Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1. *Демидович В.П. и Марон И.А. Основы вычислительной математики. Изд. «Наука», М., 1966.*
2. *Мак-Кракен Д., Дорн У., Численны методы и программирование на ФОРТРАНе, Мир, 1969.*
3. *Гончаров В.Л. Теория интерполирования и приближения функций. Гостехиздат, 1954.*
4. *Форсайт Дж., Малькольм М., Молер К.. //Машинные методы математических вычислений. Перевод с англ. –М.: Мир, 1980.*
5. *Гутер Р.С., Овчинский Б.В. //Элементы численного анализа и математической обработки результатов опыта. // -2-изд.перераб. –М.: Наука, 1970. -432с.*
6. *Калиткин Н.Н., Численные методы. // -М.: Наука, 1978. -511с.*
7. *Баймахан Р., Қожогулов Ч., Н.Құрманбекқызы К., Разработка методики определения физико-механических свойств двухфазного водонасыщенного грунта. // Современные проблемы сплошных сред.Вып.9. Гидрозодинамика, геомеханика и геотехнологии. –Бишкек, 2009.*
8. *Запорожец Г.И., Руководство к решению задач по математическому анализу. Изд. Высшая школа, М., 1966.*

МРНТИ 27.01.05
УДК 517.983.25

Г.Ж. Естаева[1] , Т.Н. Сагындыков[1]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ИНДУКЦИЯ ӘДІСІНІҢ СТАНДАРТТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДЕ ҚОЛДАНЫЛУЫ

Аңдатпа

Барлық математикалық зерттеулердің негізінде дедуктивтік және индуктивтік әдістер жатады. Ойлаудың дедуктивтік әдісі – ол жалпыдан дербеске көшу, яғни бастапқысы жалпы нәтиже болатын, ал қорытындысы – дербес нәтиже болатын ойлау. Индукция әдісі дербес жағдайдан жалпы нәтижеге көшкенде қолданылады. Яғни дедуктивтік әдіске қарама-қарсы әдіс.Математикалық тұжырымдарды дәлелдеудің қажетті әрі тиімді әдісі – математикалық индукция әдісінің математиканың әртүрлі бөлімдеріндегі есептерді шығаруда қолданылу мүмкіндіктері мақалада қарастырылған. Бұл мақалада математикалық индукция әдісін әртүрлі тепе-теңдіктерді, теңсіздіктерді дәлелдеуде, әр түрлі ретті матрицаның *n*-дәрежесін, функциялардың *n*-ретті туындыларын, *n*-ретті анықтауыштарды, кейбір бірінші текті меншіксіз интегралдарды есептегенде, бөлінгіштікке берілген тұжырымдарды дәлелдеуде қолданылуы көрсетілген.

Түйін сөздер: математикалық индукция әдісі, математикалық индукция қағидасы, теңдік, теңсіздік, интеграл, индукция базисі, *n*-ретті анықтауыш, *n*-ретті туынды.

Аннотация

Г.Ж. Естаева[1] , Т.Н. Сагындыков[1]
[1]Казахский национальный педагогический университет им.Абая, г.Алматы, Казахстан

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ В НЕСТАНДАРТНЫХ ЗАДАЧАХ

В основе всех математических исследований лежат дедуктивные и индуктивные методы. Метод дедуктивного мышления – это переход от общего к частному, т.е. рассуждение, где исходное является общим положением, а заключение частным результатом. Метод индукции используется при переходе от частного случая к общему положению, т.е. это метод, противоположный дедуктивному. В работе рассмотрены возможности применения необходимого и эффективного метода доказательства математических утверждений – метода математической индукции к решению задач различных разделов математики.

В данной статье приведены применения метода математической индукции для доказательства различных тождеств, неравенств, для вычисления *n*-ой степени матриц различных порядков, производных *n*-го порядка функций, определителей *n*-го порядка, некоторых несобственных интегралов *1*-го рода, и для доказательства утверждений на делимость.

Ключевые слова: метод математической индукции, принцип математической индукции, равенство, неравенство, интеграл, базис индукции, определитель *n*-го порядка, производная *n*-го порядка.

