

И.Б. Шмигирилова

*Северо-Казахстанский университет им. М. Козыбаева, г. Петропавловск, Казахстан
e-mail: irinankzu@mail.ru

ГОТОВНОСТЬ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ РЕШАТЬ ЗАДАЧИ РАЗЛИЧНЫМИ СПОСОБАМИ

Аннотация

Поиски различных способов решения задачи, критическая их оценка с целью определения наиболее рациональных позволяют раскрывать богатые возможности математики, являются важным фактором развития математического мышления студентов и тех качеств, которые будут востребованы в их профессиональной деятельности. Цель статьи – исследовать готовность будущих учителей математики к решению задач различными методами или способами и определить возможности вузовского обучения в развитии знаний и умений студентов, определяющих эту готовность. Эмпирические данные, полученные в ходе исследования и представленные в работе, доказывают, что готовность студентов первого курса к использованию разных стратегий для решения одной и той же задачи достаточно низкая, но повышается к четвертому году вузовского обучения за счет более углубленного освоения курса школьной математики и проведению занятий, где будущие учителя непосредственно включаются в поиск различных способов и методов решения задач.

Ключевые слова: математическая задача, методы решения задач, подготовка учителей математики, обучение математике.

Аңдатпа

И.Б. Шмигирилова

М. Қозыбаев атындағы Солтүстік Қазақстан университеті, Петропавл қ., Қазақстан,
**БОЛАШАҚ МАТЕМАТИКА МҰҒАЛІМДЕРІНІҢ ЕСЕПТЕРДІ ТҮРЛІ ТҮСІЛДЕРМЕН
ШЕШУ ДАЙЫНДЫҒЫ**

Есепті шешудің әртүрлі жолдарын іздестіру, олардың ең ұтымдысын анықтау үшін оларды сыни бағалау математиканың бай мүмкіндіктерін ашуға мүмкіндік береді және оқушылардың математикалық ойлауын дамытудың маңызды факторы болып табылады, бұл олардың кәсіби қызметінде сұраныс үшін қажет болады. Мақаланың мақсаты – болашақ математика мұғалімдерінің әртүрлі әдістерді немесе тәсілдерді қолдана отырып есептерді шешуге дайындығын зерттеу және осы дайындықты анықтайтын студенттердің білімдері мен дағдыларын дамытуда университеттік білім берудің мүмкіндіктерін анықтау. Зерттеу барысында алынған және жұмыста ұсынылған эмпирикалық деректер бірінші курс студенттерінің бір есепті шешу үшін әртүрлі стратегияларды қолдануға дайындығы айтарлықтай төмен екенін, бірақ университетте оқудың төртінші курсына қарай жоғары оқу орнында мектептегі математика курсы мен сабақтарды өткізу оқуды тереңірек меңгеруіне байланысты жоғарылайтынын дәлелдейді, мұнда болашақ математика мұғалімдері есептерді шешудің әртүрлі жолдары мен әдістерін іздеуге тікелей қатысады.

Түйін сөздер: математикалық есептер, есептерді шешу әдістері, математика мұғалімдерін даярлау, математиканы оқыту.

Abstract

FUTURE MATHEMATICS TEACHERS' WILLINGNESS TO SOLVE PROBLEMS IN VARIOUS WAYS

Shmigirilova I.B.

M. Kozymbaev North Kazakhstan University, Petropavlovsk, Kazakhstan,

The search for different ways to solve a problem, their critical assessment in order to determine the most rational ones allow one to reveal the rich possibilities of mathematics and are an important factor in the development of students' mathematical thinking and those qualities that will be in demand in their professional activities. The purpose of the article is to explore the readiness of future mathematics teachers to solve problems using various methods or methods and to determine the possibilities of university education in developing the knowledge and skills of students that determine this readiness. Empirical data obtained during the study and presented in the work prove that the readiness of first-year students to use different strategies to solve the same problem is quite low, but increases by the fourth year of university study due to more in-depth mastery of the school mathematics course and conducting classes where future mathematics teachers are directly involved in the search for various ways and methods of solving problems.

