(x). \qquad (12)$$

қатарлар түрінде анықталады.

Дәлелдеуі. Құрылымы бойынша (11) және (12) қатарлардың қосындылары формальды түрде 1-есептің барлық шарттарын қанағаттандырады. Енді осы функциялардың тегістігін зерттеу мәселесі қалады. Ары қарай C символымен шамасы бізді қызықтырмайтын, оң таңбалы тұрақтыны белгілейміз. (9)-формуламен берілген f_k коэффициенттеріне бағалау жасап, t_0 параметрдің $t_0 \in (0,T]$ мәндерінде $\frac{1}{1-e^{-(a_0\pm a_1)\mu_{2k-1}t_0}}, \frac{e^{-(a_0\pm a_1)\mu_{2k-1}t_0}}{1-e^{-(a_0\pm a_1)\mu_{2k-1}t_0}}$ функцияларының шектелгендігінен, (11)-қатар үшін мынаны аламыз

$$|f(x)| \le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\varphi_k||w_k(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\psi_k||w_k(x)|\right).$$

Келесі қатарларды жинақтылыққа зерттейміз

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\psi_k||w_k(x)| \qquad (13)$$

және

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\varphi_k||w_k(x)|. \qquad (14)$$

Қатарлар үшін орынды болған Бессель теңсіздігін қолдансақ, келесі бағалауларды аламыз

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\psi_k||w_k(x)|=\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\left(\sqrt{\mu_k}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}|\psi_k|\frac{|w_k(x)|}{\left(\sqrt{\mu_k}\right)^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}} \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}|\psi_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|w_k(x)|^2}{\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k|\varphi_k||w_k(x)| \le \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}|\varphi_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|w_k(x)|^2}{\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}}.$$

Теорема шарты бойынша $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары 3- лемманың шарттарын $m=[n/2]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырады. Олай болса $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{m+1}|\varphi_k|^2$ және $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{m+1}|\psi_k|^2$ сандық қатарлары жинақты болады. Сонымен қатар, 2 лемманың ұйғарымы бойынша $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}|w_k(x)|^2$ қатары $\bar{\Omega}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақты болады. Бұдан (13) және (14) қатарларының $\bar{\Omega}$ облысында бірқалыпты жинақталатыны, келіп шығады. Ендеше, (11) теңдігінің оң жағындағы қатар $\bar{Q}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақталады және оның $f(x)$ қосындысы $C\left(\bar{Q}\right)$ класында жатады.

Содан, $\lambda_{2k-1}=\left(a_0-a_1\right)\mu_{2k-1}$, $\lambda_{2k}=\left(a_0+a_1\right)\mu_{2k}$ және функции $\frac{e^{-\lambda_k t}-e^{-\lambda_k t_0}}{1-e^{-\lambda_k t_0}}, \frac{1-e^{-\lambda_k t}}{1-e^{-\lambda_k t_0}}$ функциялары $0 \le t \le T$ кесіндісінде шектелген, олай болса мына бағалау орынды

$$|u(t,x)| \le C\left(\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k||w_k(x)|+\sum_{k=1}^{\infty}|\psi_k||w_k(x)|\right).$$

Соңғы теңсіздіктің оң жағындағы қатардың $\bar{\Omega}$ тұйық облыста бірқалыпты жинақталатынын бұған дейін де ескерткенбіз. Бұдан біз $u(t,x)$ функциясын бейнелейтін (12) функционалдық қатар $\bar{Q}$ тұйық облыста бірқалыпты жинақталатынын, сондықтан да $u(t,x) \in C\left(\bar{Q}\right)$ болатынын аламыз.

Ары қарай, $u_t(t,x)$ және $\Delta u(t,x)$ функциялардың тегіс болатынын көрсетейік. (12)-қатарды t айнымалысы бойынша мүшелеп дифференциалдасақ, мынаны аламыз

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -(a_0-a_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_{2k-1}\frac{e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t}}{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}\varphi_{2k-1} + (a_0-a_1)\mu_{2k-1}\frac{e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t}}{1-e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}}\psi_{2k-1}\right)w_{2k-1}(x) +$$

$$-(a_0+a_1)\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_{2k}\frac{e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t}}{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}\varphi_{2k} + (a_0+a_1)\mu_{2k}\frac{e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t}}{1-e^{-(a_0+a_1)\mu_{2k}t_0}}\psi_{2k}\right)w_{2k}(x).$$

Бұдан

$$\left|u_t(t,x)\right| \le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_k\,|\varphi_k|\,|w_k(x)| + \mu_k\,|\psi_k|\,|w_k(x)|\right).$$

Осы сияқты $\Delta u(t,x)$ үшін келесі бағалаудың орындалатынын көрсетеміз

$$\left|\Delta u(t,x)\right| =\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_k\,|\varphi_k|\,|w_k(x)| + \mu_k\,|\psi_k|\,|w_k(x)|\right)$$

Ендеше, жоғарыдағы сияқты тұжырымдай келе, біз мынаны аламыз $u_t(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$, $L_x u(t,x)\in C\left(\bar{Q}\right)$. Теорема дәлелденді.