Abstract

APPLICATION OF THE MATHEMATICAL INDUCTION METHOD IN NON-STANDARD PROBLEMS

Estaeva G.Zh.[1], Sagyndykov T. N.[1]

[1]Abai Kazakh national pedagogical University, Almaty, Republic of Kazakhstan

All mathematical research is based on deductive and inductive methods. The deductive method of reasoning is a reasoning from the general to the particular, i.e., a reasoning whose starting point is the general result, and the final point is the particular one. Induction is used in the transition from particular results to general ones, i.e. it is the opposite of the deductive method. The paper considers the possibilities of applying the necessary and effective method of proving mathematical statements – the method of mathematical induction to solving problems of various branches of mathematics.

This article describes the applications of the mathematical induction method for proving various identities, inequalities, for calculating the nth degree of matrices of different orders, derivatives of n-th order functions, determinants of n-th order, some improper integrals of the 1st kind, for proving statements on divisibility.

Keywords: mathematical induction method, mathematical induction principle, equality, inequality, integral, induction basis, n-th order determinant, n-th order derivative.

Индукция туралы кең мағынада, ойлау қозғалысының жеке жағдайлардан жалпы жағдайға көшу нәтижесіндегі таным әдісі, тану амалы деп айтуға болады. Тұжырымдарды математикалық индукция әдісі арқылы дәлелдеуде оның негізі болып саналатын математикалық индукция қағидасын білу және оның мағынасын түсіну өте маңызды. Математикалық индукция әдісі – математикалық индукция қағидасына негізделген, көптеген тұжырымдарды дәлелдеудің әмбебап әдісі.

Математикаға «индукция» сөзін Джон Валлис енгізді («Жалпы арифметика», 1656 ж.). «Математикалық индукция» термині алғаш рет шотланд математигі Августа де Морганның Британ энцоклопедиясындағы мақаласында жарық көрді (1838).

Математикалық индукция әдісінің негізінде *математикалық индукция қағидасы* деп аталатын арифметиканың аксиомасы жатыр. Алдымен осы қағиданы келтірейік.

Әрбір натурал n үшін $A(n)$ тұжырымы айтылған болсын. Егер:

1) A(n) тұжырымы n=1 болғанда дұрыс болса, яғни $A(1)$ сөйлемі орындалса,

2) әрбір тіркелген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы орындалғанда $A(n+1)$ тұжырымы да орындалса, онда $A(n)$ тұжырымы кез келген натурал n саны үшін орындалады.

Математикалық индукция қағидасын (аксиомасын) символдар арқылы келесі түрде жазуға болады:

$$A(1)\,\&\,\forall n\big(A(n)\to A(n+1)\big)\to\forall nA(n)$$

немесе басқа кванторлар арқылы жазсақ:

$$A(1)\wedge\forall n\big(A(n)\Rightarrow A(n+1)\big)\Rightarrow\forall nA(n).$$

$A(n)$ тұжырымы әрбір n натурал саны үшін орындалатынын дәлелдеу үшін *математикалық индукция әдісі* қолданылады.

$\forall n\ A(n)$ тұжырымының математикалық индукция әдісімен дәлелденуі екі бөліктен тұрады. Алдымен $A(1)$ тұжырымы дәлелденеді. Бұдан соң әрбір натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы орындалғанда $A(n+1)$ тұжырымы да орындалатыны дәлелденеді. Осыдан кейін кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы дұрыс болатыны дәлелденді деп есептеледі. $A(1)$ сөйлемінің дәлелдеуі *индукция базисі* деп аталады. $\forall n\ (A(n)\to A(n+1))$ тұжырымының дәлелдеуі *индукция қадамы*, ал индукция қадамындағы $A(n)$ тұжырымы *индукция болжамы* деп аталады [1]. Сонымен, $\forall n\ A(n)$ тұжырымының математикалық индукция әдісімен дәлелдеу үшін келесі екі сөйлемді дәлелдеу керек:

1) Индукция базисі: $A(1)$;

(A(1) сөйлемінің орындалуын айқындау керек)

2) Индукция қадамы*:* $\forall n\ (A(n)\to A(\mathrm{n}+1))$ (n-тіркелген натурал сан).