Keywords: mathematical problems, problem solving methods, training teachers of mathematics, teaching mathematics.

Введение

Решение математических задач представляет собой сложный процесс, который требует от обучающихся анализа условия задачи, актуализации и творческого применения известных понятий, формул и теорем на основе понимания основных взаимосвязей данных задачи и того, что требуется найти, построить или доказать. Не случайно, многие математики-методисты считают, что задачи являются эффективным и зачастую незаменимым средством усвоения учащимися понятий, методов математики и математических теорий в целом. [1 – 3 и др.]. Кроме того, математические задачи обладают немалым развивающим потенциалом, реализовать который можно с помощью различных приемов, одним из которых является решение задачи различными методами или способами. Эффективность этого методического приема неоднократно подтверждена не только научными исследованиями, но и образовательной практикой. Недаром в научно-методической литературе часто упоминается и поддерживается мнение известного американского математика и методиста Д. Поля о том, что лучше одну задачу решить тремя способами, чем три задачи одним способом [4, С. 40].

Математические задачи решаемы разными способами или методами расширяют область специфических развивающих возможностей математики. В.А. Далингер [5] считает подобную деятельность одним из обязательных условий, которое необходимо использовать при организации работы с детьми одаренными в области математики для обеспечения их дальнейшего интеллектуального развития.

Анализ исследований [6 – 9 и др.] позволяет заключить, что при решении одной и той же задачи с использованием различных стратегий (методов или способов) можно обеспечить достижение целого спектра дидактических целей:

- освоение и закрепление учащимися знаний о различных математических методах и умений их применять при решении задач, что, в свою очередь, положительно отражается на их успеваемости и интересе к математике;
- преодоление формализма при усвоении знаний обучающимися, который неизменно проявляется при обычном заучивании математических фактов;
- формирование представлений о системном характере содержания курса математики через выявление внутрисубъектных и межпредметных связей;
- освоение приёмов логического поиска, который в свою очередь, развивает исследовательские способности учащихся;
- наращивание прогностических умений;
- формирование готовности понимать и объяснять собственные затруднения, правильно задавать вопросы, которые позволят преодолеть трудности в процессе поиска различных стратегий решения задачи;
- расширение набора когнитивных схем и рост их гибкости и динамичности;
- развитие критического мышления и совершенствование рефлексивных способностей обучающихся в процессе обсуждения рациональности того или иного способа, или метода решения задач определенного типа;
- активизация мыслительной деятельности школьников и поддержание их готовности к использованию совокупности мыслительных операций: анализа, синтеза, сравнения, конкретизации, обобщения и др.;
- обучение генерированию идей в процессе поиска продуктивных оригинальных решений;
- развитие произвольного и непроизвольного контроля хода мышления;
- формирование математической культуры обучающихся и в целом культуры интеллектуальной деятельности;
- развитие готовности к отстаиванию собственной идеи, а также уважительного отношения к чужим идеям и мнениям.

В качестве методических приемов, способствующих повышению эффективности обучения школьников решению задач различными методами или способами, авторы определяют:

- специальное планирование подобной работы и ее продуманную организацию;

- тщательный подбор задач, которые будут предложены учащимся для решения различными методами или способами, систематическое обращение к ним (в идеале – при изучении каждого раздела курса математики);
- ознакомление учащихся с сущностью отдельных методов решения, существенных особенностей их применения при решении задач различных типов;
- принятие учителем роли фасилитатора, всемерно поддерживающего активность обучающихся, обеспечивающего мотивацию и позитивный эмоциональный фон в классе;
- продуманная и своевременная помощь учащимся со стороны учителя, в случае возникающих затруднений в поиске нового способа решения;
- обеспечение возможности для школьников реализовывать самостоятельный поиск различных методов или способов решения задачи, постепенное увеличение доли их самостоятельной деятельности;
- продумывание учителем возможных затруднений при разрешении познавательных проблем и путей их преодоления, восприятие ошибок и просчетов школьников ни как повода для критики, а как подсказка направления дальнейшего совершенствования их знаний и умений;
- использование дидактических карточек, содержащих указания или, лучше, вопросы, которые должны не подсказывать новый способ или метод решения задачи, а направлять обучающихся в процессе его поиска;
- применение в обучении диалоговых и полилоговых форм взаимодействия учащихся в процессе поиска стратегии решения задачи;
- систематическое побуждение обучающихся к рефлексивной коммуникации для обоснования выбранного способа решения задачи, объяснения насколько он рационален или нерационален, а также для осознания собственных затруднений в процессе решения и их причин.

