МРНТИ 27.41.17, 30.17.23
УДК 519.6

10.51889/2959-5894.2023.82.2.008

К.М. Шияпов [1, 2], Ж.Д. Байшемиров [1,2], А.Б. Жанбырбаев [1,2]*

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2] Ақпараттық және есептеуіш технологиялар институты, Алматы қ., Қазақстан
**e-mail: kadrzhan2019@gmail.com*

СЫҒЫЛМАЙТЫН АРАЛАСПАЙТЫН СҰЙЫҚТАР АҒЫНДАРЫ ҮШІН ҚЫСЫМДЫ ТҮЗЕТУ ҮРДІСІНЕ САНДЫҚ ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа

Бір-бірімен араласпайтын сығылмайтын сұйықтықтардағы жылдамдық векторы мен қысым арасындағы байланыстың сандық модельдеу және талдау саласындағы ғылыми зерттеулер әртүрлі инженерлік және физикалық қолданбаларда өзекті және маңызды. Бұл мәселе сұйықтықтарды тасымалдау жүйелерін, гидродинамикалық жүйелерді және оларды автоматтандыруды жасау және оңтайландыру сияқты көптеген инженерлік мәселелермен тікелей байланысты. Араласпайтын сұйықтықтардағы жылдамдық пен қысым арасындағы байланысты түсіну әртүрлі факторлардың әсерін бағалауға көмектеседі. Бұл жұмыс екі кезеңнен тұратын қысымды түзету процедурасы арқылы әр уақытта жылдамдық өрісінің есептеулерін есепке алатын араласпайтын сығылмайтын сұйықтар ағындары үшін жылдамдық векторы мен қысым арасындағы байланысты сандық зерттеуді қарастырады. Нәтижесінде қысымды жоғарылату режимі босатылған сұйықтық тамшыларын бос шекарадан бөлу және олардың одан әрі капилляр бойымен таралуы есебінен жүзеге асырылады.

Түйін сөздер: сығылмайтын араласпайтын сұйықтықтар, қысым, жылдамдық, беттік керілу, математикалық моделдеу, сандық шешімдер

Аннотация

К.М. Шияпов [1,2], Ж.Д. Байшемиров [1,2], А.Б. Жанбырбаев [1,2]*
[1]Казахский национальный университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан
[2]Институт информационных технологий, г.Алматы, Казахстан

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА КОРРЕКЦИИ ДАВЛЕНИЯ ДЛЯ ТЕЧЕНИЙ НЕСМЕШИВАЮЩИХСЯ НЕСЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Научные исследования в области численного моделирования и анализа связи между вектором скорости и давлением в несмешивающихся несжимаемых жидкостях имеют актуальность и важность в различных инженерных и физических приложениях. Эта проблематика имеет прямое отношение к множеству инженерных задач, таких как разработка и оптимизация систем транспортировки жидкостей, гидродинамических систем и их автоматизации. Понимание взаимосвязи между скоростью и давлением в несмешивающихся жидкостях может помочь в оценке воздействия различных факторов. В данной работе рассматривается численное исследование связи вектора скорости и давления для течений несмешивающихся несжимаемых жидкостей, где учитывается расчеты поля скорости в каждый момент времени с использованием процедуры коррекции давления, состоящие из двух этапов. В результате режим повышения давления осуществляется за счет отрыва выделившихся капель жидкости от свободной границы и дальнейшего их распределения по капилляру.

Ключевые слова: несжимаемые несмешивающиеся жидкости, давление, скорость, поверхностное натяжение, математическое моделирование, численные решения.

Abstract

NUMERICAL STUDY OF THE PRESSURE CORRECTION PROCESS FOR FLOW OF IMMIXIBLE INCOMPRESSIBLE FLUIDS

Shiyapov K.M.· [1,2], Baishemirov Zh.D. [1,2], Zhanbyrbayev A.B. [1,2]*
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2] Institute of Information and Computational Technologies, Almaty, Kazakhstan

Scientific research in the field of numerical modeling and analysis of the relationship between the velocity vector and pressure in immiscible incompressible fluids is relevant and important in various engineering and physical applications. This issue is directly related to many engineering problems, such as the development and optimization of fluid transport systems, hydrodynamic systems and their automation. Understanding the relationship between velocity and pressure in immiscible fluids can help evaluate the effects of various factors. This paper considers a numerical study of the relationship between the velocity vector and pressure for flows of immiscible incompressible fluids, which takes into account calculations of the velocity field at each time using a pressure correction procedure consisting of two stages. As a result, the pressure increase mode is carried out due to the separation of released liquid droplets from the free boundary and their further distribution along the capillary.

