МРНТИ 29.01

10.51889/2959-5894.2024.85.1.008

Т.Б. Қоштыбаев[1], М.Е. Алиева[2*], Б.Ә. Камал[2], Э.О. Құткелдиева[1]
[1]Қазақ ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]Абай атындағы Казақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[*]e-mail: moldir-2008@mail.ru

ДЕНЕНІҢ БІРҚАЛЫПТЫ ЖӘНЕ БІРҚАЛЫПСЫЗ ҚОЗҒАЛЫСТАРЫНЫҢ МАТЕМАТИКАЛЫҚ НЕГІЗДЕМЕСІ

Аңдатпа

Мақалада дененің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысын дене координаталарының өспелі немесе кемімелі арифметикалық прогрессиясы деп, ал осы қозғалыстың бірқалыпсыз (үдемелі) сипатқа ауысуы прогрессияның бұзылуы (ауытқуы) деп қарастырылған. Координаталардың уақыт бойынша өзгерістері бірқалыпты сипаттан ауытқыған кезде прогрессия жылдамдығы мен дененің секунд сайынға орын ауыстырулары өспелі немесе кемімелі прогрессияға түсетіні көрсетілген. Дене координаталарының сызықтық заңдылықпен өзгеру шарттарына арналған Ньютонның бірінші заңы мен координаталардың параболалық заңдылықпен өзгеруін қарастыратын Ньютонның екінші заңының математикалық тұтастығы айқындалған. Механикалық шамалардың (координатаның, жылдамдықтың, орын ауыстырулардың) уақыт бойынша өзгерістерін (қозғалыс теңдеулерін) сызықтық және сызықтық емес функциялар ретінде қарау, осы шамаларды графикалық және физикалық тұрғыда бағалау арқылы бірқалыпты және бірқалыпсыз қозғалыстардың математикалық (теориялық) негіздемесі берілген.

Түйін сөздер: бірқалыпты қозғалыс, үдеу, орын ауыстыру, жылдамдық, координата, прогрессия.

Т.Б. Коштыбаев[1], М. Е. Алиева[2], Б.А. Камал[2], Э.О. Куткельдиева[1]
[1]Казахский национальный женский педагогичесий университет, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстаны

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБОСНОВАНИЕ РАВНОМЕРНОГО И НЕРАВНОМЕРНОГО ДВИЖЕНИИ ТЕЛА

Аннотация

В статье равномерное прямолинейное движение рассматривается как растущая или убывающая арифметическая прогрессия координат тела, а его изменение на неравномерное (ускоренное) движение как нарушение (отклонение) прогрессии. Так же показано, что когда изменения координат по времени отклоняется от равномерного механического состояния, то скорость прогрессии и перемещения тела в каждую секунду изменяются по закону растущей или убывающей прогрессией. Определена математическая целостность первого закона Ньютона, описывающий изменения координат тела по линейному закону и второго закона Ньютона, рассматривающий изменение координат по закону параболы. Представлено математическое (теоретическое) обоснование равномерного и неравномерного движения, где изменения механических величин (координат, скорости, перемещений) по времени рассматриваются как линейные и нелинейные функций, в то же время оценивающее этих величин графический и физический.

Ключевые слова: равномерное движение, ускорение, перемещение, скорость, координата, прогрессия.

T. Koshtybayev [1], M. Aliyeva [2], B. Kamal [2], E. Kutkeldiyeva [1]
[1]Kazakh National Women's Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

MATHEMATICAL JUSTIFICATION OF UNIFORM AND UNEVEN MOVEMENT OF THE BODY

Abstract

In this article, uniform rectilinear motion is considered as an increasing or decreasing mathematical progression of the coordinates of the body, and its change to an uneven (accelerated) movement as a violation (deviation) of the progression. It is also shown that when the time coordinate changes deviate from a uniform position, the rate of progression and movement of the body in each second become a growing or decreasing progression. The mathematical integrity of the first Newton's law is determined, which is intended to consider changes in the coordinates of the body according to the linear law and the second Newton's law, which considers the change of coordinates according to the law of the parabola. The mathematical justification (theoretical) of uniform and uneven motion is given by graphical and physical representation of these quantities, considering changes in mechanical quantities (coordinates, velocities, displacements) over time as linear and nonlinear functions.