В англоязычных исследованиях авторы [10, 11 и др.] используют термин «Multiple-solution tasks» (задачи с множественным решением) и особо отмечают, что решение таких задач культивирует такие важные качества мышления как гибкость и глубина. Такого же мнения придерживаются и отечественные ученые [12 и др.]. Также в работах зарубежных исследователей по вопросам обучения решению задач различными методами или способами то и дело мелькает термины «дивергентное мышление» и «вариативность мыслительной деятельности», характеризующих качества интеллекта, которые необходимы решателю при работе с подобными задачами.

Таким образом, систематическое обращение к использованию данного приема в школьной практике обучения математике будет способствовать повышению эффективности учебного процесса. Следовательно, вузовская подготовка будущих учителей должна обеспечивать их готовность к решению задач с использованием различных методов или способов, которая в дальнейшем будет востребована при организации подобной деятельности школьников. Кроме того, привлечение студентов-математиков к решению задач с использованием различных методов и способов способствует формированию их знаний и умений, лежащих в основе профессиональных компетенций учителя математики. В связи с этим нельзя не согласиться с R. Leikin и A. Levav-Waynberg [13], которые замечают, что готовность к решению множественных задач выступает, как зеркало развития знаний учителей математики. При этом авторы отмечают, что зачастую не проявляют энтузиазма использовать задачи с множественным решением в своей практике.

Цель статьи – исследовать готовность будущих учителей математики к решению задач различными методами или способами и определить возможности вузовского обучения в развитии знаний и умений студентов, определяющих эту готовность.

Методология исследования

В качестве методологической основы исследования выступили положения задачного подхода в образовании, ориентирующего на построение обучения, как процесса последовательного решения учебных задач. В процессе теоретического анализа была актуализирована роль учебно-познавательной деятельности, в рамках которой обучающиеся выполняют поиск решения задачи различными методами или способами в достижении дидактических целей.

Эмпирические данные были получены на основе опроса студентов, а также анализа результатов выполнения ими специального задания, в котором предлагались задачи из различных разделов школьного курса математики с указанием, что каждую из них нужно решить не менее чем двумя методами или способами. Кроме того, дополнительный вклад в исследование внесли опрос студентов,

беседы с ними и наблюдение за их работой при решении задач. К исследованию с их согласия привлекались студенты последних четырех выпусков образовательных программ 6В01502 «Математика», 6В01508 «Математика-Информатика», 6В01509 «Математика-Физика» – всего 64 человека. Сбор эмпирических данных осуществлялся в два этапа: в начале обучения студентов (в 1 семестре) и в конце их обучения (в 8 семестре).

Результаты исследования

Начальный этап опроса организовывался в конце первого месяца обучения вновь принятых студентов после их первичной адаптации. Первый вопрос, на который отвечали студенты-первокурсники, был нацелен на выяснение их понимания того, в каком случае можно говорить, что задача решена «различными методами», а в каком, что она решена «различными способами». Результаты ответа на этот вопрос свидетельствуют о том, что студенты первого курса либо не знают, чем отличаются данные понятия (43,75 %), либо отличают их только интуитивно (56,25%). При этом даже те студенты, которые указывали на интуитивное понимание различия в этих терминах, на самом деле в дальнейшем не всегда могли его проявить.