3. 1-есепті $g(t)\ne 1$ жағдайында зерттеу.

Енді $g(t)\ne 1$ болсын және $u(t,x)$ функциясын 1-есептің шешімі делік. 2-бөлімнің жағдайындағы сияқты келесі функцияны қарастырамыз

$$u_k(t) = \int_{\Omega} u(t,x) w_k(x)dx.$$

Бұл жағдайда $u_k(t)$ функциясына қатысты мына теңдеуді аламыз

$$u_k'(t) = -\lambda_k u_k(t) + g(t) f_k. \tag{15}$$

Келесі белгілеу енгіземіз

$$g_k(t) = \int_0^t g(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau.$$

Сонда (15) теңдеудің жалпы шешімі $u_k(t) = C_k e^{-\lambda_k t} + f_k g_k(t)$ функциясы болады. 1-есептің шарттарын қолданып мынаны аламыз

$$\varphi_k = u_k(0) = C_k, \psi_k = u_k(t_0) = \varphi_k e^{-\lambda_k t_0} + f_k g_k(t_0).$$

Егер барлық $k\ge 1$ үшін $g_k(t_0)\ne 0$ шарттары орындалса, онда

$$f_k = \frac{1}{g_k(t_0)}\left[\psi_k - \varphi_k e^{-\lambda_k t_0}\right] \tag{16}$$

және

$$u_k(t) = \left(e^{-\lambda_k t} - \frac{g_k(t)}{g_k(t_0)}e^{-\lambda_k t_0}\right)\varphi_k + \frac{g_k(t)}{g_k(t_0)}\psi_k. \tag{17}$$

Енді, егер 1-есепте (2) және (4) шарттары біртекті болса, яғни $\varphi(x)=0$, $\psi(x)=0$, онда 1-есептің шешімі жалғыз болатынын байқаймыз. Ал, егерде кейбір $t_0\in(0,T]$ және k_0 үшін $g_{k_0}(t_0)=0$ шарттары орындалса, онда 1-есептің шешімі жалғыз болмауы мүмкін. Мысалы, егер f_{k_0} - кез келген тұрақты, ал

$g_{k_0}(t)=\int_0^t g(\tau)e^{-(a_0+a_1)\mu_{k_0}(t-\tau)}d\tau$ және $w_{k_0}(x)$ функциясы $w_{k_0}(Sx)=w_{k_0}(x)$ қасиетіне ие болса, онда бұл жағдайдағы $u(t,x)=f_{k_0}g_{k_0}(t)w_{k_0}(x)$, $f(x)=f_{k_0}w_{k_0}(x)$ функциялары (1) теңдеуді, (2) және (4) біртекті шарттарын қанағаттандыратын болады.

Осылайша, келесі тұжырым орынды.

2-Теорема. Егер 1 есептің шешімі бар болса, ол $g_k(t_0)\neq 0, k\geq 1$ шарттары орындалғанда ғана жалғыз болады.

4-Лемма. Егер $g(t)\in C[0,T]$ және $|g(t)|>g_0=const>0$ болса, онда барлық $k\geq 1$ үшін $g_k(t_0)\geq \dfrac{C_0}{\mu_k}$ теңсіздігі орындалатындай C_0 тұрақты бар болады.

5-Лемма. (16) және (17) теңдіктеріндегі f_k және $u_k(t)$ коэффициенттері үшін келесі бағалаулар орынды болады

$$|f|_k \leq C\mu_k\left[|\varphi_k|+|\psi_k|\right], \tag{18}$$

$$v_k(t)=C\left[|\varphi_k|+|\psi_k|\right], \tag{19}$$

$$\left|v_k'(t)\right|\leq C\mu_k\left[|\varphi_k|+|\psi_k|\right]. \tag{20}$$

Бұл тұжырымдар [14] жұмыстағы 7 және 8 леммалар сияқты дәлелденеді. $g(t)\neq 1$ болған жағдайындағы 1-есепке қатысты негізгі нәтижені келтірейік.