Keywords: uniform motion, acceleration, displacement, speed, progression.

Кіріспе

Дененің механикалық қозғалыстарының кинематикалық теориясында бірқалыпты түзу сызықты қозғалыстың сипатына, орындалу тетіктеріне (Ньютонның бірінші заңы) және оның өзгеру (бұзылу) жағдайларына (Ньютонның екінші заңы) жеткілікті дәрежеде теориялық талдаулар жасалынбай қалып жатады. Аталған қозғалыс механикалық орын ауыстырулардың ішіндегі ең қарапайымы болғандықтан көбіне оның анықтамасы ғана беріліп, теңдеуі мен графигі арқылы сипатталып, бірнеше мысалдар келтірумен шектелудеміз. Бұл мақалада бірқалыпты қозғалыстың математикалық құрылымы, оның сақталуы мен бұзылу жағдайларының жүйеленген математикалық негіздемесі ұсынылады. Қозғалыстың теориялық құрылымын жасау үшін ең алдымен оның математикалық алғышарттарын белгілеп алу қажет. Бірқалыпты түзу сызықты қозғалыстың математикалық түптамыры–арифметикалық прогрессия, ал оның табиғаты–сызықтық функция. Қозғалысқа осы тұрғыда қарау оның құрылымдық сипатын, орындалуы мен бұзылу заңдылықтарын (Ньютон заңдарын) жүйелі, әрі біріздiлік-тұтастық қағидасында түсінуді жеңілдетеді.

Әдебиеттерге шолу

Механикалық қозғалысты математикалық заңдылықтар тұрғысынан сипаттама жасағандардың алғашқысы–И. Ньютон [1]. Ол арифметикалық амалдарды, сандардың арифметикалық және геометриялық прогрессияларын, дифференциялдау мен интегралдауды жетілдіре отырып механикалық қозғалыстың тұтас бір теориясын жасап шықты. Ол 1680–1687 жылдары аспан денелерінің қозғалысы мен тартылысқа қатысты оптикалық есептерді шығарудан математикалық физика есептері деп аталып кеткен механикалық есептерге түбегейлі ауысты десек болады [2]. Бұл есептердің модельін (құрылымын), мазмұны мен нәтижелерін «Табиғи философияның математикалық бастамалары» атты 3-томдық кітабында жариялап, осы арқылы классикалық механиканың негізін жасады. Аталған кітаптарды физиканың математикалық негіздемесі деуге болады. Кітаптың 1-ші томында механикалық қозғалыстың кинематикалық және динамикалық теориялары ұсынылып, олардың негізгі деген тұжырымдамалары мен қорытындыларын теңдеулер (немесе формулалар) түрінде бекітті (заңдастырды). Басқаша айтқанда, И. Ньютон көптеген математикалық заңдылықтардың өмірдегі (табиғаттағы немесе тіршіліктегі) қолданылу аясын және осы заңдылықтардың практикалық маңызын айқындап берді.

Дененің механикалық қозғалысы деп оның кеңістіктегі орындарына жауапты координаталардың (оң, теріс сандардың) белгілі бір t секунд уақыт ішінде (аралығында) өзгеруін айтады. Қозғалыстың өту ортасы ретінде OXY жазықтығын немесе OX осін алуға болады. Қозғалыс уақыты секундомер арқылы өлшенеді: дененің $t=0$ мезетіндегі бастапқы (алғашқы) координатасы мен оның t секундтан кейінгі координатасының айырымына тең болатын аралықты (қашықтықты, бағытталған кесіндіні) орын ауыстыру қашықтығы немесе механикалық қозғалыстың шамасы деп қарау керек. Қозғалыс кезіндегі көршілес координаталардың арасы дененің қозғалыс қадамдары деп аталып S арқылы белгіленеді (ағылшынның Step–қадам (шаг) сөзі). Дененің 1 с ішіндегі қадамын координаталардың өзгеру жылдамдығы деп түсіну керек. Олай болса, дененің механикалық қозғалысын қарастыру деп оның кез-келген уақыт мезетіне сәйкес келетін координатасы мен координаталардың осы уақыт ішіндегі өзгеру жылдамдығын анықтауды айтады. Қозғалыс кезінде дененің координаталары сәт (секунд) сайын бірқалыпты (бірдей шамаға) өзгеріп (артып, кеміп) отырса, онда дене қозғалысының бұл түрі *жылдамдығы тұрақты* немесе *бірқалыпты түзу сызықты қозғалыс* деп аталады.