Следующий вопрос касался того, насколько часто во время их школьного обучения первокурсники сталкивались с решением задач различными методами или способами. Анализ ответов на этот вопрос представлен в диаграмме на рисунке 1. Диаграмма наглядно демонстрирует, что подобная деятельность по решению задач в школе происходит весьма редко.

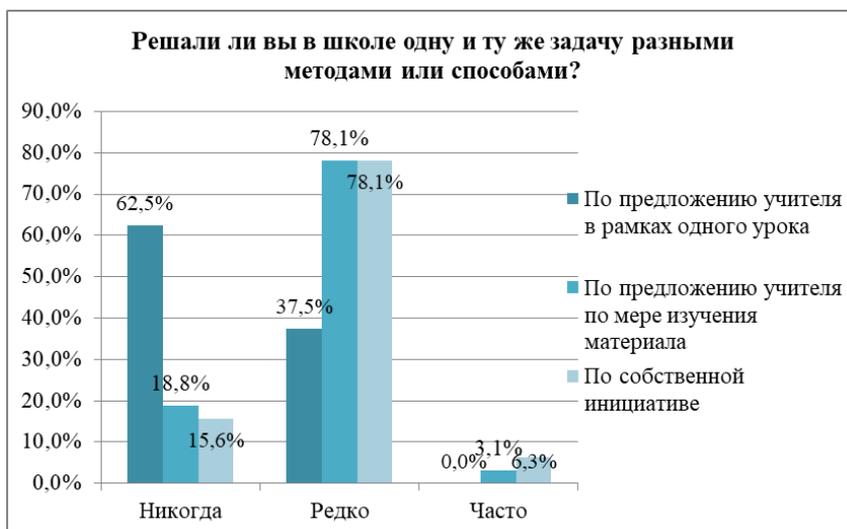


Рисунок 1. Анализ ответов первокурсников на вопрос о том, как часто во время их школьного обучения они сталкивались с решением задач различными методами или способами

Дополнительное разъяснение к такому положению дел было получено в ответах студентов на третий вопрос: Если вы в школе решали задач различными методами или способами, то к каким разделам школьной математики относились эти задачи? Отвечая на данный вопрос, студенты выделяли: прежде всего – текстовые задачи, которые решались в 5-6 классах, системы линейных уравнений, квадратные уравнения; реже – задачи на преобразования тригонометрических выражений и решение тригонометрических уравнений, еще реже – геометрические задачи.

Задание, проверяющее готовность студентов-первокурсников к решению задач различными методами или способами, включало 5 задач по темам: квадратные уравнения; уравнения с модулем; текстовые задачи на движение; тригонометрические неравенства; планиметрические задачи. Предварительно студентам было разъяснена разница между понятиями «метод решения» и «способ решения» в русле того, как они интерпретируются в методической литературе. Приведем пример, одного из вариантов заданий, предложенных студентам.

Задание. Решите каждую из следующих задач не менее чем двумя методами или способами.

1. Решите квадратное уравнение: $x^2 - 6x - 16 = 0$.
2. Решите уравнение с модулем: $|2x - 1| - |x + 5| = 0$.

3. В 8 часов утра из Астаны в Павлодар вышел поезд со скоростью 60 км/ч. В 11 часов из Павлодара ему навстречу вышел другой поезд со скоростью 70 км/ч. В какое время поезда встретятся, если расстояние между Астаной и Павлодаром 440 км?
4. Решите неравенство: $tg 2x + ctg 2x + 2 < 0$.
5. На продолжении противоположных сторон параллелограмма AB за точку A и DC за точку C отложены равные отрезки AK и CL . Докажите, что полученный четырехугольник $LBKD$ – параллелограмм.

Как видно из приведенного примера задачи не выходили за рамки школьного курса и не были сложными, чтобы их повышенная сложность не отвлекала студентов от основной цели – нахождения нескольких способов или методов решения. Таким образом, большинство обучающихся решили все задания хотя бы одним из способов. Предстает совсем иная картина с повторным решением этих же задач другим способом или методом. Лучше всего студенты проявили себя при решении квадратных уравнений.

