МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2023.84.4.005

Н.Ж. Утеуова[1], К.М. Шияпов[1], А.У. Бекбауова[2], Б.Д. Шарипова[3]*

[1]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан
[2]Актюбинский региональный университет им.К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан
[3]Алматинский технологический университет, г.Алматы, Казахстан
[*]e-mail: nurgulzh@gmail.com

РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ПРИБЛИЖЕННЫМ МЕТОДОМ

Аннотация

Решение нелинейных краевых задач обычно строится с помощью различных итерационных методов, основанных на известных методах последовательных приближений. Выбор метода неоднозначен, он зависит и от характера самой краевой задачи, вида входящих в нее дифференциальных уравнений, степени нелинейности, и от возможностей используемой для решения компьютеров. В этой связи получили развитие различные подходы к решению нелинейных краевых задач. Среди них известны проекционные и вариационные методы типа методов Бубнова и Ритца, методы конечных разностей и конечных элементов. В настоящей работе предлагается новый итерационный метод решения абстрактного нелинейного уравнения $A(u)=f$, сходящийся при любом значении начального приближения, где оператор $A(u)$ – не обязательно сжимающий. Таким образом, разработан приближенный вариационный метод решения нелинейных краевых задач. Доказывается сходимость метода. Теоретическое изложение эффективности метода подтверждается численными экспериментами.

Ключевые слова: приближенный метод, нелинейные краевые задачи, итерационный метод, вариационный метод, операторное уравнение, априорная оценка, сходимость, скорость сходимости.

Н.Ж. Утеуова[1], К.М. Шияпов[1], А.У. Бекбауова[2], Б.Д. Шарипова[3]
[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан
[3]Алматы технологиялық университеті, Алматы қ., Қазақстан

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІ ЖУЫҚТАУ ӘДІСІМЕН ШЕШУ

Аңдатпа

Сызықты емес шеттік есептерді шешу әдетте біртіндеп жуықтаулардың белгілі әдістеріне негізделген әртүрлі итерациялық әдістерді қолдану көмегімен құрылады. Әдісті таңдау бір мәнді емес, ол шеттік есептің сипатына, оған кіретін дифференциалдық теңдеулердің түріне, сызықты еместік дәрежесіне және оны шешу үшін қолданылатын компьютердің мүмкіндіктеріне байланысты. Осыған байланысты сызықты емес шеттік есептерді шешудің әртүрлі тәсілдері дамыды. Олардың ішінде Бубнов және Ритц әдістері, ақырлы айырымдар және ақырлы элементтер әдістері сияқты проекциялық және вариациялық әдістер белгілі. Бұл жұмыста бастапқы жуықтаудың кез келген мәнінде жинақталатын, абстрактілі, сызықты емес $A(u)=f$ теңдеуін шешудің жаңа итерациялық әдісі ұсынылады, мұндағы $A(u)$ – қысылуы міндетті емес оператор. Осылайша, сызықты емес шекаралық есептерді шешудің жуықталған вариациялық әдісі жасалды. Әдістің жинақтылығы дәлелденеді. Әдістің тиімділігінің теориялық мазмұндалуы сандық тәжірибелермен расталады.

Түйін сөздер: жуықтау әдісі, сызықты емес шеттік есептер, итерациялық әдіс, вариациялық әдіс, операторлық теңдеу, априорлық баға, жинақтылық, жинақтылық жылдамдығы.

N.Zh. Uteuova [1], K.M. Shiyapov [1], A.U. Bekbauova [2], B.D. Sharipova [3]*
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakstan
[2]Aktobe Regional University named after K.Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan
[3]Almaty Technological University, Almaty, Kazakstan

SOLVING NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS BY THE APPROXIMATE METHOD

Abstract

The solution of nonlinear boundary value problems is usually constructed using various iterative methods based on well-known methods of successive approximations. The choice of the method is ambiguous, it depends on the nature of the boundary value problem itself, the type of differential equations included in it, the degree of nonlinearity, and the capabilities of computers used to solve it. In this regard, various approaches to solving nonlinear boundary value problems have been developed. Among them, projection and variational methods such as Bubnov and Ritz methods, the method of finite differences and the method of finite elements are known. In this paper is proposed a new iterative method for solving the abstract nonlinear equation *A(u)=f*, which converges for any value of the initial approximation, where the operator *A(u)* is not necessarily contractive. Thus, an approximate variational method for solving nonlinear boundary value problems has been developed. The convergence of the method is proved. The theoretical presentation of the effectiveness of the method is confirmed by numerical experiments.