Keywords: incompressible immiscible fluids, pressure, velocity, surface tension, mathematical modeling, numerical solutions.

Кіріспе

Сығылмайтын сұйықтықтардағы жылдамдық векторы мен қысым арасындағы байланыс үрдісі келесі теңдеулер жүйесімен сипатталады:

$$\rho\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \rho g + \nabla\cdot\mu(\nabla\mathbf{u} + \nabla^T\mathbf{u}) + \rho f\ , \tag{1}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{u} = 0. \tag{2}$$

Есептің сандық шешімі төртбұрышты жылжытылған торлардағы (1-сурет.) (staggered grid) шектеулі айырымды әдісімен тікелей сандық модельдеу арқылы қолданылды [1]. Шектеулі айырым теңдеуі интегралды-интерполяциялы әдісінің көмегімен шығарылады (метода баланса) [2]. Есептеулерді бір уақыттан екінші кезеңге дейін ұйымдастыру үшін проекциялау әдісі қолданылды, атап айтқанда қысым коррекцияның процедурасы (Second-Order Projection Method) [3]. Оны қолдану қажеттілігі сығылмайтын сұйықтық жағдайында біртұтастық теңдеуі жылдамдық векторының құрамдастырын ғана қамтылғандықтан тікелей қысыммен байланысы жоқ. Сығылмайтын ағындар үшін жылдамдық векторы мен қысым арасындағы байланыс тығыздық теңдеуі арқылы жүзеге асырылады, сондықтан бұл процедураны осындай ортада қолдану талап етілмейді.

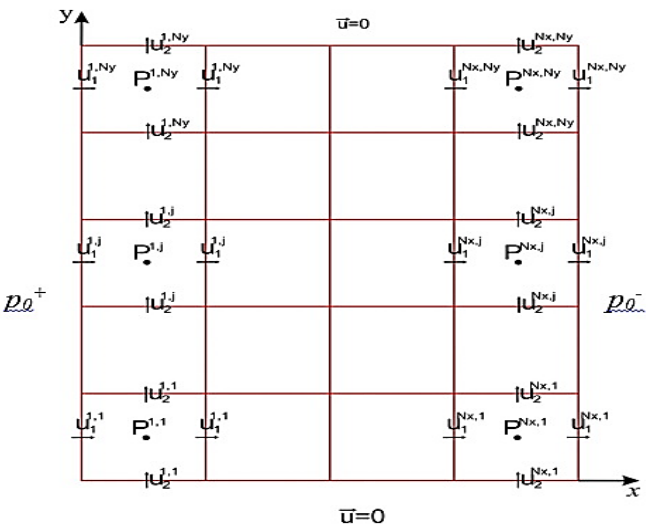
Зерттеу әдістемесі

Қысымды коррекциялау процедурасы (Second-Order Projection Method).

Қысымды түзету процедурасын қолданып, әрбір уақыт мезетінде жылдамдық өрісін есептеу екі кезеңде жүзеге асырылады. Бірінші кезеңде аралық жылдамдық өрісі біртұтастық теңдеуін есепке алмай есептеледі. Екінші кезеңде жылдамдық өрісі біртұтастық теңдеуін қанағаттандыратын етіп түзетіледі. Осылайша, нөлдік дивергенциямен векторлардың кеңістігінде жылдамдық өрісінің «проекциясы» жүзеге асырылады (проекция әдісінің атауы). Егер теңдеуді (2) формальды екі теңдеудің (3), (4) жиынтығын білдіретін болса, бөлшектену схемасын алу оңай:

$$\frac{u^* - u^n}{\Delta t} = g + \frac{1}{\rho^n}(\mu_0\nabla^2 u^n)_h{}^n\ , \tag{3}$$