Практически все решили уравнение не только с использованием формулы дискриминанта, но и применив теорему, обратную к теореме Виета, метод выделения полного квадрата или графический метод. Некоторые участники исследования решили квадратное уравнение даже тремя методами. Такой результат вполне объясним, поскольку все эти методы изучаются в школьном курсе, причем в рамках одного и того же раздела. Решение всех остальных задач с использованием стратегии, отличной от первой, вызвало у многих студентов затруднения. Хуже всего будущие педагоги справились с поиском разных способов решения планиметрической задачи.

Для проверки готовности к решению задач разными методами или способами этих же студентов уже учащихся на 4 курсе было составлено аналогичное задание, с некоторыми изменениями. Эти изменения, прежде всего, были нацелены на расширение тематической принадлежности задач с целью дополнительного охвата тех разделов, которые осваивались студентами в рамках ряда вузовских дисциплин, направленных на углубленное изучение и систематизацию курса элементарной математики.

Так, например, квадратное уравнение было заменено на квадратное неравенство, уравнение с модулем – на уравнение с параметром, текстовая задача на движение заменена задачей на смеси и сплавы, планиметрическая задача – на стереометрическую. Сравнительный анализ выполнения задания по решению задач различными методами или способами студентами 1-го и 4-го курсов представлен в диаграмме на рисунке 2.



Рисунок 2. Сравнительный анализ выполнения задания по решению задач различными способами или методами студентами 1 и 4 курсов

Примечательно, что все студенты четвертого курса квадратное неравенство решили двумя методами: графическим и методом интервалов. Никто из студентов не свел решение квадратного неравенства к решению совокупности двух систем линейных неравенств. Причиной тому, как объясняли сами студенты после выполнения задания, было то, что им на занятиях неоднократно говорили о том, что метод интервалов для решения рациональных неравенств степени больше первой и дробно-рациональных неравенств является более рациональным. При решении текстовой задачи и первокурсники, и студенты четвертого курса выбирали два способа решения и остановились на использовании в одном случае составление уравнения, в другом – составление системы уравнений, то есть, по сути, работали в рамках одного метода – алгебраического. К арифметическому методу решения обратились лишь единицы: на первом курсе – 2 человека, на четвертом – 5. Достаточно большой процент студентов предложили по два решения стереометрической задачи. Меньше всего студентов четвертого курса обнаружили два решения уравнения с параметром.

В процессе опроса студентам 4 курса было предложено самим оценить свою готовность находить несколько решений задач всего по двум пунктам: 1) оцените ваш уровень готовности к решению школьных математических задач различными методами или способами по шкале от 0 до 3: 0 – совсем не готов, 1 – готов в рамках отдельных тем, 2 – готов по большинству тем школьного курса, 3 – полностью готов; 2) оцените, используя эту же шкалу, ваш уровень готовности к обучению школьников решению математических задач различными методами или способами. Результаты опроса представлены в диаграмме на рисунке 3.