Keywords: approximate method, nonlinear boundary value problems, iterative method, variational method, operator equation, a priori estimate, convergence, convergence rate.

Введение

Исследование при помощи компьютера различных процессов и явлений прочно вошло в современную жизнь. Задачи из самых разных областей науки и техники невозможно решить без помощи компьютера. Сложные задачи механики, архитектуры, физики, химии, биологии успешно решаются при помощи компьютерного (математического) моделирования. Математические модели сложных задач науки и техники сводятся обычно к системам нелинейных начально-краевых задач, а их решение на ЭВМ позволяет изучить механизм протекания процесса, произвести расчёт и оптимизацию аппарата. Известны многочисленные методы приближенных решений краевых задач для дифференциальных уравнений [1-8]. В данной работе продолжается исследование предложенного нового метода приближенного решения нелинейных краевых задач [9-10].

Методология и результаты исследования

Рассматриваем нелинейное уравнение:

$$A(u) = f \in H, \;\; u \in H \tag{1}$$

в банаховом пространстве H. Предполагаем, что

$$A(0) = 0 \text{ и из } |A(u)| \le C < \infty \text{ вытекает } |u| \le C_1, \tag{2}$$

где C_1 - зависит только от C константы. Здесь $|\cdot|$ - и в дальнейшем норма элемента или модуль скаляра. Условие (2) означает наличие априорной оценки. Помимо (2) полагаем на $A(\cdot)$ следующие ограничения:

$$|A(u+\upsilon) - A(u) - B(u)\upsilon| \le C_2(|u|, |\upsilon|)|\upsilon|^2, \tag{3}$$

при $|\upsilon|, |u| \le d < \infty$,

где $B(u)$ - линейный непрерывный при каждом $u \in H$ оператор (производная по Гато преобразования по A в точке $u \in H$), $C_2(|u|, |\upsilon|)$- ограниченная, монотонно не убывающая (по каждому аргументу), непрерывная функция. Условие (3) означает наличие для $A(\cdot)$ разложение Тейлора до первого порядка малости и наличие оценки для остаточного члена.

Условия типа (3) легко проверяются и выполняются. Будем использовать предположение, что оператор обратим и

$$\left|B^{-1}(u)\right| \le C_3(|u|), \tag{4}$$

здесь $\left|B^{-1}(u)\right|$ - операторная норма.

Сведем решение (1) к линейным задачам. Пусть u_0 - начальное приближение решения (1). Следующее приближение ищем в виде

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon \upsilon_n .$$

Из (3) получаем

$$A(u_{n+1}) - f = A(u_n) - f + \varepsilon_n B(u_n)\upsilon_n + \varepsilon_n^2 |\upsilon_n|^2 \breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n), \tag{5}$$

где $\breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n)$ при $\varepsilon_n \in [-1,1]$ удовлетворяет оценке

$$\breve{C}(u_n, \upsilon_n, \varepsilon_n) \le C_2(|u_n|, |\upsilon_n|) < \infty . \tag{6}$$

Обозначим $A(u_n) - f = S_n$ и возьмем υ_n из равенства

$$B(u_n)\upsilon_n = A(u_n) - f .$$

В силу обратимости (4) последнее равенство возможно. Тогда из (5) и (6) получаем

$$|S_{n+1}| \le |S_n|(1 + \varepsilon + \varepsilon^2 a_n^2), \tag{7}$$

где a_n^2 - любое число, удовлетворяющее неравенство

$$a_n^2 \ge \frac{\left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|^2}{|S_n|} C_2(|u_n|, |\upsilon_n|). \tag{8}$$

Минимум правой части (7) по $\varepsilon_n \in [-1,1]$ достигается в точке

$$\varepsilon_n = -\frac{1}{2a_n^2}, \quad \text{если } \frac{1}{2a_n^2} < 1; \qquad \varepsilon_n = -1, \quad \text{если } \frac{1}{2a_n^2} \ge 1. \tag{9}$$