(A(n) тұжырымымен бірге A(n+1) тұжырымы орындалатынын дәлелдеу жеткілікті.

Математикалық индукция әдісімен дәлелдеудің схемасы былай болады:

$$\frac{A(1)\quad\forall n(A(n)\to A(n+1))}{\forall nA(n)}.$$

Төменде математикалық индукция әдісін теңдіктерді дәлелдеуде қолдануға мысалдар келтірілген.

1-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$1-2^2+3^2-4^2+\ldots+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Дәлелдеуі.

Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемі дұрыс $((-1)^0=1)$.

Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз,яғни

$$1-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}n^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}.$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын дәлелдейік,яғни

$$1-2^2+3^2-...+(-1)^{n-1}n^2+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Расында да,

$$A(n+1)=A(n)+(-1)^n(n+1)^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^n(n+1)^2=$$

$$=(-1)^n\left[(n+1)-\frac{n}{2}\right](n+1)=(-1)^n\frac{n(n+1)(n+2)}{2}.$$

Сонымен, кез келген натурал n саны үшін теңдік орындалады.

1.1-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$-1+3-5+...+(-1)^n(2n-1)=(-1)^n n$$

1.2-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+...+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}.$$

1.3-мысал. Кез келген натурал $n\geq 1$ саны үшін келесі теңдіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$\cos x+\cos 3x+\cos 5x+...+\cos(2n-1)x=\frac{\sin 2nx}{2\sin x}.$$

Сонымен қатар, математикалық индукция әдісін теңсіздіктерді дәлелдеуде жиі қолданады.

2-мысал. Кез келген натурал $n>1$ саны үшін келесі теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Дәлелдеуі.

Индукция базисі. $A(2)$ сөйлемінің дұрыстығын тексереміз.

Расында да,

$$\frac{1}{2+1}+\frac{1}{2+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{7}{12}=\frac{14}{24}>\frac{13}{24}.$$

Индукция қадамы. Кез келген натурал $n>1$ саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз,яғни

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}>\frac{13}{24}.$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын дәлелдейік, яғни

$$\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n+2}>\frac{13}{24}.$$

Ол үшін келесі екі теңдікті салыстырайық:

$$A(n)=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+...+\frac{1}{2n}$$

және

$$A(n+1)=\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+...+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}$$

$$A(n+1)-A(n)=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n+1}, \text{ яғни } A(n+1)-A(n)=\frac{1}{2(n+1)(2n+1)}.$$

n-нің кез келген натурал мәнінде соңғы теңдіктің оң жағы оң болады.

Сондықтан $A(n+1)>A(n)$ және $A(n)>\frac{13}{24}$ болғандықтан $A(n+1)>\frac{13}{24}$ теңсіздігі орындалады.

Сонымен, кез келген натурал $n>1$ саны үшін теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдедік.

2.1-мысал. Кез келген натурал $n\geq 3$ саны үшін келесі теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$2^n>2n+1.$$

2.2-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі теңсіздіктің дұрыстығын дәлелдеу керек:

$$2^{n-1}\left(a^n+b^n\right)\geq(a+b)^n.$$

Ал енді математикалық индукция әдісінің бөлінгіштікке берілген тұжырымдарды дәлелдеуде қолданылуына бірнеше мысалдар келтірейік.

3-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі тұжырымды дәлелдеу керек:

$$(3^{2n+1}+40n-67)\vdots 64$$

Дәлелдеуі.

Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемінің дұрыстығын тексереміз.

Расында да,

$$3^3+40-67=0,\ \ 0\vdots 64.$$

Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз, яғни

$$(3^{2n+1}+40n-67)\vdots 64.$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын дәлелдейік, яғни

$$(3^{2n+3}+40(n+1)-67)\vdots 64.$$

Расында да,

$$3^{2n+3}+40(n+1)-67=9\cdot 3^{2n+1}+40n-27=9(3^{2n+1}+40n-67)-$$

$$-320n+576=9(3^{2n+1}+40n-67)+64(9-5n).$$

Мұнда қосылғыштардың әрқайсысы 64-ке бөлінеді. Демек, теңдіктің сол жақ бөлігі 64-ке бөлінеді.