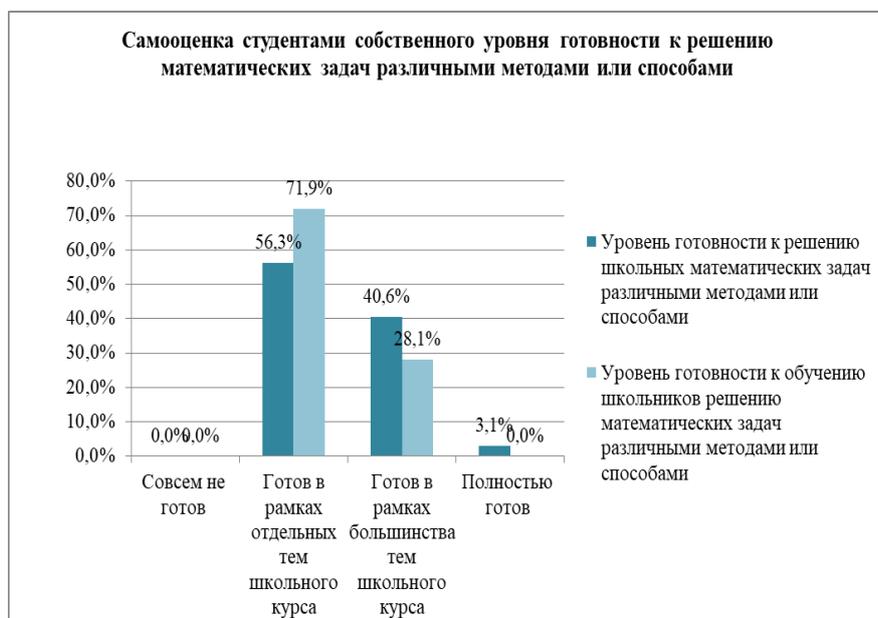


Рисунок 3. Анализ самооценки студентов 4 курса об их готовности к решению задач различными методами или способами (данные округлены до десятых).

Диаграмма свидетельствует о том, что студенты не считают себя полностью готовыми к работе со школьниками в направлении их обучения решению задач различными методами и способами. Также в устной беседе будущие учителя, отмечая значимость данной деятельности, выражали намерения дальше совершенствоваться в направлении ее освоения.

Дискуссия

Готовность будущих учителей математики к решению задач различными способами или методами является одной из значимых составляющих их профессиональных компетенций. Поскольку в рамках школьного образования данная готовность развивается далеко не в полной мере, вузовское обучение должно ликвидировать этот пробел. Частично эта проблема разрешается при освоении студентами дисциплин «Элементарная математика», «Практикум по решению математических задач», «Элементарная геометрия», нацеленных на углубленную проработку школьного курса математики.

Однако, как справедливо отмечают ученые [5, 6, 11], при решении задач различными способами или методами является востребованным системное представление об идеях и методах математики. Такое, системное представление не всегда возможно сформировать у студентов только в рамках курсов, представленных выше, поскольку они, как правило, строятся по принципу тематической группировки материала, а занятий, которые в соответствии с syllabusом ориентированы на обобщение и систематизацию изученного, не достаточно, чтобы в полной мере решить рассматриваемую проблему. Поэтому полезно в учебный план будущих учителей математики включить такие дисциплины как «Идеи и методы школьного курса математики» и «Технологии обучения школьников решению математических задач».

Первая из этих дисциплин как раз и направлена на систематизацию и обобщение материала различных разделов школьного курса и подготовку будущих учителей математики к осознанному использованию идей и методов математики при решении математических задач, в том числе и с использованием различных методов или способов. Вторая дисциплина в большей мере учит студентов тому, как обучать школьников решению задач различной сложности. В рамках этого курса предусмотрены ряд занятий, которые непосредственно направлены на совершенствование уровня готовности будущих учителей к обучению учащихся решению математических задач различными методами или способами. Так в беседах студенты, участвовавшие в исследовании, отмечали, что именно те занятия, в рамках которых была необходимость при решении задач искать и реализовывать различные стратегии (методы или способы), оказали влияние на их интерес к процессу работы с математическими заданиями, побуждали к вдумчивому изучению фактов и методов математики, постепенно развивая те умения, которые и определяют обозначенную готовность.

На занятиях полезно не только организовывать работу по решению задач различными методами или способами, а также знакомить их с методикой организации подобной работы в школе. Например, можно предложить в качестве задания СРС подобрать задачи по разным темам школьной математики, для решения которых могут быть применимы различные методы, решить эти задачи и разработать карточки-подсказки, которые помогут школьникам обнаружить и реализовать эти методы. Усложнить такое задание можно требованием подготовить несколько таких карточек, ориентированных на обучающихся с разным уровнем математической подготовки. Такие карточки позволят реализовывать дифференцированный подход при обучении школьников решению задач разными методами или способами.

Таким образом, положительный опыт, приобретенный студентами в рамках освоения этих дисциплин, в будущей профессиональной деятельности может быть успешно перенесен в школьную практику.