3-Теорема. Айталық $a_0\pm a_1>0$, $g(t)\in C[0,T]$ және $|g(t)|>g_0=const>0$, $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функциялары 3 лемманың шарттарын $m=[n/2]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырсын. Сонда 1-есептің шешімі бар, жалғыз болады және келесі қатарлар түрінде анықталады

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g_{2k-1}(t_0)}\left[\psi_{2k-1}-\varphi_{2k-1}e^{-(a_0-a_1)\mu_k t_0}\right]w_{2k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{g_{2k}(t_0)}\left[\psi_{2k}-\varphi_{2k}e^{-(a_0+a_1)\mu_k t_0}\right]w_{2k}(x), \tag{21}$$

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t}-\frac{g_{2k-1}(t)}{g_{2k-1}(t_0)}e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k-1}t_0}\right)\varphi_{2k-1}+\frac{g_{2k-1}(t)}{g_{2k-1}(t_0)}\psi_{2k-1}\right]w_{2k-1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k}t}-\frac{g_{2k}(t)}{g_{2k}(t_0)}e^{-(a_0-a_1)\mu_{2k}t_0}\right)\varphi_{2k}+\frac{g_{2k}(t)}{g_{2k}(t_0)}\psi_{2k}\right]w_{2k}(x). \tag{22}$$

Дәлелдеуі. Құрылымы бойынша (21) және (22) теңдіктеріндегі $f(x)$ және $u(t,x)$ функциялар 1-есептің барлық шарттарын формальды түрде қанағаттандырады. (18)-бағалаулардан (21)-қатардың $\bar{\Omega}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақталатыны келіп шығады, олай болса $f(x)\in C(\bar{\Omega})$. Осы сияқты, (19)-бағалаулардан (22)-қатардың $\bar{Q}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақты болатыны келіп шығады, сондықтан да бұл қатардың қосындысы, яғни $u(t,x)$ функциясы $\bar{Q}$-да үзіліссіз болады. Егер (22) қатарын t айнымалысы бойынша мүшелеп дифференциалдасақ, онда $u_t(t,x)$ үшін (20) бағалауларын аламыз, яғни

$$\left|u_t(t,x)\right| \le C\sum_{k=1}^{\infty}\left(\mu_k\,|\varphi_k\,||\,w_k(x)\,|+\mu_k\,|\psi_k\,||\,w_k(x)\,|\right).$$

Соңғы теңсіздіктің оң жақ бөлігіндегі қатар $\overline{\Omega}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақталатын болғандықтан, $u_t(t,x)$ функциясын бейнелейтін қатар да $\overline{Q}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақталады, сондықтан да $u_t(t,x)\in C\left(\overline{Q}\right)$. Осы сияқты $Lu(t,x)\in C\left(\overline{Q}\right)$ қатынасты көрсетуге болады. Теорема дәлелденді.

4. 2-есепті зерттеу.

Енді $F(t,x)=f(x)g(t)$ және $f(x)$ берілген функция делік. $g(t)$ функциясын белгілі деп ұйғарып, $u(t,x)$ функциясын мына түрде іздейміз

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)w_k(x), \tag{23}$$

мұндағы $u_k(t)$ коэффициенттер

$$u_k(t)=\varphi_k e^{-\lambda_k t}+f_k\int_0^t g(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau \tag{24}$$

теңдікпен анықталады. Осы табылған коэффициенттерді (23) теңдіктің оң жағына апарып қоямыз, сонда

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_k e^{-\lambda_k t}+f_k\int_0^t g(\tau)e^{-\lambda_k(t-\tau)}d\tau\right]w_k(x).$$

Соңғы теңдікте $x=x_0$ десек, онда (5)-шарттан мынаны аламыз

$$h(t)=u(t,x_0)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k t}w_k(x_0)+\int_0^t\left[\sum_{k=1}^{\infty}f_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}w_k(x_0)\right]g(\tau)d\tau.$$

Осы берілгендерге сәйкес

$$\varphi_0(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k t}w_k(x_0), \tag{25}$$

$$K(t,\tau)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}w_k(x_0), \tag{26}$$

$\tilde{h}(t)=h(t)-\varphi_0(t)$ белгілеулер енгіземіз. Сонда $g(t)$ белгісіз функцияға қатысты келесі бірінші текті Вольтердің интегралдық теңдеуін аламыз

$$\int_0^t K(t,\tau)g(\tau)d\tau=\tilde{h}(t). \tag{27}$$

6-Лемма. Айталық, $\varphi(x)$ функциясы 3 лемманың шарттарын $m=\left[n/2\right]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырсын. Сонда (25)-қатар және оның t бойынша туындысы $0\le t\le T$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады.

