МРНТИ 27.31.17
УДК 517 (519)

https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.07

П.Б. Бейсебай[1], *Г.Х. Мухамедиев*[2]

[1] *С.Сейфулллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті, Нұр-Сұлтан қ., Қазақстан*
[2] *С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан*

ЕРІКТІ РЕТТІ ТҰРАҚТЫ КОЭФФИЦИЕНТТІ СЫЗЫҚТЫҚ БІРТЕКТІ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУДІҢ ШЕШІМДЕРІНІҢ ФУНДАМЕНТАЛДЫ ЖҮЙЕСІН ҚҰРУ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Жұмыста «Ерікті ретті тұрақты коэффициентті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің фундаменталды шешімдер жүйесінің құрылуы» тақырыбин баяндаудың бір әдістемесі ұсынылады. Берілген тақырыптың дәстүрлі баяндалуында, дифференциалдық теңдеудің сипаттамалық теңдеуінің комплекс түбірлері бар болған жағдайда, дифференциалдық теңдеудің оларға сәйкес дербес шешімдері комплекс талдау элементтеріне сүйене отырып тұрғызылады. Соның салдарынан, мұндай жағдайлда, оқу бағдарламаларына сызықтық дифференциалдық теңдеулер теориясы енгізіліп, ал комплекс талдау теориясы енгізілмеген мамандықтардың студенттеріне дербес шешімдердің түрлері негіздеусіз, белгілі факт ретінде беріледі немесе, тек осы жағдай үшін, алдын ала комплекс талдау элементтері беріледі.

Жұмыста ұсынылған әдістеменің дәстүрлі әдістемеден ерекшелігі, ерікті ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық дифференциалдық теңдеудің сызықтық тәуелсіз дербес шешімдерінің фундаменталды жүйесін тұрғызу сұлбасының, тек теңдеудің сол жақ бөлігіне сәйкес дифференциалдық сұлбаның қасиеттері негізінде, комплекс талдау теориясының элементтерін қолданбай құрылуында.

Түйін сөздер: дифференциалдық сұлба, сипаттамалық көпмүшелік, біртекті теңдеу, дербес шешім.

Аннотация

П.Б. Бейсебай [1], *Г.Х. Мухамедиев* [2]
[1] *Казахский агротехнический университет имени С.Сейфулллина, г. Нур-Султан, Казахстан*
[2] *Восточно-Казахстанский государственный университет имени С. Аманжолова, г. Усть-Каменогорск, Казахстан*

О ПОСТРОЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ОДНОРОДНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

В работе предлагается одна методика изложения темы «Построение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения произвольного порядка с постоянными коэффициентами». При традиционном изложении данной темы в случае, когда характеристическое уравнение имеет комплексные корни, соответствующие им частные решения уравнения строятся посредством применения элементов комплексного анализа. В следствии чего, для обучающихся по специальностям, в чьи учебные программы включена теория линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и в то же время не включено изучение теории комплексного анализа, виды частных решенииуравнения в данном случае выдается без обоснования, как известный факт или, только ради этого случая, предварительно выдаются элементы комплексного анализа.

Предлагаемая в работе методика изложения отличается от традиционного изложения данной темы тем, что в ней схема построения фундаментальной системы частных решений однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами произвольного порядка строится только на основе свойств дифференциальной формы, соответствующей левой части уравнения, не используя при этом элементы теории комплексного анализа.

Ключевые слова: дифференциальная форма, характеристический многочлен, однородное уравнение, частное решение.