Заключение

Решение задач различными методами и способами – существенный шаг к систематическому, творческому восприятию математического содержания. Решая задачу одним способом, обучающийся нацелен только на то, чтобы найти правильный ответ. Поиск нескольких способов решения одной и той же задач положительно сказывается на интеллектуальных качествах решателя. Обдумывая и сравнивая различные решения, будущие учителя утверждают в мысли о том, что важно не только получить ответ, но и использовать для этого наиболее рациональный, оригинальный или красивый способ. Овладение способностью решать одну и ту же задачу, используя разные стратегии, актуализирует необходимость вспомнить многие теоретические факты, методы и приемы, анализируя их с точки зрения применения к конкретной задачной ситуации.

Поскольку обучение в школе, по ряду объективных и субъективных причин, не может в полной мере гарантировать, что те выпускники, которые намериваются связать свою жизнь с профессией учителя математики, приобретут знания, умения и навыки, составляющие основу готовности к решению математических задач различными методами или способами, то эта проблема должна быть решена в рамках вузовского обучения. Составляя рабочие программы вузовских курсов, ориентированных на углубленное повторение и систематизацию содержания школьной математики, необходимо предусмотреть не только освоения совокупности математических методов, но возможность использования при решении одной и той же задачи. При этом важно, чтобы тематическая принадлежность задач решаемых студентами различными методами или способами была многообразной.

Планомерная и систематическая работа студентов, нацеленная на отыскание различных стратегий решения задач, позволит не только обогатить их учебный опыт, сформировать открытую познавательную позицию, но и обеспечить развитие у них целого ряда интеллектуальных качеств и личностных свойств, так необходимых учителю математики для компетентного, эффективного и творческого осуществления профессиональной деятельности.

Список использованной литературы:

- 1 Abylkassymova A. E., Tuyakov Y. A., Kaparova R. M., Dyussov M.S., Zhanseitova L. Zh., Ardabayeva A. K. *Methodical Aspects of Pupils' Teaching to Solve Mathematical Task // International Journal of Advanced Science and Technology*. 2020. Vol. 29 (4). P. 2440–2452.
- 2 Ералиев С. Е., Бердіахмет И. *Элементар математикадан қиындығы жоғары есептерді шешу әдістері // Абай атындағы ҚазҰПУ-нің ХАБАРШЫСЫ, «Физика-математика ғылымдары» сериясы*. 2020. № 4(72). Б. 17–22. <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.02>
- 3 Шмигирилова И.Б. *Методы, формы и средства активного обучения школьной математике // Вестник Северо-Казахстанского университета имени Манаша Козыбаева*. 2019. № 4 (45). С. 196–204.
- 4 Поля Д. *Как решать задачу / пер. с англ. В. Г. Звонарёвой, Д. Н. Белла; под ред. Ю. М. Гайдука*. – 2-е изд. – М.: Учпедгиз, 1961. – 208 с.
- 5 Нурбаева Д.М., Кесик А.Ж. *О методике обучения учащихся решению текстовых задач разными методами // Материалы Международной научной конференции «Инновационные подходы к обучению математике в школе и вузе»*. Омск. 2021 С. 99–103
- 6 Даллингер В.А. *Теория и практика работы с математически одаренными детьми // Международный журнал экспериментального образования*. 2015. № 9. С. 141–143.
- 7 Evans S., Swan M. *Developing students' strategies for problem solving: the role of pre-designed «Sample Student Work» // Educational Designer*. 2014. Vol. 2(7). 31 p.
- 8 Gridos P., Avgerinos E., Mamona-Downs J., Vlachou R. *Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry // International Journal of Science and Mathematics Education*, 2021. Vol. 20. 619–636. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>.
- 9 Дюмина Т.Ю., Махонина А.А. *Обучение школьников поиску идеи решения геометрической задачи различными способами // Грани познания*. 2013. № 1 (21). С. 64–71.
- 10 Levav-Waynberg A., Leikin R. *The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry // Journal of Mathematical Behavior*. 2012. Vol. 3(1). P. 73–90. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001>
- 11 Guberman R., Leikin R. *Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks // Journal of Mathematics Teacher Education*. 2013. Vol. 16(1). P. 33–56. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7>
- 12 Рахымбек Д., Юнусов А.А., Юнусова А.А., Айтбаева Н.Ж. *Методика обучения решению геометрических задач на доказательство различными способами // Международный журнал экспериментального образования*. 2013. № 4–2. С. 48–53
- 13 Leikin R., Levav-Waynberg A. *Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge // Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. 2008. Vol. 8(3). P. 233–251. <https://doi.org/10.1080/14926150802304464>