Дәлелдеуі. (25) қатарын жинақтылыққа зерттейміз. Егер $\varphi(x)$ функциясы $m=\left[n/2\right]+2$ жағдайындағы 3-лемманың шарттарын қанағаттандыратын болса, онда келесі $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left|\varphi_k\right|^2$ және $\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}\left|\varphi_k\right|^2$ сандық қатарлар жинақты болады. Онда, $0\le t\le T$ нүктелер үшін мынаны аламыз

$$\left|\varphi_0(t)\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k e^{-\lambda_k t}w_k(x_0)\right|\le C\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k\,||\,w_k(x_0)|=C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\left|\varphi_k\right|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}|\,w_k(x_0)\,|^2}<\infty\,.$$

Осы сияқты $\varphi_0'(t)$ туындылары үшін келесіні аламыз

$$\left|\varphi_0'(t)\right|=\left|-\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon\mu_k\varphi_k e^{-\varepsilon\mu_k t}w_k(x_0)\right|\le C\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}\left|\varphi_k\right|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k^{-\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)}\left|w_k(x_0)\right|^2}<\infty\,.$$

Лемма дәлелденді.

Тура осы сияқты келесі тұжырым да дәлелденеді.

7-Лемма. Айталық, $f(x)$ функциясы 3 лемманың шарттарын $m=\left[n/2\right]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырсын. Сонда (26) қатары және оның t айнымалысы бойынша туындылары $0\le\tau\le t\le T$ кесіндісінде бірқалыпты жинақталады.

Енді 2 есепке қатысты негізгі тұжырымды келтірейік.

4-Теорема. Айталық, $a_0\pm a_1>0$, функции $\varphi(x)$ және $f(x)$ функциялары 3 лемманың шарттарын $m=\left[n/2\right]+2$ көрсеткішке сәйкес қанағаттандырсын және келесі $f(x_0)\ne 0$, $h(t)\in C^1\left[0,T\right]$, $h(0)=\varphi(x_0)$ шарттар орындалсын. Сонда (27) интегралдық теңдеуінің $C\left[0,T\right]$ класында жататын $g(t)$ жалғыз шешімі бар болады.

Дәлелдеуі. Егер $\varphi(x)$ және $f(x)$ функциялары үшін $m=\left[n/2\right]+2$ жағдайындағы 3-лемманың шарттары орындалатын болса, онда 6-лемманың тұжырымдарына сәйкес, $\varphi_0(t),K(t,\tau)$ және $\varphi_0'(t),K_t(t,\tau)$ функциялары сәйкесінше $0\le t\le T$ және $0\le\tau\le t\le T$ кесінділерінде үзіліссіз болады. (27) теңдігін t айнымалысы бойынша дифференциалдасақ, біз мынаны аламыз

$$K(t,t)g(t)+\int_0^t K_t(t,\tau)g(\tau)d\tau=\tilde{h}'(t)\,. \tag{28}$$

(26) теңдігінде $\tau=t$ деп есептесек, $K(t,t)$ мәнін табамыз, яғни

$$K(t,t)=\sum_{k=1}^{\infty}f_k w_k(x_0)\,.$$

Бұдан мынаны аламыз $K(t,t)=f(x_0)\ne 0$. Егер $K_1(t,\tau)=\dfrac{K_t(t,\tau)}{K(t,t)},h_1(t)=\dfrac{\tilde{h}'(t)}{K(t,t)}$ деп белгілесек, онда (28) теңдеуін келесідей

$$g(t)+\int_0^t K_1(t,\tau)g(\tau)d\tau=h_1(t)\,, \tag{29}$$

қайта жазуға болады. Онда $K_1(t,\tau)$ өзегі және оң жақ бөлігі $h_1(t)$ үзіліссіз болған екінші текті Вольтердің интегралдық теңдеуін аламыз. Осы берілгендерге сәйкес, Вольтердің екінші текті интегралдық теңдеуінің жалпы теориясы бойынша (29) теңдеуінің шешімі бар, жалғыз болады және ол шешім $C\left[0,T\right]$ класында жатады. Теорема дәлелденді.

1-Салдар. Егер 4-теореманың шарттары орындалатын болса, онда 2-есептің шешімі бар, жалғыз болады және де шешім (23) түрінде бейнеленеді. Мұндағы $u_k(t)$ коэффициенттері (24) теңдігінен анықталады, ал $g(t)$ - (29) интегралдық теңдеуінің шешімі болады.