При этом значении ε_n из (7) вытекает

Лемма 1. Для *n*=0,1,2, … полагаем

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon_n B^{-1}(u_n)S_n, \quad S_n = A(u_n) - f, \tag{10}$$

где ε_n определяется из (9). Здесь a_n^2 - любое число, такое, что

$$a_n^2 \ge |S_n| \left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|^2 C_2(|u_n|, \left|B^{-1}(\upsilon_n)S_n\right|). \tag{11}$$

Тогда

$$| S_{n+1} | \leq \begin{cases} |S_n| \left(1 - \dfrac{1}{4a_n^2}\right), & \text{если } \dfrac{1}{2a_n^2} < 1; \\ |S_n| a_n^2, & \text{если } \dfrac{1}{2a_n^2} \geq 1. \end{cases}$$

Из леммы 1 следует, что построенная по лемме последовательность S_n по норме монотонно убывает. Следовательно, из условия (2) получаем, что

$$|u_n| \leq C_1(\| S_n\|) \leq C_1(\| S_0\|) < \infty . \tag{12}$$

Отсюда и из условия (4) вытекает

$$\left|B^{-1}(u_n)\right| \leq C_3(\| S_0\|) < \infty . \tag{13}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \tilde{a}_n^2 &\equiv |S_n|^{-1} \left|B^{-1}(u_n) S_n\right|^2 C_2\left(|u_n|, \left|B^{-1}(u_n) S_n\right|\right) \leq \\ &\leq \left|B^{-1}(u_n)\right| C\left(|u_n|, \left|B^{-1}(u_n) S_n\right|\right) \leq |S_n| C_4(|u_0|). \end{aligned} \tag{14}$$

Из этого неравенства вытекает

Лемма 2. Предположим, что выполнены условия (2)-(4). Пусть u_0 - любой элемент из *H*, который берет за начальное приближение решение уравнения (1). Тогда для чисел $a_n^2 = |S_n| C_4(|u_0|)$ выполняются неравенства (11).

Из этой и предыдущей леммы получаем, если в качестве a_n^2 выбрать числа $|S_n| C_4(|u_0|)$, то

$$|S_{n+1}| \leq \begin{cases} |S_n| (1 - \dfrac{1}{4|S_n| C_4(|u_0|)}, & \text{если } 2S_n C_4(|u_0|) > 1; \\ S_n C_4(|u_0|), & \text{если } 2S_n C_4(|u_0|) \leq 1. \end{cases}$$

Введем обозначение:

$$\breve{S}_n = C_4(|u_0|) |S_n|. \tag{15}$$

Тогда полученные для $|S_n|$ оценки дают

$$\breve{S}_{n+1} \leq \begin{cases} \breve{S}_n \left(1 - \dfrac{1}{4\breve{S}_n}\right), & \text{если } \breve{S}_n > 0{,}5; \\ \breve{S}_n^2, & \text{если } \breve{S}_n \leq 0{,}5. \end{cases} \tag{16}$$

Из (16) вытекает, что при $n \geq [4\breve{S}_0] - 1$ невязка $\breve{S}_n$ будет не больше 0,5. Поэтому максимальное натуральное число n_0, для которого $\breve{S}_{n_0} > 0{,}5$, допускает оценку

$$n_0 \leq [4\breve{S}_0] - 1. \tag{17}$$

Для n, больших n_0, мы из (16) получаем оценку

$$\breve{S}_{n+1} \leq \breve{S}_n^2, \quad \breve{S}_n^2 \leq \frac{1}{4}, \quad n_0 \leq n .$$

Отсюда

$$\breve{S}_{n_0+k} \le \breve{S}_{n_0}^{2k} \le 2^{-2^k}, \quad k = 1,2,\dots \,. \tag{18}$$

Воспользуемся оценкой (18) и выводим

$$\left| u_{n_0+k} - u_{n_0+k_1} \right| \le C_5 (\|u_0\|) 2^{-2^{k-k_1}} .$$

Это неравенство дает скорость сходимости к решению (1), ибо H - полно.