Зерттеу әдіснамасы

Мақаланың негізгі материалы–қозғалыстардың кинематикалық және динамикалық теориялары, ал зерттеу әдістері ретінде механикалық шамалар арасындағы пропорциялық тәуелділік пен арифметикалық прогрессия заңдылықтары алынды. Осылайша кинематикалық және динамикалық теориялардың негізгі тұжырымдамалары басқа қырынан қарастырылып, олардың иеялық мазмұны математикалық аппарат арқала негізделді. Кинематика мен динамика арасындағы тұтастық концепциясы белгіленіп, математикалық бірізділік қағидасы бойынша жүйелі заңдылықтар арқылы нақтыланды. Бірқалыпты қозғалыстан бірқалыпсыз қозғалысқа ауысу жағдайларының математикалық негіздемесін жасау – мақаланың басты мақсаты. Ол үшін бірқалыпты өзгеру заңдылығы болып табылатын арифметикалық прогрессия немесе сызықтық функция тәуелділігі негізгі математикалық аппарат ретінде қолданылады. Бір шаманың қалыптылық күйінің бұзылуы өзгермей тұрған екінші бір шаманың бірқалыпты өзгерісіне алып келеді деген идея төңірегінде құрылған механикалық модель бойынша қойылған мақсат іске асырылады.

Зерттеу нәтижелері

Қозғалыстың математикалық негіздемесі. Дене координаталарының бірқалыпты өзгеру заңдылығы сандардың арифметикалық прогрессиясынан бастау алады (латынның progressio – *алға қарай қозғалыс* деген ұғымы). Прогрессия заңдылықтары дененің бірқалыпты қозғалысының ең негізгі алғышарты болып табылады. Егер $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ сандар қатарындағы (тізбегіндегі) мүшелер бір-бірінен $\Delta a = a_2 - a_1$ (немесе $d = a_2 - a_1$) шамаға айырмашылықта болса, онда сандардың осы тізбегін арифметикалық прогрессия деп айтады (прогрессия мүшелелерінің бір-бірінен айырмасы Δ немесе d арқылы белгіленіп отыр; Δ (дельта)–грек алфавитінің төртінші әріпі ($\Delta\delta$); d–ағылшынның difference–*айырма* деген сөзінен алынған).

Сондықтан да, d–ны прогрессия дифференциялы, *a*–ның туындысы (a') немесе прогрессияның өзгеру қадамы деп айтады. Прогрессияның көршілес мүшелердің өзара айырымы *оң* ($d > 0$) немесе *теріс* мәнді ($d < 0$) болуы мүмкін: $d > 0$ болған кезде прогрессия–өспелі, ал $d < 0$ шартындағы прогрессия–кемімелі болып табылады. d–ның шамасына (мәніне) қарап мүшелердің қаншалықты тез өсіп (немесе кеміп) жатқандығына баға бере аламыз.

Олай болса, d–ны арифметикалық прогрессия мүшелерінің *өзгеру (өсу немесе кему) жылдамдығы* (υ_a) десе де болады, яғни $d = \upsilon_a$. $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ тізбегінің кез-келген n–ші мүшесі (a_n) мына формуламен анықталады:

$$a_n = a_1 + (n-1)d \qquad n = 2, 3, 4, ... \tag{1}$$

$$a_n = a_0 + \upsilon_a n \qquad n = 1, 2, 3, ... \tag{2}$$

Мұндағы a_0 – прогрессияның $n = 0$ мәніне сәйкес келетін ең алғашқы мүшесі ($a_0 = a_1 - d$). (1)-формула $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ тізбегі үшін жазылған, ал (2)-формула $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ қатарына сәйкес келеді. (2)–түрдегі прогрессия $\upsilon_a > 0$ шартында–өспелі, ал $\upsilon_a < 0$ шартында–кемімелі болады. $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ прогрессиясы $y = a + bx$ (немесе $y = y_0 + bx$) түрдегі сызықтық функция болып табылады және керісінше, кез-келген $y = a + bx$ ($y = y_0 + bx$) түрдегі сызықтық функцияны y-тің мәндерінің арифметикалық прогрессиясы деп айтуға болады (прогрессия мен сызықтық функция–егіз ұғымдар).