$$\frac{u^{n+1} - u^*}{\Delta t} = -\frac{\nabla_h p}{\rho^n}\ . \tag{4}$$



Сурет 1. Есептің сандық шешімі төртбұрышты жылжытылған торлары

Жоғарғы таңба n ағымдағы уақыт кезеңінде t айнымалы мәнін білдіреді, ал $n+1$ - $t+\Delta t$ уақытына сәйкес уақыт қадамының айнымалысы болып табылады; ∇_h - градиенттің шектік-айырым аппроксимасын білдіреді, u^* - жылдамдық векторының аралық мәні. Көріп отырғанымыздай, теңдеудің (3) және (4) формальды қосу формулалары жуықтаған (1) теңдеуін береді, онда уақыт туындысы бірінші ретті шекті айырым туындысымен "алға" жақындаған (4) қысым төмендегі шарттың қанағаттандырылатындай етіп анықталуы керек:

$$\nabla_h \cdot u^{n+1} = 0\,. \tag{5}$$

дивергенция операторын теңдеуге (4) қолданып және (5) пайдалана отырып, қысымға арналған Пуассон теңдеуін аламыз:

$$\nabla_h \cdot \left(\frac{1}{\rho^n}\nabla_h p\right) = \frac{1}{\Delta t}\nabla_h \cdot u^* \cdot \tag{6}$$

Қысым табылғаннан кейін теңдеу (4) $n+1$ қадамында түзетілген жылдамдықты u^{n+1} анықтау үшін пайдаланамыз. Осылайша, келесі есептеу схемасына келеміз:

1) бірінші кезеңде t^n уақытында u^n жылдамдық векторының компоненттері белгілі. Формуланы (3) пайдалана отырып, аралық өрістегі u^* жылдамдықты табамыз;

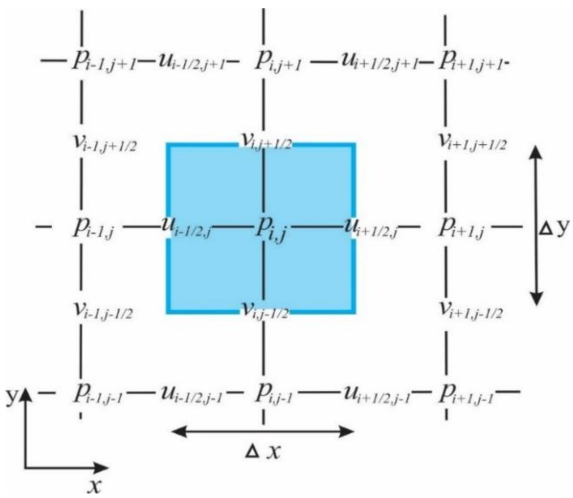
2) екінші кезеңде аралық жылдамдықты u^* анықталды деп, қысымға арналған Пуассон теңдеуінен (6) біз p қысымын табамыз;

3) үшінші кезеңде аралық жылдамдықты u^* және p қысымы анықталды деп, (4) теңдеуінен $n+1$ қадамында түзетілген жылдамдықты u^{n+1} табамыз.

Пуассон теңдеуін (6) әр кезеңдегі уақыт қадамы үшін шешу тікелей итерациялық әдістерді қолдануға болады. Біз SOR (Successive over-relaxation) жоғарғы релаксация әдісін таңдаймыз. Бұл әдістің маңызды артықшылығы әрбір итерацияда қателік коэффициентінің төмендеуі болып табылады. Бұл әдіс оңай программаланады және сонымен қатар, итерация процессін тоқтату критерийі ретінде сәйкессіздіктің нормасын қолдануға ыңғайлы.

Есептің дискретті кеңістіктігі.

Есепте уақыт пен кеңістікті дискреттеу үшін интегралды-интерполяциялық әдісі қолданылады (баланс әдісі) [4]. Қаралып отырған аймақта біз тікбұрышты торды енгізіп, қысымды клеткалық орталықтарда анықтаймыз, ал жылдамдық компоненттері оның бүйір жақтарында беріледі (сурет 2).



Сурет 2. Есептің сандық шешімі төртбұрышты жылжытылған торы

Гаусс формуласын және қарапайым теңдеулерді интегралдау техникасын пайдалана отырып теңдеулердің (3), (4), (6) шектік айырым теңдеулерін жазамыз.