Полученные выше результаты приводят к

Теореме 1. Предположим, что выполняются условия (2)-(4). Тогда решение уравнения (1) существует. Пусть u_0 - любой элемент из H. Тогда существует число $C_4 > 0$ такое, что для $\{u_n\}_0^\infty$, построенных по рекуррентным формулам (10), где справедливы неравенства (9) и

$$a_n^2 = |S_n| C_4, \quad n = 0,1,2,\dots$$

Справедливы следующие утверждения:

а) u_n при $n \to \infty$ стремится к решению u уравнения $A(u) - f = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} |S_n| = \lim\limits_{n\to\infty} |A(u_n) - f| = 0$;

б) число $|S_n| = |A(u_n) - f| = 0$ стремится к нулю монотонно и при $n > n_0$ справедлива оценка (18).

Замечание 1. При численной реализации алгоритма, вытекающего из теоремы, вычисление $B^{-1}(u_n)S_n$ по всей вероятности является наиболее нелегким моментом. Но его невозможно избежать. Нахождение этого элемента дается решением линейного уравнения

$$B(u_n)\upsilon_n = S_n . \tag{19}$$

При этом υ_n будет равно $B^{-1}(u_n)S_n$.

Если нелинейное уравнение (1) хотим решить с точностью h>0, то из теоремы следует, что необходимо решить $m(h)$ линейных уравнений (19). При этом $m(h) = 0(\ln\ln(1/h))$. Выбор чисел ε_n связан с вычислением $|S_n|$ и значением C_4. Для оценки числа C_4 нужна оценка сверху нормы $B^{-1}(u_n)$. Нахождение близких к истинному значению оценок для C_4 требует в конкретных случаях умение проделать изощренные оценки. Но получить такую оценку не всегда удается. Имея в виду эти соображения, мы предлагаем более простой способ выбора в ниже следующем:

Замечание 2. Счет по рекуррентным формулам

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon_n B^{-1}(u_n)S_n$$

начинаем с любым $\varepsilon_0 \in [-1;1]$. Предположим, что выбрано $\varepsilon_n \in [-1;1]$ и вычислено u_{n+1}.

Вычислим

$$\begin{aligned} u_{n+2,1} &= u_{n+1} + \frac{1}{2}\varepsilon_n B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}, \\ u_{n+2,0} &= u_{n+1} + \varepsilon_n B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}, \\ u_{n+2,-1} &= u_{n+1} - \min(1,-2\varepsilon_n) B^{-1}(u_{n+1})S_{n+1}. \end{aligned} \tag{20}$$

Введем обозначения: $\varepsilon_{n+1,1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1,0} = \varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1,-1} = \min\{1,-2\varepsilon_n\}$.

Вычисляем

$$\alpha_1 = \left|S_{n+2,1}(u_{n+2,1})\right|, \quad \alpha_0 = \left|S_{n+2,0}(u_{n+2,0})\right|, \quad \alpha_{-1} = \left|S_{n+2,-1}(u_{n+2,-1})\right| .$$

Пусть $\alpha_1 \le \alpha_0 \le \alpha_{-1}$. Если $\alpha_1 \le \alpha_0$, то за ε_{n+1} возьмем $\varepsilon_{n+1,1}$.

Если же $\alpha_1 = \alpha_0 \le \alpha_{-1}$, то за ε_{n+1} возьмем число $min\{\varepsilon_{n+1,1};\varepsilon_{n+1,0}\}$.

Если $\alpha_1 = \alpha_0 = \alpha_{-1}$, то полагаем $\varepsilon_{n+1} = \min\{\varepsilon_{n+1,1};\varepsilon_{n+1,0};\varepsilon_{n+1,-1}\}$.

Можно легко доказывать, что при таком выборе ε_n, последовательность u_n при $n \to \infty$ сходится к решению u уравнения $A(u) = f$, причем при $n \ge n_0$ выполняются оценки

$$|S_n| \le C_8 2^{-2^{n-n_0}}, \quad |u_n - u| \le C_9 \cdot 2^{-2^{n-n_0}},$$

где C_8, C_9 и n_0 - постоянные числа.