Abstract

ON THE CONSTRUCTION OF A FUNDAMENTAL SYSTEM OF SOLUTIONS OF A LINEAR HOMOGENEOUS DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS OF AN ARBITRARY ORDER

Beisebay P.B.[1], Mukhamediev G.H.[2]
[1]S.Seifullin Kazakh Agrotechnical University, Nur-Sultan, Kazakhstan
[2]C. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

The paper proposes a method of presentation topics «On the construction of a fundamental system of solutions of a linear homogeneous differential equation with constant coefficients of an arbitrary order». In the traditional presentation of this topic in the case when the characteristic equation has complex roots, the particular solutions of the equation corresponding to them are constructed by applying the elements of complex analysis. In consequence of that, for students in the field, whose training programs included the theory of linear differential equations with constant coefficients and at the same time does not include the study of the theory of complex analysis, types of private solving the equation in this case is given without substantiation, or as a known fact, only for this case, previously issued elements complex analysis. Offered in the presentation technique differs from the traditional presentation of the topic in that it partial solutions scheme for constructing fundamental system of homogeneous linear equation with constant coefficients of arbitrary order is based only on the basis of the properties of the differential form corresponding to the left side of the equation, without using the elements of the theory of complex analysis.
Keywords: differential form, characteristic polynomial, homogeneous equation, partial solution.

Ерікті ретті тұрақты коэффициентті

$$y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y = 0 \tag{1}$$

сызықтық теңдеуінің сызықты тәуелсіз дербес шешімдерін табу жолын қарастырамыз.

Теңдеудің сол жағына сәйкес дифференциалдық сұлба деп аталатын

$$L_n(y) = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + p_0 y \tag{2}$$

өрнегін енгіземіз.

k айнымалысына қатысты

$$P_{L_n}(k) = k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots. + p_1 k + p_0 \tag{3}$$

көпмүшелігін (2) сұлбасының сипаттамалық көпмүшелігі, ал

$$k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \ldots. + p_1 k + p_0 = 0 \tag{4}$$

теңдеуін (1) теңдеуінің сипаттамалық теңдеуі деп атаймыз.

Дифференциалдық сұлбалар мен сипаттамалық көпмүшкөпмүшеліктер өзара бірмәнді сәйкестікте болады.

$L_{P(k)}(y)$ түрінде $P(k)$ көпмүшелігіне сәйкес сұлбаны белгілейміз. Дифференциалдық сұлбалар келесі тұжырымдар орынды болады:

Тұжырым 1.

Егер (3)сипаттамалық көпмүшелігі

$$P_{D_n}(k) = Q_s(k)G_l(k)$$

түрінде жіктелсе, онда $L_n(y)$ дифференциалдық формасы (3) түріндегі $Q_s(k)$ және $G_l(k)$ ($s + l = n$) көпмүшеліктері арқылы

$$L_n(y) = L_{Q_s(k)}\left(L_{Q_s(k)}(y)\right)$$

түрінде жазылады.

Тұжырым 2.

Егер $w = 0$ болса, онда кез келген $n = 1,2,...$ және $m = 1,2,...$ үшін $L_n^m(w) = \underbrace{L_n(L_n...L_n(w))}_{m \text{ рет}} = 0$.

Тұжырым 3.

$L_n^m(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2) = \lambda_1 L_n^m(y_1) + \lambda_2 L_n^m(y_2)$, мұндағы $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, w_1, w_2 - n рет дифференциалданатын функциялар.

Тұжырым 4.

$L_n^m(w^{(s)}) = (L_n^m(w))^{(s)}$, $n = 1,2,...,$ $m = 1,2,...$, $s = 1,2,...$.

Тұжырым 5.

Кез келген үшін $L_n(xw) = xL_n(w) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_{n-i}w^{(n-i-1)}$, $n = 1,2,...$.

1–5 тұжырымдары дифференциалдық сұлба мен туынды табу ережелерінен шығады.

Тұжырым 6. Егер $L_n(w) = 0$ болса, онда $L_n^2(x^{m-1}w) = 0$ болады.

Бұл тұжырымның ақиқаттығы

$$L_n^2(xw) = L_n(L_n(xw)) = L_n\left(xL_n(w) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_{n-i}w^{(n-i-1)}\right) =$$

$$= L_n(xL_n(w)) + \sum_{i=0}^{n-1}(n-i)p_{n-i}(L_n(w))^{(n-i-1)}.$$

теңдігінен шығады.

