МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2023.84.4.003

М.А. Бектемесов[1], С.И. Кабанихин[2,3], Е.Ж. Курышбаев[1]*

[1]Казахский национальный педагогический университет им. Абая, г. Алматы, Казахстан
[2]Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, г. Новосибирск, Россия
[3]Новосибирский государственный университет, г. Новосибирск, Россия
[*]e-mail:yerke1984@gmail.com

ВИЗУАЛИЗАЦИЯ ОБЛАСТИ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НА КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ

Аннотация

В статье рассматривается алгоритм получения изображения самоподобного объекта, который является результатом вычисления относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши второго порядка с помощью итерационного процесса. Построенный графический алгоритм позволил моделировать изображение множества для изучения, например, для выявления областей устойчивости решения задачи. С помощью программы можно наблюдать при каких условиях и на каких точках значение погрешности может стремиться к бесконечности или оставаться в области определенных значений. Полученная модель позволяет определить характер изменений множества в зависимости от исходных параметров, таких как шаг дискретизации, точность оценки, области на комплексной плоскости. Приводится компьютерный графический анализ указанных явлений. Компьютер можно превратить в своеобразный микроскоп и наблюдать с его помощью за поведением границ области.

Ключевые слова: самоподобие, дифференциальные уравнения, относительная погрешность, математическое моделирование.

М.А. Бектемесов[1], С.И. Кабанихин[2,3], Е.Ж. Құрышбаев[1]
[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]РҒА СБ Есептеу математикасы және математикалық геофизика институты, Новосибирск, Ресей
[3]Новосибирск мемлекеттік университеті, Новосибирск, Ресей

КЕЙБІР ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕР ҮШІН ОРНЫҚТЫЛЫҚ АЙМАҒЫН КОМПЛЕКС ЖАЗЫҚТЫҚТА БЕЙНЕЛЕУ

Аңдатпа

Мақалада итерациялық процессті пайдалана отырып, екінші ретті Коши есебін шешуге арналған әр түрлі шекті-айырымдық сұлбаларының салыстырмалы қателігін есептеу арқылы қалыптасатын өзіне-өзі ұқсас объектінің кескінін алу алгоритмі қарастырылады. Құрылған графикалық алгоритм зерттеуге арналған жиынтық бейнесін имитациялауға, мысалы, есепті шешу үшін тұрақтылық аймақтарын анықтауға мүмкіндік берді. Бағдарламаның көмегімен қандай жағдайларда және қандай нүктелерде қателік мәні шексіздікке ұмтылатынын немесе белгілі бір мәндер аймағында қалатынын байқауға болады. Алынған модель дискретизация қадамы, бағалау дәлдігі, күрделі жазықтықтың аумақтары сияқты бастапқы параметрлерге байланысты жиынтықтағы өзгерістердің сипатын анықтауға мүмкіндік береді. Бұл құбылыстардың компьютерлік графикалық талдауы берілген. Компьютерді микроскоптың бір түріне айналдырып, оны аймақтың шекараларының мінез-құлқын бақылау үшін пайдалануға болады.

Түйін сөздер: өзіне-өзі ұқсастық, дифференциалдық теңдеулер, салыстырмалы қателік, математикалық модельдеу.

M.A. Bektemessov [1], S.I. Kabanikhin [2,3], Ye.Zh. Kuryshbayev [1]
[1]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia
[3]Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia

VISUALIZATION OF THE STABILITY AREA FOR SOME DIFFERENTIAL EQUATIONS ON THE COMPLEX PLANE

Abstract

The article considers the algorithm of obtaining self-similar object, which forms by calculating the relative error of various finite-difference schemes for solving the second-order Cauchy problem using iterative process. The constructed graphical algorithm made it possible to simulate the image of the set for study, for example, to identify areas of stability for solving the problem. Using the program, it is possible to observe under what conditions and at what points the relative error value tends to infinity or remains in the area of certain values. The resulting model allows you to determine the nature of the changes in the set depending on the initial parameters, such as discretization step, estimation accuracy, areas of the complex plane. A computer graphical analysis of these phenomena is given. The computer can be turned into a kind of microscope and use it to observe the behavior of the boundaries of the region.