Компоненті (3) шектік-айырымдық теңдеудің аналогы ретінде жазуға болады:

$$u^*_{i+1/2,j} = u^n_{i+1/2,j} + \Delta t \left\{ \left(-A_x\right)^n_{i+1/2,j} + \left(g_x\right)^n_{i+1/2,j} + \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\rho^n_{i+1,j} + \rho^n_{i,j}\right)} \left(D_x\right)^n_{i+1/2,j} \right\}, \tag{7}$$

$$v^*_{i,j+1/2} = v^n_{i,j+1/2} + \Delta t \left\{ \left(-A_y\right)^n_{i,j+1/2} + \left(g_y\right)^n_{i,j+1/2} + \frac{1}{\frac{1}{2}\left(\rho^n_{i,j+1} + \rho^n_{i,j}\right)} \left(D_y\right)^n_{i,j+1/2} \right\}, \tag{8}$$

онда келесі белгілер пайдаланылады:

$$\left(D_x\right)^n_{i+1/2,j} = \mu_0 \left\{ \left(\frac{u^n_{i+3/2,j} - 2u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i-1/2,j}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{u^n_{i+1/2,j+1} - 2u^n_{i+1/2,j} + u^n_{i+1/2,j-1}}{\Delta y^2} \right) \right\}, \tag{9}$$

және

$$\left(D_y\right)^n_{i,j+1/2} = \mu_0 \left\{ \left(\frac{v^n_{i+1,j+1/2} - 2v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i-1,j+1/2}}{\Delta x^2} \right) + \left(\frac{v^n_{i,j+3/2} - 2v^n_{i,j+1/2} + v^n_{i,j-1/2}}{\Delta y^2} \right) \right\}. \tag{10}$$

Компоненті (3.57) шектік-айырымдық теңдеудің аналогы ретінде жазуға болады:

$$u^{n+1}_{i+1/2,j} = u^*_{i+1/2,j} + \frac{\Delta t}{\frac{1}{2}\left(\rho^n_{i+1,j} + \rho^n_{i,j}\right)} \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\Delta x}, \tag{11}$$

және

$$v^{n+1}_{i,j+1/2} = v^*_{i,j+1/2} + \frac{\Delta t}{\frac{1}{2}\left(\rho^n_{i,j+1} + \rho^n_{i,j}\right)} \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\Delta y} \tag{12}$$

Пуассон теңдеуін (3.59) аналогы шектік-айырымдық теңдеуі ретінде жазуға болады:

$$\frac{1}{\Delta x^2} \left(\frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\rho^n_{i+1,j} - \rho^n_{i,j}} - \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\rho^n_{i,j} - \rho^n_{i-1,j}} \right) + \frac{1}{\Delta y^2} \left(\frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\rho^n_{i,j+1} - \rho^n_{i,j}} - \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\rho^n_{i,j} - \rho^n_{i,j-1}} \right) =$$

$$= \frac{1}{2\Delta t} \left(\frac{u^*_{i+1/2,j} - u^*_{i-1/2,j}}{\Delta x} - \frac{v^*_{i,j+1/2} - v^*_{i,j-1/2}}{\Delta y} \right) \tag{13}$$

Бұл теңдеудің шешімі алгоритмнің көп уақытты қажет ететін бөлігі болып табылады. Жоғарыда айтылғандай, оны шешу үшін SOR әдісі пайдаланылды. Бұл тәсілді пайдалану үшін (3.66) теңдеуін қайта жазамыз, теңдеудің сол жағындағы $p_{i,j}$ оқшаулау:

$$p_{i,j}^{\alpha+1}=\beta\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{1}{\rho_{i+1,j}^n-\rho_{i,j}^n}-\frac{1}{\rho_{i,j}^n-\rho_{i-1,j}^n}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(\frac{1}{\rho_{i,j+1}^n-\rho_{i,j}^n}-\frac{1}{\rho_{i,j}^n-\rho_{i,j-1}^n}\right)\right]^{-1}$$
$$\left[\frac{1}{\Delta x^2}\left(\frac{p_{i+1,j}^{\alpha}}{\rho_{i+1,j}^n-\rho_{i,j}^n}-\frac{p_{i-1,j}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n-\rho_{i-1,j}^n}\right)+\frac{1}{\Delta y^2}\left(\frac{p_{i,j+1}^{\alpha}}{\rho_{i,j+1}^n-\rho_{i,j}^n}-\frac{p_{i,j-1}^{\alpha+1}}{\rho_{i,j}^n-\rho_{i,j-1}^n}\right)-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\Delta t}\left(\frac{u_{i+1/2,j}^{*}-u_{i-1/2,j}^{*}}{\Delta x}-\frac{v_{i,j+1/2}^{*}-v_{i,j-1/2}^{*}}{\Delta y}\right)\right]+\left(1-\beta\right)p_{i,j}^{\alpha} \tag{14}$$