Замечание 3. Пусть $\left|B^{-1}(u_n) - \widetilde{B}(u_n)\right| \le C_{10}\varepsilon$, где $\widetilde{B}(u_n)$ - некоторый легко вычислимый оператор, то есть, будем предполагать, что $B^{-1}(u_n)$ вычисляется с точностью $C_{10}\varepsilon$ по операторной норме. Тогда получаем

$$|S_{n+1}| \le |S_n + \varepsilon S_n| + C_{10}\varepsilon^2 \left|\varepsilon\widetilde{B}(u_n)\right||S_n| + \varepsilon^2 \left|\widetilde{B}S_n\right|^2 C\left(|u_n|, \left|\widetilde{B}S_n\right|\right).$$

При выполнении условий (2)-(4) это неравенство приводит к неравенству (9), но с другим a_n. Таким образом, результат теоремы 1 устойчив относительно ошибок вычислений $B^{-1}(u_n)S_n$.

Существенно легко вычисляется оператор $B^*(u_n)$ - оператор сопряженный к $B(u)$, по сравнению с вычислением $B^{-1}(u_n)$. Считаем, что H - гильбертово пространство и предположим, что выполнены условия (2), (3), а условие (43) заменим следующим

$$\gamma_0(|u|) \le B(u)B^*(u) \le \gamma_1(|u|), \tag{21}$$

где $\gamma_i(|u|)$, $i = 0,1,$ - непрерывные положительные функции, $\gamma_1(|u|)$ монотонно не убывает, $\gamma_0(|u|)$ - не возрастает. Если выполняется (4), то нижняя оценка (21) также выполняется.

Пусть u_n - произвольный элемент *H*, которого возьмем в качестве начального приближения решения уравнения (1) *A*(*u*)=*f*. Оценим $A(u_n + \varepsilon\upsilon_n)$, $\varepsilon \in [-1;0)$, где за υ_n берем

$$\upsilon_n = B^*(u_n)\big(A(u_n) - f\big) = B^*(u_n)S_n. \tag{22}$$

Имеем

$$|S_{n+1}| = A(u_n + \varepsilon\upsilon_n) - f \le |S_n|\left[1 + \varepsilon\gamma_1 + \varepsilon^2 \frac{|B^*(u_n)S_n|^2}{|S_n|} C\left(|u_n|, |B^*(u_n)S_n|\right)\right].$$

Минимизируя правую часть по ε получаем, что при

$$\varepsilon = \min\left\{\gamma_1^{-1}, \frac{|S_n|\gamma_0}{2|B^*S_n|^2 C\left(|u_n|, |B^*S_n|\right)}\right\}$$

выполняется следующее неравенство:

$$|S_{n+1}| \le |S_n|\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\gamma_0\right).$$

Исходя из последних двух оценок получаем

Теорему 2. Предположим, что выполнены условия (2), (3) и (21). Пусть u_0 - начальное приближение к решению u уравнения $A(u) - f = 0$. Существует число $\varepsilon_0 \in (-1;0)$ такое, что построенные по рекуррентным формулам

$$u_{n+1} = u_n + \varepsilon B^*(u_n)S_n, \quad S_n = A(u_n) - f,$$

сходятся к решению уравнения $A(u) = f$ и справедлива оценка

$$|S_n| \le \delta^n, \qquad |u_n - u| \le C_{11}\delta^n.$$

Скорость сходимости в этой теореме значительно хуже, чем в теореме 1. Но по этим рекуррентным формулам вычислять значительно проще.

Предлагаем примеры, рассмотренные для тестовой проверки этих приближенных методов решения нелинейных краевых задач.

1) Рассмотрим задачу

$$Ay=f$$

в отрезке [0;1], в $C[0,1]$.