Салдар 1. Егер $L_n(w) = 0$ болса, онда

$$L_n^m(x^{m-1}w) = 0, \; m = 1,2,... \tag{5}$$

Салдар 2. Егер $L_n(w) = 0$ болса, онда

$$L_n^m(x^{s-1}w) = 0, \; m = 1,2,... \;, s = 1,2,...,m \tag{6}$$

Бұл салдардың ақиқаттығы $L_n^m(x^{s-1}w) = L_n^{m-s}(L_n^s(x^{s-1}w))$ теңдігінен шығады.

Енді (1) теңдеуінің сызықты тәуелсіз дербес шешімдерін анықтау мәселесін қарастырамыз.

Кез келген көпмүшеліктің сызықтық немесе дискриминанты теріс квадрат үшмүшелік түріндегі көбейткіштердің дәрежелеріне, яғни $P_{L_n}(k)$ сипаттамалық көпмүшелігінің көбейткіштерге

$$P_{L_n}(k) = (k-k_1)^{m_1} \cdot (k-k_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (k-k_\vartheta)^{m_\vartheta}(k^2 + p_1 k + q_1)^{l_1} \cdot (k^2 + p_2 k + q_2)^{l_2} \cdot ... \cdot (k^2 + p_\mu k + q_\mu)^{l_\mu} \tag{7}$$

түрінде жіктелінетіні белгілі, мұндағы $m_1, m_2, ..., m_\vartheta$, $l_1, l_2, ..., l_\mu$ - оң бүтін сандар, $m_1 + m_2 + ... + m_\vartheta + 2(l_1 + l_2 + ... + l_\mu) = n$ және кез келген $j = 1,2,..., l_m$ үшін $D_j = p_j^2 - 4q_j < 0$ (яғни $k^2 + p_j k + q_j$ квадрат үшмүшелігі теріс дискриминантты).

Біз, алдымен, (6) жіктелуінің әрбір көбейткішіне (1) теңдеуінің қандай шешімдері сәйкес келетінін қарастырамыз.

(6) жіктелінуінде $(k-b)^m$ түріндегі көбейткіш бар болсын. Бұл жағдайда (2) сұлбасының $P_{L_n}(k)$ сипаттамалық көпмүшелігі, жіктелінуінде $k-b$ көбейткіші жоқ $P_{L\,n-m}(k)$ көпмүшелігі арқылы көбейткіштерге

$$P_{L_n}(k)=P_{L\,n-m}(k)(k-b)^m,\ m=1,2,\dots,n-1, \tag{8}$$

түрінде жіктелінеді.

Тұжырым 1 бойынша (8) жіктелінуіне дифференциалдық сұлбаның $L_n(y)=L_{n-m}(L_1^m(y))$, өрнектелінуі сәйкес келеді, мұндағы $L_{n-m}(y)=L_{P_{n-m}(k)}(y)$, $L_1(y)=y'-by.$

$y=e^{bx}$ функциясы үшін $L_1(y)=y'-by=0$ болғандықтан, тұжырым 2 мен (6) және $L_n(x^{s-1}y_s)=L_{n-m}(L_1^m(x^{s-1}y_s))$ теңдіктерінен

$$e^{k_i x}, xe^{k_i x},\dots, x^{m_i-1}e^{k_i x} \tag{9}$$

функцияларының (1) теңдеуінің m сызықтық тәуелсіз шешімдері болатынын аламыз.

Сонымен, $P_{L_n}(k)$сипаттамалық көпмүшелігінің көбейткіштерге (8) түріндегі жіктелуіндегі $(k-b)^m$ көбейткішіне (1) теңдеуінің (9) түріндегі m сызықты тәуелсіз шешімдері сәйкес келетінін алдық.