Формуладағы (3.67) релаксация параметрі $\beta>1.$ жағдайында таңдалуы керек. Себебі әдіс тек $\beta<2$ тұрақты, $\beta=1.2-1.5$ параметрді таңдау әдетте жақсы орнықтылыққа әкеледі және жылдамдығы жинақты болып табылады.

Егер уақыт-қадам жеткілікті аз болса, онда сандық алгоритм тұрақты уақыт қадамының өлшемі теңдеудің бөлігімен шектеледі:

$$\frac{\mu\Delta t}{\rho h^2}\le\frac{1}{4}\quad(\mathbf{u}\cdot\mathbf{u})\frac{\rho\Delta t}{\mu}\le 2\,. \tag{15}$$

мұндағы, h - ең кіші тор ұяшық мөлшері (x немесе y), және u - максималды жылдамдық.

Зерттеу нәтижелері

Сандық алгоритм және эксперименттер. Жоғарыда сипатталған қысым түзету процедурасына сәйкес алынған дискретті теңдеулер келесі ретпен шешіледі:

1. (1) және (2) теңдеулерді қолдана отырып, (3) және (4) теңдеулердің сәйкес мәндерімен сол мерзімдегі уақыт қадамынан жылдамдықтарды табамыз.
2. (5) және (6) теңдеулерді және шекаралық шартарын қолдана отырып қысымды табамыз.
3. (5) және (6) теңдеулерді қолдана отырып жылдамдыққа түзету жүргіземіз.

Араласпайтын сұйықтықтарды беттік фронтын қадағалау. Екі өзара араласпайтын сұйықтық арасындағы бөлудің динамикасын дәл сипаттау үшін, шекарада анықталған полиномды аппроксимациялаймыз (метод Front tracking) [5]. Бұл әдіс салыстырмалы түрде өрескел торларды пайдаланған кезде сұйықтықтың қозғалысын өте дәл анықтауға мүмкіндік береді. Және әдіс келесі түрде жүзеге асырылады.

Екі ортаның арасындағы интерфейс координаттары қандай да бір тәртіпте беріліп, келесі беттің нүктелері арқылы өтеді деп есептейміз:

$$x_f(l)=(x(l),\ y(l)),\quad l=1,\dots,N_f \tag{16}$$

Алдыңғы нүктелерді жылжыту үшін біз жүйелі торда көрсетілген жылдамдық пен тығыздық мәндерін осы түйіндерге интерполяциялаймыз. Интерполяция түрлі жолдармен жасалуы мүмкін, бұл жағдайда біз билинейнарлы интерполяциясын қолданамыз. Біріншіден, жүйелі тордың қозғалыс нүктелеріне жақын түйіндерінде анықталады. Содан кейін, табылған нүктелердің координаттары және жылдамдықты пен тығыздығы мәндері бойынша фронттың нүктелеріндегі белгісіз шамалардың өлшенген мәндері есептеледі:

$$\phi_f^l=\phi_{i,j}\left(\frac{x_{i+1}-x_f}{\Delta x}\right)\left(\frac{y_{i+1}-y_f}{\Delta y}\right)+\phi_{i,j+1}\left(\frac{x_{i+1}-x_f}{\Delta x}\right)\left(\frac{y_f-y_i}{\Delta y}\right)+$$
$$+\phi_{i+1,j}\left(\frac{x_f-x_i}{\Delta x}\right)\left(\frac{y_{i+1}-y_f}{\Delta y}\right)+\phi_{i+1,j+1}\left(\frac{x_f-x_i}{\Delta x}\right)\left(\frac{y_f-y_i}{\Delta y}\right) \tag{17}$$