Жұмыс Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғарғы білім министрлігінің Ғылым комитеті № AP09258274 гранты аясында орындалды.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 Isakov V. (2006) Inverse problems for partial dierential equations. New-York. Springer, 406 p. DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-319-51658-5.

2 Kravchenko V.V. (2020) Direct and Inverse Sturm-Liouville Problems: A Method of Solution. Berlin. Springer Nature, 154 p. DOI:https://doi.org/10.1007/978-3-030-47849-0.

3 Ahmad A., Ali M., Malik S.A. Inverse Problems for Diffusion Equation with Fractional Dzherbashian-Nersesian Operator // Fractional Calculus and Applied Analysis. – 2021. – Vol. 24. – P.1899 – 1918. DOI:https://doi.org/10.1515/fca-2021-0082.

4 Al-Salti N., Kerbal S., Kirane M. Initial-boundary value problems for a time-fractional differential equation with involution perturbation// Mathematical Modelling of Natural Phenomena. – 2019. – Vol. 14, No. 3. – P. 1 – 15. DOI:https://doi.org/10.1051/mmnp/2019014.

5 Kirane M., Sadybekov M.A., Sarsenbi A.A. On an inverse problem of reconstructing a subdiffusion process from nonlocal data// Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2019. – Vol. 42(6). – P. 2043-2052. DOI:https://doi.org/10.1002/mma.5498.

6 Mussirepova E., Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. The inverse problem for the heat equation with reflection of the argument and with a complex coefficient// Boundary Value Problems. – 2022. – Vol. 99(2022). – P. 1 – 13. DOI: https://doi.org/10.1186/s13661-022-01675-1.

7 Mussirepova E., Sarsenbi A.A., Sarsenbi A.M. Solvability of mixed problems for the wave equation with reflection of the argument//Mathematical Methods in the Applied Sciences. – 2022. – Vol. 45, No.17. – P.11262–11271. DOI:https://doi.org/10.1002/mma.8448.

8 Sadybekov M., Dildabek G., Ivanova M. Direct and inverse problems for nonlocal heat equation with boundary conditions of periodic type// Boundary Value Problems. – 2022. – Vol. 53(2022). – P. 1 – 24. DOI: https://doi.org/10.1186/s13661-022-01632-y.

9 Syzdykova A.M., ShaikhovaG.N., Kutum B.B. Two-dimensional nonlocal nonlinear schrodinger equation based on the ablowitz-musslimani symmetry condition // Абай атындағы ҚазҰПУ-нің ХАБАРШЫСЫ, «Физика-математика ғылымдары» сериясы. – 2020. –№ 4(72). – P. 63–67. https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.09.

10.Ashurov R., Muhiddinova O. Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation// Differential equations. – 2020. – Vol.56. – P.1550–1563. DOI: https : //doi. org / 10. 1134 /S00122661200120046

11 Kozhanov A.I., Abulkayirov U.U., Ashurova G.R. Inverse problems of determining coefficients of time type in a degenerate parabolic equation// Bulletin of the Karaganda University.Mathematics series. – 2022. –№ 2(106). – P.128 – 142. DOI 10.31489/2022M2/128-142.

12 Kozhanov A.I., Bzheumikhova O.I. Elliptic and Parabolic Equations with Involution and Degeneration at Higher Derivatives//Mathematics. – 2022. – Vol.10. – P.1-10. https://doi.org/10.3390/ math10183325.

13 Pyatkov S.G., Baranchuk V.A. On some Inverse Parabolic Problems with Pointwise Overdetermination// Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics. – 2021. – Vol.14(4). – P.463–474. DOI: 10.17516/1997-1397-2021-14-4-463-474.

14 Sabitov K.B., Zainullov A.R. Inverse problems for a two-dimensional heat equation with unknown right-hand side// Russian Mathematics. – 2021. – Vol.65, No.3. – P.75 – 88. DOI: 10.3103/S1066369X21030087.

15 Turmetov B., Karachik V. On Eigenfunctions and Eigenvalues of a Nonlocal Laplace Operator with Multiple Involution//Symmetry. – 2021.–Vol.13. – P. 1–20. https://doi.org/10.3390/ sym13101781.

16 Il'in V.A. The solvability of mixed problems for hyperbolic and parabolic equations// Russian Mathematical Surveys. – 1960. – Vol. 15, No.1.– P. 85 – 142. DOI: https: //doi.org /10.1070/ RM1960v015n02ABEH004217.