Keywords: self-similarity, differential equations, approximation error, mathematical modeling.

Введение

Самоподобие – это свойство объектов или паттернов, которые являются схожими на разных масштабах. Самоподобие – ключевое понятие в изучении фракталов. Понятие фракталов проникло в разные области естественных и социальных наук, а также оно сделало математику новым инструментом искусства. Инструменты фрактальной геометрии сегодня являются незаменимыми элементами в работе многих физиков, химиков, биологов, физиологов, экономистов и т.д., поскольку эти инструменты позволяют переформулировать старые проблемы в новых терминах и рассматривать сложные процессы в очень упрощенном виде. Фрактальные формы долгое время считались непримиримыми математическими отклонениями. Но сейчас их можно увидеть в основе таких разнообразных явлений и структур, как распределение звезд во Вселенной, альвеолярное ветвление в легких, размытая граница облака, колебания цен на рынке и т.д. Фракталы есть и в электрохимических процессах, а также они скрыты в динамике роста численности популяций. Фракталы произвели революцию в технологии создания и воспроизведения изображений.

Фрактальная геометрия коренным образом изменила взгляд на вещи. Британский и американский математик, работавший над фрактальной компрессией, Майкл Барнсли утверждал, что, изучая фракталы, можно навсегда потерять безобидный образ облаков, лесов, галактик, листьев, перьев, цветов, скал, гор, гобеленов и многого другого, потому что фрактальная геометрия никогда не вернет прежние толкование образов всех этих объектов, которые до этого были знакомы [1].

Фрактальные объекты существовали задолго до формального развития фрактальной геометрии. Еще в начале XX века математиками Жюлиа и Фату было открыто нелинейное итерационное отображение с комплексными аргументами [2-4], но «разглядеть» его на экране дисплея впервые удалось Мандельброту [5]. И перед учеными наглядно открылся виртуальный мир комплексных чисел. В этой работе изучается графическое представление самоподобного объекта, который формируется с помощью вычисления относительной погрешности на комплексной плоскости. Относительная погрешность решения задачи Коши второго порядка получена с использованием дифференциальных исчислений. Еще в 1980-х годах А.Л. Бухгеймом и М.А. Бектемесовым была выявлена возможность получения фрактальных изображений из дифференциальных уравнений при изучении устойчивости их решений и сходимости разностных схем с помощью итерационного процесса [6]. Цель исследования состоит в том, чтобы установить графический алгоритм для данного множества и смоделировать изображение множества для изучения. Для удобства визуализации модели данный алгоритм переводится в программное обеспечение. Моделирование показывает, что параметры, такие как шаг дискретизации, точность оценки, области на комплексной плоскости влияют на устойчивость.

Методология исследования

Постановка задачи

Рассматривается задача Коши второго порядка:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{dt^2} = \lambda u, t \in [0,T] & (1) \\ u(0) = 0 & (2) \\ u'(0) = 1 & (3) \end{cases}$$

здесь: $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ – комплексное число; $a, b \in \mathbb{R}$ – действительные числа.

Точное решение при начальных условиях (2), (3) имеет вид:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{e^{\sqrt{\lambda}t} - e^{-\sqrt{\lambda}t}}{2}\right] \tag{4}$$

Запишем функции $u(t)$ для узла t_j следующим образом $u_j = u(t_j) = u(\tau j)$, где: $t_j = \tau j; \tau = \frac{T}{N}$, $j = \overline{0, N}$, N – количество делений в интервале $t \in [0,T]$:

$$u(t_j) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\left[\frac{e^{\sqrt{\lambda}t_j} - e^{-\sqrt{\lambda}t_j}}{2}\right] \tag{5}$$

или

$$u(t_N) = \frac{1}{2\sqrt{\lambda}}\left[e^{\sqrt{\lambda}\tau N} - e^{-\sqrt{\lambda}\tau N}\right] \tag{6}$$