Сызықтық функциядағы бұрыштық коэффициент рольіндегі b – прогрессия жағдайында y -дің өзгеру жылдамдығы болып табылады: $b = \upsilon_y$. «Сызықтық» сөзін тура мағынасында түсіну керек, яғни $\upsilon_a > 0$ шартындағы $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ өспелі прогрессияның $a_n = f(n)$ тәуелділік графигі жоғары бағытталған түзу (сызық) болады.

Ал $\upsilon_a < 0$ шартындағы $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ кемімелі прогрессияның $a_n = f(n)$ тәуелділік графигі төмен бағытталған түзумен (сызықпен) сипатталады. Осы келтірілген мәліметтерді негізге ала отырып $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ прогрессиясын түзудің теңдеуі немесе сызықтық функция деп есептеуге болады екен [3,4].

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ прогрессиясындағы барлық n мүшенің қосындысын анықтайтын формуланы жазайық (S белгісі ағылшынның Summation–*қосындылау, қосынды* деген сөзінің бас әріпі):

$$S_n = \frac{n}{2}(a_0 + a_n) = \frac{n}{2}\left[a_0 + (a_0 + nd)\right] = \frac{n}{2}(2a_0 + nd) = a_0 n + \frac{d}{2}n^2 \quad (3)$$

$a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ тізбегіндегі сандарды қандай да бір құбылысты сипаттайтын (немесе осы құбылысқа қатысы бар) физикалық шаманың мәндері деп қабылдасақ (немесе оларды осы физикалық шаманың мәндерімен алмастырсақ), онда сандардың көрсетілген прогрессиясын аталған физикалық шаманың бірқалыпты өзгерісі (бірқалыпты артуы немесе бірқалыпты кемуі) деп қарауға болады.

Ньютон $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ сандарды ОХ осьінің бойымен орын ауыстыратын дененің $x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ *координаталары* деп есептей отырып дененің механикалық қозғалысына оның координаталарының уақыт бойынша өзгеруі деп баға берді (бұл жерде $n = 1, 2, 3, ...$ кезектестігі ретінде секундомердің (timer) $t = 1, 2, 3, ...$ секунд көрсетулерімен алмастырылады). Осылайша дененің бірқалыпты қозғалысын координаталардың арифметикалық прогрессия деп қарастыру (тану) мүмкіндігі пайда болды. Ньютон $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ прогрессия мүшелерін физикалық шаманың мәндерімен алмастыруды бірқалыпты қозғалып келе жатқан дененің мысалында көрсеткен, яғни прогрессияға түсуші (бірқалыпты өзгеруші) шама–өлшемі метр (м) болатын координата болса, онда оның әрбір секунд сайынға өзгерісі (дифференциялы, туындысы, өзгеріс жылдамдығы) метр/секунд (м/с) болады [5]. $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ прогрессияның жылдамдығы тұрақты, яғни ол тізбектің кез-келген көршілес екі мүшесінің айырымы арқылы анықталады:

$$\upsilon_a = \frac{a_2 - a_1}{2 - 1} = a_2 - a_1$$

$$\upsilon_a = \frac{a_3 - a_2}{3 - 2} = a_3 - a_2$$

Егер $a_2 > a_1$ болса, онда $\upsilon_a > 0$, сәйкес прогрессия – өспелі.