3.1-мысал. Кез келген натурал n саны үшін келесі тұжырымды дәлелдеу керек:

$$(2^{n+2}\cdot 3^n+5n-4)\vdots 25$$

3.2-мысал. Кез келген оң бүтін n саны үшін $x_n=2\underbrace{55...5}_{n}07$ саны 23-ке қалдықсыз бөлінетінін дәлелдеу керек.

Математикалық индукция әдісін n-ретті анықтауышты есептеуде және әр түрлі ретті матрицаның n-дәрежесін табуда қолдануға болады [2].

4-мысал. n-ретті анықтауышты есептеу керек:

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0\\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Шешуі.

$$\Delta_1=|2|=2,\quad \Delta_2=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=3,\ \Delta_3=\begin{vmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=4,...$$

Осы теңдіктер арқылы келесі ұйғарымды аламыз:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & & 0 & 0 & 0 \\ & & \vdots & & & \ddots & & \vdots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1. \qquad (1)$$

(1) формуланы математикалық индукция әдісімен дәлелдейік.

Дәлелдеуі.

Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемі дұрыс, яғни $\Delta_1 = |2| = 2.$

Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз.

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын дәлелдеу керек. Δ_{n+1} анықтауышын бірінші жол бойынша жіктесек, яғни

$$\Delta_{n+1} = 2\Delta_n - \Delta_{n-1} = 2(n+1) - n = n+2.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

4.1-мысал. n-ретті анықтауышты есептеңіз:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & & 0 & 0 \\ & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & 0 & n \end{vmatrix}$$

5-мысал. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ матрицасының n-ші дәрежесін табу керек.

Шешуі. $A^1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A,$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^2 & 2^2-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^3 & 2^3-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \dots$$

Соңғы теңдіктерден келесі ұйғарымды аламыз:

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n-1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Енді осы ұйғарымның ақиқаттығын математикалық индукция әдісі арқылы дәлелдейік.
Дәлелдеуі.
Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемі дұрыс.
Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз, яғни

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын көрсетейік, яғни

$$A^{n+1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Расында да,

$$A^{n+1} = A^n \cdot A = \begin{pmatrix} 2^n & 2^n - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} - 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Сонымен, кез келген натурал n саны үшін тұжырым дәлелденді.

5.1-мысал. $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ матрицасының n-ші дәрежесін табу керек.

Сонымен қатар, математикалық индукция әдісін меншіксіз интегралды есептеуде қолданады [3].

6-мысал. $\int_0^\infty x^n e^{-x} dx$ меншіксіз интегралды есептеу керек.

Шешуі. n=1 болса, онда $I_1 = \int_0^\infty x e^{-x} dx.$ Интегралды бөліктеп интегралдау әдісі арқылы есептейміз: $\int_0^\infty u dv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v du.$

Сонда,

$$\int_0^\infty x e^{-x} dx = (-x e^{-x} - e^{-x})\Big|_0^\infty = 1 = 1!.$$

n=2 болса, онда $I_2 = \int_0^\infty x^2 e^{-x} dx = (-x^2 e^{-x})\Big|_0^\infty + 2\int_0^\infty x e^{-x} dx = 2 = 2!.$

n=3 болса ,онда $I_3 = \int_0^\infty x^3 e^{-x} dx = 6 = 3!.$

Соңғы теңдіктерден келесі ұйғарымды аламыз:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n!$$

Осы формуланы математикалық индукция әдісі арқылы дәлелдейік.
Дәлелдеуі.

Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемі дұрыс.
Расында да,

$$\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = (-xe^{-x} - e^{-x})\Big|_0^{\infty} = 1.$$

Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз, яғни

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = n!$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымының дұрыстығын дәлелдейік,яғни

$$\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = (n+1)!$$

Расында да,

$$\int_0^{\infty} x^{n+1}e^{-x}dx = -x^{n+1}e^{-x}\Big|_0^{\infty} + (n+1)\int_0^{\infty} x^n e^{-x}dx = (n+1)n! = (n+1)!$$

Дәлелдеу керегі де осы.

6.1-мысал. $\int_0^{\infty} x^n 2^{-x} dx$ меншіксіз интегралды есептеу керек.