Разностное решение задачи

Уравнения (1)-(3) можно написать в разностном виде:

$$\begin{cases} \dfrac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{\tau^2} = \lambda u_j \\ u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{j+1} - u_j(2 + \lambda\tau^2) + u_{j-1} = 0 & (7) \\ u_0 = 0 & (8) \\ u_1 = 1 & (9) \end{cases}$$

Уравнение (7) представим в следующем виде:

$$u_{j+1} - u_j[R + S] + RSu_{j-1} = 0$$

где:

$$\begin{cases} R + S = 2 + \lambda\tau^2 = \mu \\ RS = 1 \end{cases}$$

здесь R и S:

$$R = \frac{1}{2}\left[2 + \lambda\tau^2 + \tau\sqrt{4\lambda + \lambda^2\tau^2}\right] \qquad S = \frac{1}{2}\left[2 + \lambda\tau^2 - \tau\sqrt{4\lambda + \lambda^2\tau^2}\right]$$

Тогда уравнение (7) можно представить в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} u_{j+1} - Ru_j = \tau\omega_j \\ \omega_{j+1} - S\omega_j = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_{j+1} = Ru_j + \tau\omega_j & (10) \\ \omega_{j+1} = S\omega_j & (11) \end{cases}$$

а из (8) и (9):

$$\begin{cases} u_0 = 0 & (12) \\ \omega_0 = 1 & (13) \end{cases}$$

Тогда разностное решение на N-м слое для задачи:

$$u_N = \tau \sum_{i=1}^{N} S^{N+1-2i} \tag{14}$$

Визуализация относительной погрешности

Далее вычисляется относительная погрешность решений задачи Коши по формуле:

$$P = \frac{|u(t_N) - u_N|}{|u(t_N)|} \tag{15}$$

Для относительной погрешности производятся вычисления с помощью следующих формул: алгебраическая, тригонометрическая, показательная форма комплексного числа, модуль и аргумент комплексного числа, формула Эйлера и Муавра.

Если рассматривать множество (см. рисунок 1), полученное из формулы относительной погрешности (15) на комплексной плоскости, то значения точек, лежащих вне этих множеств, стремятся к бесконечности. А числа, которые находятся внутри множеств, могут совершать колебательные движения. Область, где появляется неустойчивость, смещается к границе множества, и его траектория вырисовывается особым образом, и именно здесь появляются удивительно красивые формы. На комплексной плоскости результат вычисления относительной погрешности (15) может принимать следующие значения [6]:

- стремится к бесконечности;
- стремится к нулю;
- не выходит из области определенных значений;
- будет в упорядоченном хаотическом состоянии;

причем данные зоны на плоскости могут повторяться и чередоваться, подчиняясь определённой закономерности.

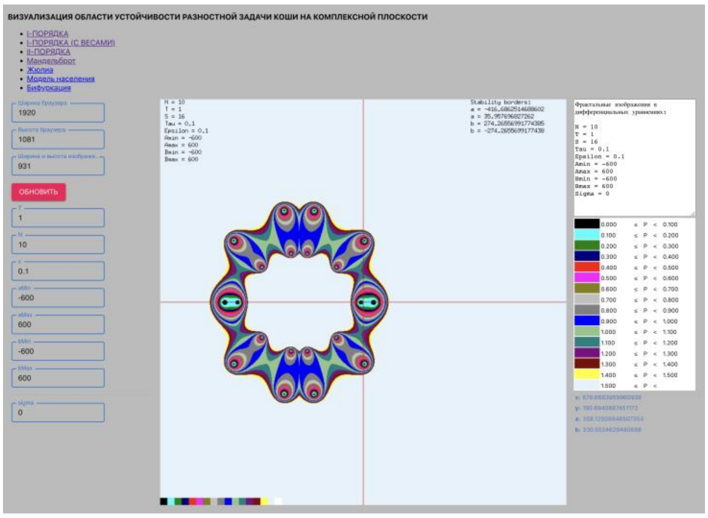

Рисунок 1. Визуализация области устойчивости разностной задачи Коши второго порядка на комплексной плоскости

Самоподобие

Полученное множество, это – пример самоподобного объекта (см. рисунок 2), который был сгенерирован из дифференциального уравнения путем анализа устойчивости его решений с помощью итерационного процесса.