Мұндағы x_i - x- фронттың сол жағындағы тік жолды тордың нүктесінің координатасы y_j- y-фронттың төменгі жағындағы жатық жолды тордың нүктесінің координатасы, $\phi_{i,j}$- мәні ϕ -дағы тордың сол жағындағы және төменгі жағындағы фронттың белгіленген нүктесі. Кейін фронттың әрбір нүктесінде жылдамдықтың мәнін анықтаймыз, фронт жылжуы мүмкін. Егер біз уақыт бойынша бірінші ретті қарапайым айқын интегралдасақ («алға» айырым), онда фронттың жаңа орналасуы нүктесінің координатасы:

$$\boldsymbol{x}_f^{n+1} = \boldsymbol{x}_f^n + \Delta t \boldsymbol{u}_f^n \,. \tag{18}$$

Беттік керілуін есепке алғанда. Капиллярларда араласпайтын сұйықтықтарды модельдеу кезінде, беттік керілуді ескеру керек, өйткені ол екі ортаның интерфейсінің пішінін қалыптастыруға айтарлықтай әсер етеді. Беттік кернеу күші тек шекараға әрекет етеді және бірлік шекарасының беттік пішінінің мәні келесі формула бойынша беріледі:

$$f_\sigma = \sigma k \mathbf{n} \tag{19}$$

мұндағы σ - беттік керілу коэффициенті, k - шекаралық қисықтық. Екі өлшемді үшін kn мына түрде өрнектеледі:

$$k\mathbf{n} = \frac{\partial t}{\partial s} \tag{20}$$

мұндағы t - бөліктегі беттің жанамасы.

Егер беттік керілу күші фронттың әрбір біртұтас сегментінде көрсетілсе:

$$\delta f_\sigma^l = \sigma \int \frac{\partial t}{\partial s} ds = \sigma \left(t_{l+1/2} - t_{l-1/2} \right) \tag{21}$$

онда бисызықты интерполяция арқылы беттік кернеу күшінің мәндері тұрақты тордың ең жақын түйініне интерполяциялануы мүмкін, онда біз (3.70) формуладан аламыз:

$$\left(f_\sigma \right)_{ij} = \sigma \frac{\delta f_\sigma^l \omega_{ij}^l}{\Delta x \Delta y} \tag{22}$$

Қалыпты торда беттік кернеудің күші бар болса, оны шешілген Стокс теңдеулерінің оң жағына қосуға болады. Шекаралық бөлімді қоспағанда беттік кернеу барлық жерде нөлге тең болғандықтан (22) өрнегін дельта-функцияға $\delta(n)$ көбейту керек:

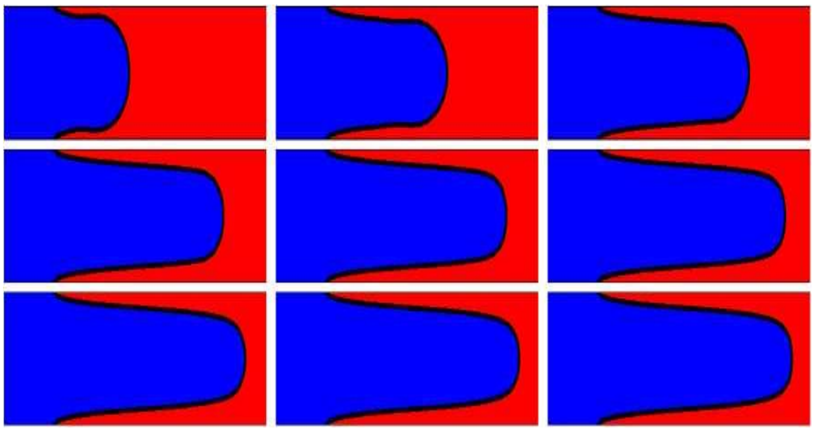
$$\sigma k \mathbf{n} \delta(\mathbf{n}) \tag{23}$$

мұндағы ***n*** – шекарадағы нормаль.