Сол сияқты, егер (2) сұлбасының сипаттамалық көпмүшелігі,жіктелінуінде $y''+py'+qy$ көбейткіші жоқ $P_{L\,n-2l}(k)$ көпмүшелігі арқылы, көбейткіштерге

$$P_{L_n}(k)=P_{n-2l}(k)\cdot(k^2+pk+q)^l,\ l\in N,\ 2l<2n, \tag{10}$$

түрінде жіктелінсе, онда $L_n(y)$ дифференциалдық сұлбасының, $L_2(y)=y''+py'+qy$ сұлбасы арқылы, $L_n(y)=L_{n-2l}(L_2^l(y))$ түрінде жазылуынан,

$$L_2(y)\equiv y''+py'+qy=0 \tag{11}$$

теңдеуінің нөлден өзгеше әр бір нөлдік емес y шешіміне(1) теңдеуінің

$$y, xy,\dots, x^{l-1}y \tag{12}$$

түріндегі l сызықтық тәуелсіз шешімдері сәйкес келетінін аламыз.

[1] жұмысында, $D<0$ жағдайында, $y=u(x)v(x)$ ауыстыруын енгізу арқылы, комплекстік талдау элементтеріне жүгінбей ақ,

$$y_1=e^{-\frac{p_j}{2}}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\quad y_2=e^{-\frac{p_j}{2}}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$$

функцияларының (11) теңдеуінің сызықты тәуелсіз шешімдері болатыны көрсетілген болатын.

Осы шешімдерді (12) жүйесіне кезек кезек қоя отырып (1) теңдеуінің

$$e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\ xe^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\dots,\ x^{m_i-1}e^{-\frac{p}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D}}{2}x,$$
$$e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\ xe^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x,\dots,\ x^{m_i-1}e^{-\frac{p}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D}}{2}x$$

$2l$ сызықты тәуелсіз шешімдерін аламыз.

Қорыта келе, $P_{L_n}(k)$ сипаттамалық көпмүшелігінің (7) жіктелуінің $(k-k_i)^{m_i}$, $i=1,2,...,\vartheta$, түріндегі әрбір көбейткішіне (1) теңдеуінің (9) түріндегі m_i сызықты тәуелсіз шешімдері және $\left(k^2+p_jk+q_j\right)^{l_j}$, $j=1,2,...,\mu$, түріндегі әрбір көбейткішіне (13) түріндегі $2l_j$ сызықты тәуелсіз шешімдері сәйкес келетінін алдық.

Нәтижесінде, (7) жіктелуі бойынша (1) теңдеуінің барлығы $m_1+m_2+...+m_\vartheta+2(l_1+l_2+...+l_\mu)=n$ сызықтық тәуелсіз шешімдерін, яғни (1) теңдеуінің шешімдерінің фундаменталды жүйесін аламыз.

Осы қортынды негізінде, ерікті ретті тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеуінің дербес шешімдерінің фундаментальді жүйесін құрудың келесі схемасына келеміз:

$y^{(n)}+p_{n-1}y^{(n-1)}+....+p_0y=0$ - тұрақты коэффициентті біртекті сызықтық теңдеу;

$P_{L_n}(k)=k^n+p_{n-1}k^{n-1}+....+p_1k+p_0$ - сипаттамалық көпмүшелік;

$P_{L_n}(k)=(k-k_1)^{m_1}\cdot(k-k_2)^{m_2}\cdot...\cdot(k-k_\vartheta)^{m_\vartheta}\left(k^2+p_1k+q_1\right)^{l_1}\cdot\left(k^2+p_2k+q_2\right)^{l_2}\cdot...\cdot\ \left(k^2+p_\mu k+q_\mu\right)^{l_\mu}$ - сипаттамалық көпмүшеліктің қарапайым көбейткіштерге жіктелінуі;

$m_1+m_2+...+m_\vartheta+2(l_1+l_2+...+l_\mu)=n$;

$D_j=p_j^2-4q_j<0$, $j=1,2,...,\mu$.