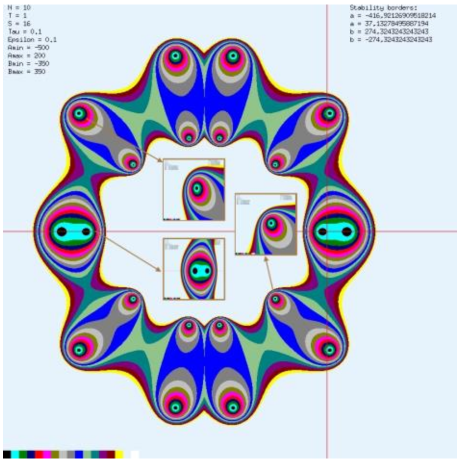

Рисунок 2. Самоподобный объект

Следует отметить, что фракталы и самоподобные объекты, полученные при решении дифференциальных уравнений, имеют между собой схожие свойства и различия [7]. Далее приведем:

сходства

- демонстрируют сложное и иногда хаотичное поведение;
- используются для генерации фрактальных паттернов;
- требуют итеративных вычислений;

различия

- фракталы (например, множество Мандельброта) – это чисто математическое понятие, в то время как дифференциальные уравнения имеют широкий спектр применений в разных областях науки;
- фракталы базируются на комплексных числах, а дифференциальные уравнения включают в себя производные от одной или нескольких переменных;
- фракталы детерминированы, то есть, их поведение полностью определяется начальными условиями и константами в уравнении. А самоподобные объекты из дифференциальных уравнений часто предполагают случайное или стохастическое поведение (численные эксперименты и визуализация результатов над полученным множеством как раз подтверждают данный пункт, особенно, уменьшение шага дискретизации сильно влияет на поведение множества);
- фракталы проявляют самоподобие в разных масштабах, в то время как множества из дифференциальных уравнений часто демонстрируют сложные и нерегулярные паттерны, которые иногда не являются самоподобными.

Таким образом, фракталы и самоподобные объекты, приведенные выше, имеют некоторые сходства с точки зрения их сложного и итеративного поведения, но они представляют собой принципиально разные математические концепции с различными приложениями и свойствами.

Анализ полученных данных

Полученное множество имеет кольцеобразный вид, внутри кольца и за его пределами находятся сравнительно большие области неустойчивости. Данные области усиливаются (стремятся к бесконечности), особенно в центре кольца, например, на точке с координатами $a = -190, b = 0$, значение относительной погрешности равно $P = 3.93 \times 10^{20}$.

По изображению множества заметно, что центр кольца смещен влево по действительной оси, и находится по координатам $a = -190, b = 0$. Внутренний радиус кольца варьируется в пределах от 143 до 150, а внешний радиус – от 265 до 300.

Можно построить график используя координаты центров устойчивых зон. Кривая графика проходит через центры устойчивых зон и образует линию, которая проходит через аттракторы (см. рисунок 3). Поиск данной функции можно рассмотреть, как отдельную задачу.

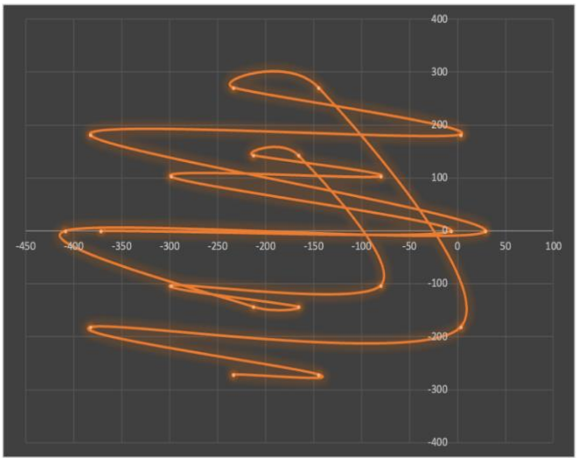

Рисунок 3. График, построенный с помощью ИИ
по координатам центров устойчивых зон полученного множества

При увеличении точности оценки, например, при $\varepsilon = 0{,}01$, можно заметить, что множество сконцентрируется около устойчивых зон (см. рисунок 4).