Нәтижелерді талқылау

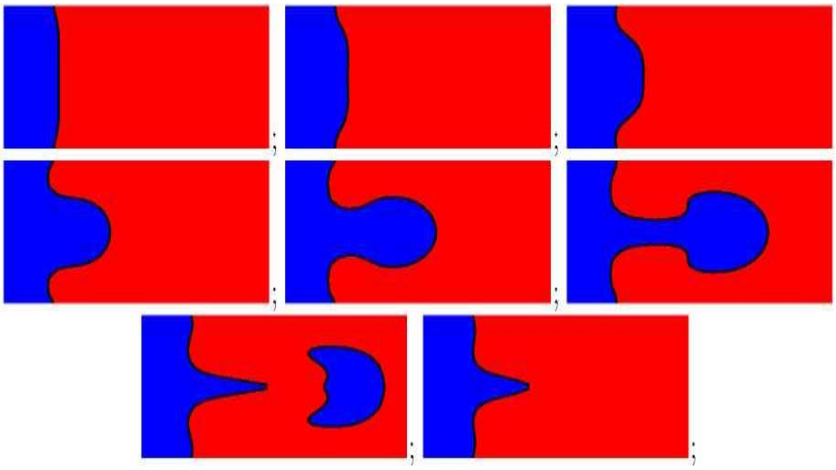
Сандық эксперименттер. *Еркін шекарадағы беттік керілуін ескермегенде ығыстырудың процесі.* Бұл модель үшін екі араласпайтын сұйықтық арасындағы фронттың біртіндеп кеңеюі орын алады, яғни, жабысу шартты орындалады, уақыттың барлық бөлігінде шекара алғашқы контакты араласпайды [6]. Бұл процесс 3-суретте ұсынылған суреттер сериясымен айқын көрінеді.

Еркін шекарадағы беттік керілуін ескергенде ығыстырудың процесі. Жоғарыда аталған процестің айрықша ерекшелігі - еркін шекарасынан бөлінетін тамшылардың қалыптасуы. Жоғарыда келтірілген теориядан келіп түскендей, тамшылардың қалыптасуы үшін капиллярдағы қысым беттік кернеу күштерімен теңестірілмеуі керек.



Сурет 3. Еркін шекарадағы беттік керілуін ескермегенде ығыстырудың процесі (фронттың созылу уақытың біркелкі созылуына назар аударамыз)

Осылайша, қысымның шекті мәні бар, оның асып кетуі фронттының «серпілісіне» алып келеді. Бұл белгілі қысымға жеткенде және асып кеткенде тамшы бөлініп шығады, одан кейін сұйықтықтың қайтадан қозғалысы келесі тамшыларды қайталайды [7]. Процесс ағымы 4 суреттегі суреттер сериясымен ұсынылған.



Сурет 4. Еркін шекарадағы беттік керілуін ескергенде ығыстырудың процесі

Фронттан шығып келе жатқан тамшылардың қалыптасуы уақыттың артуымен және кейінгі түзілуімен, келесі тамшылардың қалыптасуына дейін жалғасуда [8].

Қорытынды

Қабырғалары қатты тікбұрышты капиллярдағы екі фазалық ағынның сандық өлшемді гомогенизациялау екі типтік тұжырымға тән ерекшеліктерін - еркін шекарада және онсыз беткі кернеу болған жағдайда анықтауға мүмкіндік берді. Беткі кернеу болмаған кезде араласатын аймақ пайда болады [9], суқанықтылығы тұрақты түрде бірден нөлге дейін төмендейді. Беттік кернеу болған жағдайда, екі ағым режимі мүмкін: егер босатылған сұйықтықтың қысымы беттік керілу арқылы теңдестірілген болса, еркін шекара стационар болады; қысымның күшеюі режимі босатылған сұйық тамшылардың бос шекарасынан бөлініп, капилляр бойымен оларды одан әрі тарату арқылы жүзеге асырылады. Демек, мұнда кеңейтілген араластыру аймағы пайда болады, бірақ суқанықтылығымен еркін шекарасынан бөлініп шыққан тамшылармен анықталады. Сонымен бірге, Маскет және Баклей - Леверетт модельдері арқылы бірдей геометрия үшін алынатын аналитикалық шешімдер мүлдем басқа ағынды құрылымды береді, бұл олардың физикалық дұрыстығына қатысты үлкен күмән тудырады [10].

Жұмыс ҚР ҒЖБМ ҒК №AP09261179 жобасын гранттық қаржыландыру есебінен орындалды.

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. - 1986.- Vol. 51, № 4.- P. 889-901.

2 Самарский А. А. Введение в теорию разностных схем. - М.: Наука, 1971. - 552 с.

3 John B Bell, Phillip Colella, Harland M Glaz. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations // Journal of Computational Physics. - 1989. - Vol. 85, № 2.- P. 257-283.