В частности, можно ее представить в следующем виде:

$$\begin{cases} y'' - y^3 = f, \\ y(0) = y'(1) = 0, \end{cases}$$

где $y = \cos \pi x - 1$ является точным решением. В операторном виде задачу можно записать как

$$Ay = y - \int_0^x (x-t)y^3(t)dt.$$

Тогда в силу

$$A(y+\upsilon) - Ay = \upsilon - \int_0^x (x-t)[(y+\upsilon)^3 - y^3]dt,$$

при $|\upsilon|_{C[0,1]}, \ |y|_{C[0,1]} \le 1$ имеем

$$\left| A(y+\upsilon) - Ay + 3\int_0^x (x-t)y^2(t)\upsilon(t)dt \right|_{C[0,1]} =$$

$$= \left| \upsilon - \int_0^x (x-t)[(3y\upsilon^2 + \upsilon^3)dt \right| \le C(y)\left(|\upsilon|_C^2 + |\upsilon|_C^3 \right)$$

В качестве $B(y)\upsilon$ возьмем

$$B(y)\upsilon = -3\int_0^x (x-t)y^2(t)\upsilon(t)dt.$$

По вышеизложенной методике находим приближенное решение y. Вычислительный эксперимент показал хорошую сходимость метода, отсюда следует, что его применение во многих задачах математической физики поможет быстро и надежно найти искомое решение.

2) Известно, что многие физические явления описываются дифференциальными уравнениями четвертого порядка, примером которых, может служить уравнения колебания. При решении дифференциальных уравнений четвертого порядка часто получают характеристические уравнения на порядок ниже, т.е. уравнения третьего порядка. Численное решение уравнений третьего порядка имеет некоторые сложности, особенно, если корни и коэффициенты уравнения являются комплексными числами. В связи с этим нами рассмотрено следующее уравнение третьего порядка:

а) $y^3 + 0{,}3y^2 - 1{,}54y = 0{,}312$, точные решения которого $y = 1{,}2;\quad y = -0{,}2;\quad y = -1{,}3.$ Для решения этого уравнения используем выше предлагаемый нами приближенный метод. Тогда

$$B(y)\upsilon = (3y^2 + 0{,}6y - 1{,}54)\upsilon.$$

Численная реализация задачи показала эффективность предложенного нового метода: наблюдалась быстрая и точная сходимость решений, особенно когда в качестве υ_n возьмем $B^{-1}(y_n)S_n$. Результаты вычислений приведены в таблице №1.

Таблица №1

Начальное приближение	y_0	*-500*	*-50*	*-5*	*-1*	*-0,1*	*0*	*0,1*	*1*	*5*	*50*	*500*
Точность	ε	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}	10^{-12}
Число итерации	*N*	*27*	*21*	*15*	*11*	*12*	*11*	*11*	*12*	*15*	*22*	*26*

б) Рассмотрим уравнение третьего порядка с комплексными переменными в обобщенном виде

$$r_1u^3 + r_2u^2 + r_3u = r_4,$$

где

$$u = x + yi,\quad r_j = p_j + q_ji,\quad p, q \in R,\quad j = 1,\dots,4.$$

В этом случае в качестве оператора *B(u)* берем

$$B(u)\upsilon = [3r_1u^2 + 2r_2u + r_3]\upsilon.$$

Получены следующие результаты при численной реализации задачи (см. таблицу №2).

Таблица №2

Коэффициенты, rj (r_j= p_j+ $q_j i$, j=1,2,3,4)		*Точные решения, u_k (u_k=x_k+y_k, k=1,2,3*		*Начальное приближение, u_0*		*Точность, ε*		*Число итерации, N*	
r_1	r_2	r_3	r_4	u_1	u_2	u_3	u_0	ε	**N**
1	*-3-3i*	*6i*	*2-2i*	*1+i*	*1+i*	*1+i*	*1,5+4i*	10^{-4}	*32*
1	*-3-4i*	*-2+8i*	*4-2i*	*1+i*	*1+i*	*1+2i*	*1,5+4i*	10^{-12}	*15*
1	*6+3i*	*9+12i*	*2+11i*	*-2-2i*	*-2-i*	*-1-i*	*1,5+4i*	10^{-3}	*44*
1	*-3-6i*	*-9+12i*	*11+2i*	*1+i*	*1+2i*	*2+2i*	*1,5+4i*	10^{-3}	*29*
1	*-3-6i*	*-8+12i*	*10*	*1+i*	*1+3i*	*2+i*	*1,5+4i*	10^{-12}	*13*

Из таблицы №2 можно заметить, что применение предлагаемого нами приближенного метода для численного решения данной задачи предоставило нам всего за малое число итерации получить приближенные решения с высокой точностью.