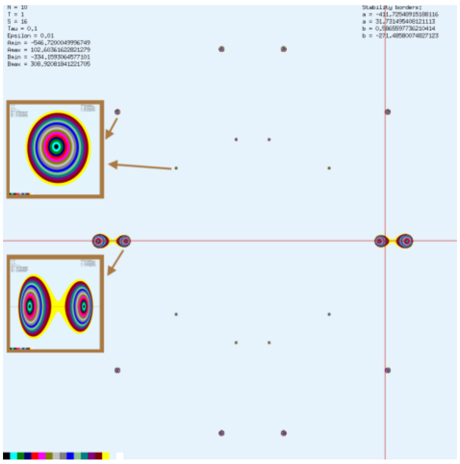

Рисунок 4. Концентрация множества при увеличении точности оценки, при ε=0,01

Но, как показал эксперимент, нельзя бесконечно уменьшать шаг дискретизации τ, например, уже при $\tau = 0{,}007$ в центре множества, где значение относительной погрешности раньше стремилось к бесконечности, начинает образовываться новая устойчивая зона, то есть значение относительной погрешности здесь уже стремится к нулю. А при $\tau = 0{,}001$, множество вовсе приобретает новое очертание – в центре изображения будет располагаться большая область устойчивости, затем неустойчивая область, после идет само множество с устойчивыми зонами, затем снова область неустойчивости, и в конце стабильно устойчивая зона (см. рисунок 5), то есть в данном случае множество явно демонстрирует стохастическое поведение, но при этом множество не теряет свойства самоподобия.

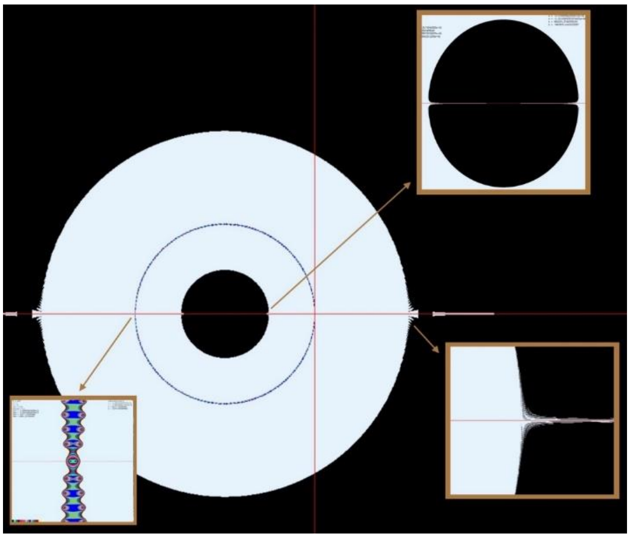

Рисунок 5. Стохастическое поведение множества при τ=0.001

Результаты исследования

Итерационные процессы

Полученное множество является результатом вычисления относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши второго порядка с помощью итерационного процесса на комплексной плоскости. На плоскости нельзя получить полное представление о поведении множества, используя лишь черно-белую цветовую гамму. Сложную фрактальную структуру множества можно отразить только в цвете, где цвет точки выбирается в зависимости от значения погрешности, точнее от «убегания» данного значения в этой точке к своему аттрактору [8] (это бесконечность, ноль или определенное постоянное значение). Это требует длительного экспериментирования на компьютере, что само по себе является интересной задачей. Такие эксперименты могут породить новые идеи, которые должны быть доказаны математически в последующем. А сама идея получения самоподобных объектов из дифференциальных уравнений была выдвинута еще в 1980-х годах. В этих работах изучались вопросы устойчивости разностных схем для некорректно поставленной задачи Коши [9]. Программа написана на языках Golang и ReactJS, что позволило изучить и исследовать на компьютере данное множество с разных масштабов.