4 Шияпов К.М. Өзара араласпайтын сығылмайтын сұйықтықтың қозғалысың сандық шешу // Вестник КазНПУ им. Абая Сирия «Физико-математические науки» - 2015. - №3(51), -С.128-133.

5 Salih Ozen Unverdi, Gretar Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // Journal of Computational Physics. – 1992. - Vol. 100, № 1. – P. 25-37.

6 Шияпов К.М. Численные моделирование процесса вытеснение нефти водой в капилляре // Материалы международной конференции Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы» - Воронеж: Издательский дом ВГУ, 2015. - С.157-158.

7 Shiyapov K. The oil-to-water displacement in porous media with and without surface tension: classical models and 1d numerical upscaling // Innovative development in Oil and Gas industy: proceedings of the VII International and practical conference. – Almaty, 2015 - P. 311-314.

8 Шияпов К. О совместном движении двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в пороупругой среде // Вестник Серия «Физико-математические науки». -2016. -№4 (56) .- С.103 - 109.

9 Шияпов К.М. Две несмешивающиеся жидкости, разделенные поверхностью контакта без поверхностного натяжения // Материалы Международной научно-методической конференции «Математика в Казахстане - прошлое и перспективы», посвященной 100-летию Ибрашева Хасана Ибрашевича. -Алматы, 2016. - С. 110-112.

10 Шияпов К.М. Вытеснение нефти водой в капилляре // Материалы 53-й Международной научной студенческой конференции МНСК-2015: Математика. - Новосибирск: Новосиб.гос.ун-т, 2015. - С. 98.

11 Геологиялық терминологиялық сөздік. - Алматы: Ғылым, 2004. - 450 б.

12 Математикалық терминдер мен сөз тіркестерінің орысша-қазақша сөздігі. - Астана, 2011. - 240 б.

References:

1 Virieux J. P-SV wave propagation in heterogeneous media: velocity-stress finite-difference method // Geophysics. - 1986.- Vol. 51, № 4.- P. 889-901.

2 Samarsky A. A. Introduction to the theory of difference schemes. - M.: Nauka, 1971. - 552 p. (In Russian)

3 John B Bell, Phillip Colella, Harland M Glaz. A second-order projection method for the incompressible navier-stokes equations // Journal of Computational Physics. - 1989. - Vol. 85, № 2.- P. 257-283.

4 Shiyapov K.M. Numerical solution of motion of immiscible incompressible fluid // Bulletin of KazNPU Syries of Physics & Mathematical Sciences - 2015. - №3(51), -P.128-133. (In Kazakh)

5 Salih Ozen Unverdi, Gretar Tryggvason. A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows // Journal of Computational Physics. – 1992. - Vol. 100, № 1. – P. 25-37.

6 Shiyapov K.M. Numerical modeling of the process of displacement of oil by water in the capillary // Materials of the international conference of the Voronezh Winter Mathematical School "Modern methods of the theory of functions and related problems" - Voronezh: Izdatelsky dom VGU,2015. - P.157-158. (In Russian)

7 Shiyapov K.M. The oil-to-water displacement in porous media with and without surface tension: classical models and 1d numerical upscaling // Innovative development in Oil and Gas industy: proceedings of the VII International and practical conference. – Almaty, 2015 - P. 311-314.

8 Shiyapov K.M. On the joint movement of two immiscible incompressible liquids in a porous medium// Bulletin of KazNPU Syries of Physics & Mathematical Sciences. -2016. -№4 (56) .- P.103 - 109. (In Russian)

9 Shiyapov K.M. Two immiscible liquids separated by a contact surface without surface tension // Materials of the International Scientific and Methodological Conference "Mathematics in Kazakhstan - Past and Prospects", devoted to the 100th anniversary of Ibrashev Hasan Ibrashevich. - Almaty, 2016. - P. 110-112. (In Russian)

10 Shiyapov K.M. Displacement of oil by water in the capillary // Materials of the 53rd International Scientific Student Conference MNSK-2015: Mathematics. - Novosibirsk: Novosib State University,2015. -P. 98. (In Russian)

11 Geological terminological dictionary. - Almaty: Gylym, 2004. - 450 p. (In Kazakh)

12 Russian-Kazakh dictionary of mathematical terms and phrases. - Astana, 2011. - 240 p. (In Kazakh)