Заключение

Вышеизложенные вычислительные эксперименты, рассмотренные для тестовой проверки предложенного приближенного метода решения нелинейных краевых задач, показали эффективность метода: наблюдалась быстрая и точная сходимость решений. Следовательно, теоретическое изложение эффективности метода вполне доказывается в практическом применении. Таким образом, его применение во многих задачах математической физики поможет быстро и надежно найти искомое решение.

Список использованной литературы

1 Дьяконов Е.Г. Минимизация вычислительной работы. – М., Наука, 1989, 272 с.

2 Самарский А.А. Теория разностных схем. – М., Наука, 1983, 153 с.

3 Самарский А.А., Лазарев Р.Д., Макаров В.Л. Разностные схемы для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями. – М., Высшая школа, 1987, 296 с.

4 Ramm A. G. A numerical method for solving nonlinear problems.// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Singapore, Vol. 09, No. 02, 1999, pp. 325-335.

5 Shin'ichi Oishi. Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations. //Journal of Computational and Applied Mathematics, Netherlands, Volume 60, Issues 1–2, 20 June 1995, Pages 171-185.

6 Boikov, I V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations // Differential Equations, New York, 2012, Vol. 48, No. 9, pp. 1288–1295.

7 Etienne Emmrich. External approximation of nonlinear operator equations // Numerical Functional Analysis and Optimization, London, 2009, 30(5–6):486–498.

8 C. E. Chidume, H. Zegeye. Approximation methods for nonlinear operator equations // Proceedings of the American Mathematical Society, Washington, 131 (2003), 2467-2478.

9 Мухамбетжанов А.Т., Отелбаев М.О., Смагулов Ш.С. // Об одном приближенном методе решения нелинейных краевых задач. Препринт №21, ИА РК, Алматы, 1997, 34 с.

10 Отелбаев М.О., Рысбайулы Б. Приближенный метод решения нелинейных операторных уравнений: итерационный процесс, оценка скорости сходимости // Алматы: ДАН РК.- №5. 1999. –с.20-22.

References:

1 D'jakonov E.G. (1989) Minimizacija vychislitel'noj raboty [Minimizing computational work]. M., Nauka, 272 s. (in Russian)

2 Samarskij A.A. (1983) Teorija raznostnyh shem. [Theory of difference schemes] M., Nauka, 153 s. (in Russian)

3 Samarskij A.A., Lazarev R.D., Makarov V.L. (1987) Raznostnye shemy dlja differencial'nyh uravnenij s obobshhennymi reshenijami. [Difference schemes for differential equations with generalized solutions] M., Vysshaja shkola, , 296 s. (in Russian)

4 Ramm A. G. A numerical method for solving nonlinear problems.// Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Singapore, Vol. 09, No. 02, 1999, pp. 325-335. (in English)

5 Shin'ichi Oishi. Numerical verification of existence and inclusion of solutions for nonlinear operator equations. //Journal of Computational and Applied Mathematics, Netherlands, Volume 60, Issues 1–2, 20 June 1995, Pages 171-185. (in English)

6 Boikov, I V. On a continuous method for solving nonlinear operator equations // Differential Equations, New York, 2012, Vol. 48, No. 9, pp. 1288–1295. (in English)

7 Etienne Emmrich. External approximation of nonlinear operator equations // Numerical Functional Analysis and Optimization, London, 2009, 30(5–6):486–498. (in English)

8 C. E. Chidume, H. Zegeye. Approximation methods for nonlinear operator equations // Proceedings of the American Mathematical Society, Washington, 131 (2003), 2467-2478. (in English)

9 Muhambetzhanov A.T., Otelbaev M.O., Smagulov Sh.S. (1997) Ob odnom priblizhennom metode reshenija nelinejnyh kraevyh zadach. [On one approximate method for solving nonlinear boundary value problems.] Preprint №21, IA RK, Almaty, 34 s. (in Russian)

10 Otelbaev M.O., Rysbajuly B. (1999) Priblizhennyj metod reshenija nelinejnyh operatornyh uravnenij: iteracionnyj process, ocenka skorosti shodimosti [Approximate method for solving nonlinear operator equations: iterative process, estimation of convergence rate] Almaty: DAN RK.- №5. – 1999. – s.20-22. (in Russian)