Заключение

В этом исследовании была представлена графическая модель фрактала, который формируется вычислением относительной погрешности различных конечно-разностных схем решения задачи Коши. Построенный графический алгоритм позволил смоделировать изображение множества для изучения областей устойчивости решения задачи, а также самоподобия в разных масштабах.

Список использованной литературы:

1 *Barnsley M., Hawley R. Fractals Everywhere. Elsevier Science, 1993. p. 1-2.*

2 *Julia, Gaston (1918). "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles" (PDF). Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (in French). 1: 47–245.*

3 *Pierre Fatou (1917) "Sur les substitutions rationnelles", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, vol. 164, pages 806–808 and vol. 165, pages 992–995.*

4 Sutherland, Scott. (2014). An Introduction to Julia and Fatou Sets. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 92. 37-60. 10.1007/978-3-319-08105-2__3.

5 Мандельброт Б. Фрактальная геометрия природы. Москва: Институт компьютерных исследований, 2002, 656 стр.

6 Бектемесов М.А. Фракталдар. Орнықтылық және жинақтылық. Алматы, КазНПУ им. Абая 2010 г. с.5.

7 Falconer, K. (2003). Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons. p. 286.

8 Хабибуллин, Булат, и Цыганов, Шамиль. (2001). Фракталы и комплексная динамика. В кн.: Российская наука на заре нового века. Сборник научно-популярных статей. Под редакцией академика В.П. Скулачева. В кн.: Российская наука на заре нового века. Сборник научно-популярных статей. Под редакцией академика В.П. Скулачева. М.: Научный мир/Природа. 2001. РФФИ. 496 стр. ISBN 5-89176-134-3. С. 64-74.

9 А. Л. Бухгейм, Об устойчивости разностных схем для некорректных задач, Докл. АН СССР, 1983, том 270, номер 1, С. 26–28.

References:

1 Barnsley M., Hawley R. Fractals Everywhere. Elsevier Science, 1993. p. 1-2.

2 Julia, Gaston (1918). "Mémoire sur l'itération des fonctions rationnelles" (PDF). Journal de Mathématiques Pures et Appliquées (in French). 1: 47–245.

3 Pierre Fatou (1917) "Sur les substitutions rationnelles", Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, vol. 164, pages 806–808 and vol. 165, pages 992–995.

4 Sutherland, Scott. (2014). An Introduction to Julia and Fatou Sets. Springer Proceedings in Mathematics and Statistics. 92. 37-60. 10.1007/978-3-319-08105-2__3.

5 Mandelbrot B. The fractal geometry of nature [Fractal geometry of nature]. Moscow: Institute of Computer Research, 2002, 656. (In Russian)

6 Bektemesov M.A. Fraktaldar. (2010) Ornyktylyk zhane zhinaktylyk [Fractals. Stability and compactness]. Almaty, KazNPU Abai. p. 5. (In Kazakh)

7 Falconer, K. (2003). Fractal geometry: mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons. p. 286.

8 Khabibullin, Bulat & Tsyganov, Shamil. (2001). Fractals and complex dynamics [Fractals and complex dynamics]. In: Russian science at the dawn of the new century. Collection of popular science articles. Under the editorship of Academician V.P. Skulachev. In: Russian science at the dawn of the new century. Collection of popular science articles. Under the editorship of Academician V.P. Skulachev. Moscow: Scientific world/Nature. RFBR. 496 pp. ISBN 5-89176-134-3. 64-74. (In Russian)

9 A. L. Bukhgeim, Ob ustojchivosti raznostnyh shem dlja nekorrektnyh zadach [On the stability of difference schemes for ill-posed problems], Dokl. USSR Academy of Sciences, 1983, volume 270, number 1, 26–28. (In Russian)