Математикалық индукция әдісі кейбір функциялардың n-ретті туындысын есептеуде қолданылады.

7-мысал. $y = \dfrac{1}{ax+b}$ функцияның n-ретті туындысын табу керек.

Шешуі. Бірінші ретті туындысы $y' = -\dfrac{a}{(ax+b)^2}$, екінші ретті туындысы $y'' = (y')' = \dfrac{2a^2}{(ax+b)^3}$, сол сияқты $y''' = (y'')' = -\dfrac{6a^3}{(ax+b)^4}$, ...

Осы формулалардан келесі ұйғарымды жасаймыз:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}. \quad (n \geq 0)$$

Бұл формуланың дұрыстығын математикалық индукция әдісімен дәлелдейік.
Дәлелдеуі.
Индукция базисі. $A(1)$ сөйлемі дұрыс.
Расында да,

$$y = \frac{(-1)^1 a^1 1!}{(ax+b)^{1+1}} = -\frac{a}{(ax+b)^2}.$$

Индукция қадамы. Кез келген натурал n саны үшін $A(n)$ тұжырымы ақиқат деп ұйғарамыз, яғни

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}$$

Енді $A(n+1)$ тұжырымы дұрыс екенін дәлелдейік, яғни

$$y^{(n+1)} = \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}(n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}$$

Расында да,

$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left(\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}\right)' = \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1}(n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

7.1-мысал. $y = \ln x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

7.2-мысал. $y = \sin x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

7.3-мысал. $y = e^{\alpha x} \sin \beta x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. – М.: Наука. -144 с.*

2 *Винберг Э.Б. Курс алгебры. – 2-е изд.,стер. – М.:МЦНМО, 2013. – 590 с.*

3 *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: МГУ,1985. – 662 с.*

МРНТИ 27.29.19
УДК 517.925

Иманбаев Н.С.[1,2]

[1]*Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, г. Шымкент, Казахстан*
[2]*Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан*

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В настоящей статье рассматривается возмущения дифференциального уравнения второго порядка спектральной задачи с нагруженным слагаемым, содержащий значение искомой функции в точке нуль, с регулярными, но неусиленно регулярными краевыми условиями. Исследуется вопрос базисности систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) нагруженного оператора кратного дифференцирования. Известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортономированный базис. Наряду с этим, известно, что в случае несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов на базисность систем корневых функций, помимо краевых условий, могут влиять также значения коэффициентов дифференциального оператора. При этом базисные свойства корневых функций могут изменяться даже при сколь угодном малом изменении значений коэффициентов. Такой факт был отмечен в работе В.А. Ильина. В настоящей работе построен характеристический определитель рассматриваемой спектральной задачи, который является целой аналитической функцией. Доказана теорема о неустойчивости свойств базисности корневых векторов и построен сопряженный оператор, который является задачей Самарского-Ионкина с интегральным возмущением.

Ключевые слова: собственные значение, корневые вектора, нагруженный оператор, базисность Рисса.

Аңдатпа

Иманбаев Н.С.[1,2]
[1]*Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті, Шымкент, Қазақстан*
[2]*Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан*

ЕКІНШІ РЕТТІ ЖҮКТЕЛІНГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ТҮБІРЛІК ВЕКТОРЛАРЫНЫҢ БАЗИСТІЛІК ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ОРНЫҚСЫЗДЫҒЫ ЖӘЙЛІ

Бұл мақалада регулярлы, бірақ күшейтілген регулярлы емес шеттік шарттармен берілген жүктелінген екінші ретті дифференциалдық операторды ң спектралдық есебі қарастырылады. Еселі дифференциалданатын жүктелген операторды ң түбірлік векторлар жүйесінің базистілігі зерттеледі. Өзіне өзі түйіндес шеттік шарттармен өзіне өзі түйіндес формальді дифференциалдық амалмен берілген, спектрі дискретті болатын операторды ң меншікті функцияларының жүйесінің ортонормаланған базис құратындығы белгілі жай. Сондай-ақ , өзіне өзі түйіндес емес жай дифференциалдық операторлардың түбірлік векторларының жүйесінің базистілігіне