$P_{L_n}(k)$ *көпмүшелігінің көбейткіштерге жіктелінуінің қарапайым көбейткіші*	*Теңдеудің қарапайым көбейткішке сәйкес дербес шешімдері*
$(k-k_i)^{m_i}$, $i=1,2,...,\vartheta$	$e^{k_ix}, xe^{k_ix},...., x^{m_i-1}e^{k_ix}$
$\left(k^2+p_jk+q_j\right)^{l_j}$, $j=1,2,...,\mu$.	$e^{-\frac{p_j}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x,\ xe^{-\frac{p_j}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x,...,\ x^{m_j-1}e^{-\frac{p_j}{2}x}\sin\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x,$ $e^{-\frac{p_j}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x,\ xe^{-\frac{p_j}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x,...,\ x^{m_j-1}e^{-\frac{p_j}{2}x}\cos\frac{\sqrt{-D_j}}{2}x$

Пайдаланған әдебиеттер тізімі:

1 *Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімін құру тақырыбын оқытудың бір әдістемесі // Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2011.-№3(35).-С.71-77.*

2 *Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Об одном подходе к построению частных решений линейного дифференциального уравнения // Вестник Павлодарского государственного университета имени С. Торайгырова. «Физико-математическая серия». - №4, 2011. -С.32-40.*

3 *Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Об одной методике изложения темы «Построение частных решений линейного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами» // Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2012. №2(38). -С.47-53.*

4 *Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дифференциалдық теңдеулер мен теңдеулер жүйесінің шешімдерін құру туралы// Вестник Казахского национального педагогического университета имени Абая. Серия «Физико-математические науки». - 2019.-№3(67).-С.26 - 31.*

5 *Түнғатаров Ә.. Жоғары математика. Экономикалық мамандықтарға арналған курс. 2-бөлім. Оқу құралы. - Алматы, 2000.- 104 б.*

6 *Высшая математика для экономистов. Под ред. Н.Ш. Кремера. 3-е изд.- М.: 2007. - 479 с.*

7 *Клюшин В.Л. Высшая математика для экономистов. 2-изд. – ЮРАЙТ: 2016.- 448 с.*

References:

1 Bejsebaj P.B., Muhamediev G.H. (2011) Ekinshi retti turakty kojefficientti syzyktyk differencialdyk tendeudin zhalpy sheshimin kuru takyrybyn okytudyn bir adistemesi [One of the methods of teaching the topic of building a general solution of a linear differential equation with constant coefficients of the second order]. Vestnik Kazahskogo nacional'nogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki».№3(35). 71-77. (In Kazakh)

2 Bejsebaj P.B., Muhamediev G.H. (2011) Ob odnom podhode k postroeniju chastnyh reshenij linejnogo differencial'nogo uravnenija [On a single approach to the construction of individual solutions of linear differential equations]. Vestnik Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta imeni S. Torajgyrova. «Fiziko-matematicheskaja serija». №4, 32-40. (In Russian)

3 Bejsebaj P.B., Muhamediev G.H. (2012) Ob odnoj metodike izlozhenija temy «Postroenie chastnyh reshenij linejnogo differencial'nogo uravnenija vtorogo porjadka s postojannymi kojefficientami» [Construction of individual solutions of linear differential equations of the second order with constant coefficients]. Vestnik Kazahskogo nacional'nogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». №2(38). 47-53. (In Russian)

4 Bejsebaj P.B., Muhamediev G.H. (2019) Ekinshi retti turakty kojefficientti syzyktyk differencialdyk tendeuler men tendeuler zhүjesinin sheshimderin kuru turaly [On the construction of solutions of linear differential equations and systems of equations with constant coefficients of the second order]. Vestnik Kazahskogo nacional'nogo pedagogicheskogo universiteta imeni Abaja. Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». №3(67) .26-31. (In Kazakh)

5 Tүngatarov Ә. (2000) Zhogary matematika [Higher mathematics.]. Jekonomikalyk mamandyktarga arnalgan kurs. 2-bolim. Oku kuraly. Almaty, 104. (In Kazakh)

6 Vysshaja matematika dlja jekonomistov (2007) [Higher mathematics for economists]. Pod red. N.Sh. Kremera. 3-e izd. M.:479. (In Russian)

7 Kljushin V.L. (2016) Vysshaja matematika dlja jekonomistov [Higher mathematics for economists]. 2-izd. JuRAJT: 448. (In Russian)