References:

- 1 Abylkassymova A. E., Tuyakov Y. A., Kaparova R. M., Dyussov M.S., Zhanseitova L. Zh., Ardabayeva A. K. (2020). *Methodical Aspects of Pupils' Teaching to Solve Mathematical Task*. *International Journal of Advanced Science and Technology*. 29(4). 2440–2452.
- 2 Yerallyev S. E., Berdiakhmet I. (2020). *Methods for solving problems of elementary mathematics of higher difficulty solving high-complexity problems*. *Abai Kazakh National Pedagogical University bulletin. Of Physics & Mathematical Sciences*. 4(72). 17–22. <https://doi.org/10.51889/2020-4.1728-7901.02> (In Kazakh)
- 3 Shmigirilova I. (2019). *Methods of form and means of active teaching school mathematics*. *Bulletin of North Kazakhstan University named after Manash Kozybayev*. 4 (45). 196–204. (In Russian)
- 4 Polya D. *How to solve a problem / trans. from English V. G. Zvonareva, D. N. Bella; edited by Yu. M. Gaiduk*. – 2nd ed. – М.: Учпедгиз, 1961. – 208 p. (In Russian)
- 5 Nurbaeva D.M., Kesik A.Zh. (2021). *On the methodology of teaching students to solve word problems using different methods*. *Proceedings of the International Scientific Conference “Innovative approaches to teaching mathematics at school and university”*. Омск. 99–103 (In Russian)
- 6 Dalinger V.A (2015). *Theory and practice of working with mathematically gifted children*. *International journal of experimental education*. 9. 141–143. (In Russian)

7 Evans S., Swan M. (2014). *Developing students' strategies for problem solving: the role of pre-designed «Sample Student Work»*. *Educational Designer*. 2(7). 31 p.

8 Gridos P., Avgerinos E., Mamona-Downs J., Vlachou R. (2021). *Geometrical Figure Apprehension, Construction of Auxiliary Lines, and Multiple Solutions in Problem Solving: Aspects of Mathematical Creativity in School Geometry*. *International Journal of Science & Mathematics Education*. 20. 619-636. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10155-4>.

9 Dyumina T.Yu., Makhonina A.A. (2013). *Teaching pupils to search for the answer of a geometric task by different ways*. *Grani poznaniya*. 1(21). 64–71. (In Russian)

10 Levav-Waynberg A., Leikin R. (2012). *The role of multiple solution tasks in developing knowledge and creativity in geometry* // *Journal of Mathematical Behavior*. 3(1). 73–90. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.11.001>

11 Guberman R., Leikin R. (2013). *Interesting and difficult mathematical problems: Changing teachers' views by employing multiple-solution tasks* // *Journal of Mathematics Teacher Education*. 16(1). 33–56. <https://doi.org/10.1007/s10857-012-9210-7>

12 Rahimbek D., Yunusov A.A., Yunusova A.A., Aitbayeva N.J. (2013). *Methods of teaching in the solution of geometrical tasks on the proof in various ways*. *International journal of experimental education*. 4–2. С. 48–53 (In Russian)

13 Leikin R., Levav-Waynberg A. (2008). *Solution Spaces of Multiple-Solution Connecting Tasks as a Mirror of the Development of Mathematics Teachers' Knowledge*. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*. 8(3). P. 233–251. <https://doi.org/10.1080/14926150802304464>