Ал егер $a_2 < a_1$ болса, онда $\upsilon_a < 0$ –, бұл жағдай кемімелі прогрессияға сәйкес келеді. $n \to t$, $a \to x$ алмастыруларын жасау арқылы координаталар прогрессиясының жылдамдығын (координатаның 1 с ішіндегі өзгерісін) анықтайтын теңдікті аламыз:

$$\upsilon_x = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)\frac{м}{с} = \left(\frac{\Delta x}{1с}\right) = (\Delta x)\frac{м}{с}$$

$x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ прогрессияның x_0, x_1 және x_1, x_2 мүшелерін алсақ:

$$\upsilon_x = \left(\frac{\Delta x_1}{\Delta t}\right) = \left(\frac{x_1 - x_0}{1-0}\right)\frac{м}{с} = (x_1 - x_0)\frac{м}{с} \tag{3с}$$

$$\upsilon_x = \left(\frac{\Delta x_2}{\Delta t}\right) = \left(\frac{x_2 - x_1}{2-1}\right)\frac{м}{с} = (x_2 - x_1)\frac{м}{с}$$

Дененің әрбір t–ші секундта (әрбір 1 с ішіндегі) жасайтын $S_{t-ші}$ орын ауыстырулары:

$$S_{t-ші} = \Delta x_t = x_t - x_{t-1} \tag{4}$$

$$S_{1-ші} = (x_1 - x_0)\,м\,, \quad S_{2-ші} = (x_2 - x_1)\,м\,, \quad S_{3-ші} = (x_3 - x_2)\,м \tag{5}$$

(5)-теңдіктерге қарап мынадай қорытынды жасауға болады: дене бірқалыпты түзу сызықты қозғалыс жасаған кезде оның әрбір 1 с сайынғы орын ауыстырулары [6] (көршілес координаталардың арасы) бірдей болады. (5)-теңдіктерді ескеріп (3с)-қатынастарын былай жазуға болады:

$$\upsilon_x = \frac{S_{1-ші}}{\Delta t} = \frac{S_{1-ші}}{1с} = (S_{1-ші})\frac{м}{с}, \quad \upsilon_x = \frac{S_{2-ші}}{\Delta t} = \frac{S_{2-ші}}{1с} = (S_{2-ші})\frac{м}{с}, \quad \upsilon_x = \frac{S_{3-ші}}{\Delta t} = \frac{S_{3-ші}}{1с} = (S_{3-ші})\frac{м}{с}$$

осылардан

$$S_{1-ші} = \upsilon_x \cdot 1с\,, \qquad S_{2-ші} = \upsilon_x \cdot 1с\,, \qquad S_{3-ші} = \upsilon_x \cdot 1с$$

Бұл орын ауыстырулардың жалпы жазылу түрі:

$$S_{t-ші} = \upsilon_x \cdot 1с = \upsilon_0 \cdot 1с \tag{4А}$$

Мұндағы $\upsilon_0 = \upsilon_x - x_0, x_1, x_2, x_3, ..., x_n$–координата прогрессиясының өзгеру жылдамдығы. (4) және (4А) теңдіктерінен дененің кез-келген t секундтан кейінгі x_t координатасын анықтауға болады:

$$x_t = x_{t-1} + S_{t-ші} = x_{t-1} + \upsilon_0 \cdot 1с \tag{6}$$

$t = 1, 2, 3, ...$ болған жағдайлар үшін:

$$x_1 = x_{1-1} + \upsilon_0 \cdot 1с = x_0 + \upsilon_0 \cdot 1с$$

$$x_2 = x_{2-1} + \upsilon_0 \cdot 1с = x_1 + \upsilon_0 \cdot 1с = (x_0 + \upsilon_0 \cdot 1с) + \upsilon_0 \cdot 1с = x_0 + \upsilon_0 \cdot 2с$$

$$x_3 = x_{3-1} + \upsilon_0 \cdot 1с = x_2 + \upsilon_0 \cdot 1с = (x_0 + \upsilon_0 \cdot 2с) + \upsilon_0 \cdot 1с = x_0 + \upsilon_0 \cdot 3с$$

Осы жазылған өрнектерге қарап отырып бірқалыпты қозғалып келе жатқан дененің кез-келген t секундтан кейінгі x_t координатасын анықтайтын өрнектің жалпы түрі төмендегідей болатынын аңғару қиын емес:

$$x_t = x_0 + \upsilon_0 t\,, \qquad t = 1, 2, 3, ...\,сек \tag{7}$$

Бұл теңдеуде ($\upsilon_0 t$)-дененің t секундта жасаған орын ауыстыруы: $\Delta x_t = S_t = \upsilon_0 t$. (7)–теңдеу $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ прогрессиясының (сандар қатарының) кез-келген n–ші мүшесін (a_n) анықтайтын $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ түрдегі (2)-теңдік секілді, олай болса бірқалыпты қозғалыстағы дененің координаталары арифметикалық прогрессия заңдылығы бойынша өзгереді деп есептеу керек (бірқалыпты сөзі арифметикалық прогрессияның синонимі). $a_n = a_0 + \upsilon_a n$ прогрессиясына $n \to t$, $a \to x$, $\upsilon_x = x^{/}$ алмастыруларын жасайық. Нәтижеде (7)-теңдік мынадай түрге келеді:

$$x_t = x_0 + x^{/} t \tag{7A}$$

Дененің t уақыт ішіндегі жасайтын S_t орын ауыстыруы (жүрген жолы немесе траекториясының ұзындығы) әрбір t–ші секундта (1 с сайын) жасайтын $S_{t-ші}$ орын ауыстырулардың қосындысына тең (Σ–қосындылау белгісі):

$$\begin{aligned} S_t = \Sigma S_{t-ші} = S_{1-ші} + S_{2-ші} + S_{3-ші} + ... = \upsilon_0 \cdot 1c + \upsilon_0 \cdot 1c + \upsilon_0 \cdot 1c + ... = \\ = \upsilon_0 \left(1c + 1c + 1c + ...\right) = \upsilon_0 t \end{aligned} \tag{8}$$

(8)-теңдікті ескере отырып (7)-ні былай жазуға болады:

$$x_t = x_0 + S_t \tag{7B}$$

(7), (7А) және (7В)-түрдегі теңдіктер дененің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысының теңдеулері деп айтылып жүр. Ал, шын мәнісінде оларға дене координаталарының арифметикалық прогрессиясы деп қарау керек.

Бірқалыпты қозғалыстағы дененің координаталарының (7)-түрдегі прогрессиясы $y = a + bx$ (немесе $y = y_0 + bx$) түрдегі сызықтық функция болып табылады (b–прогрессия жылдамдығы, яғни $b = \upsilon_0$).

«Сызықтық» деген сөзді тура мағынасында түсіну керек, яғни υ_0>0 шартындағы $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ өспелі прогрессияның $x_t = f\left(t\right)$ тәуелділік графигі жоғары бағытталған түзу, ал υ_0<0 шартындағы $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ кемімелі прогрессияның $x_t = f\left(t\right)$ тәуелділік графигі төмен бағытталған түзумен сипатталады. Осы келтірілген мәліметтерді негізге ала отырып $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ прогрессиясын түзудің теңдеуі немесе сызықтық функция деп қарауымызға әбден болады.

Бірқалыпты қозғалыстың орындалу және бұзылу заңдылықтары.

Кинематикалық теорияда дененің массасы ескерілмейді, денені материялық нүкте деп қарастырамыз деген тұжырым бар. Ол кинематикалық теорияда механикалық қозғалыстың жалпы сипаты ғана берілуіне және қозғалыс теңдеулеріне массаның енбеуіне байланысты айтылған болар. Дененің белгілі бір ортада бірқалапты түзу сызықты қозғалыс жасау шарттары Ньютонның 1-ші заңында баяндалатыны белгілі және оның қолданыстағы нұсқасына назар аударайық: *егер денеге басқа* денелер *әрекет етпесе немесе олардың әрекеті теңгерілген болса, онда дене не тыныштықтағы күйін сақтайды, не түзусызықты және бірқалыпты қозғалысын жалғастырады*да. Иә, мұнда дене координаталарының бірқалыпты өзгеруі, осы өзгеріске ортадағы басқа да (сыртқы) денелердің тигізетін әсері және оларға қойылатын шарттар жөнінде айтылған, бірақ дененің массасы туралы сөз қозғалмаған. Байқап отырсақ, дене өзінің бірқалыпты қозғалысын сақтап қалуы үшін сыртқы денелердің әсері жоқ немесе олар өзара теңгерілген болуы қажет екен [7–9].

Алайда, сыртқы әсерлер өзара теңгерілмесе де дененің бірқалыптылық қозғалысын сақтап қалуға болатындығы айтылмаған. Осы жағдайлардың барлығын қамту үшін Ньютонның бірінші заңын мынадай нұсқаларға бөліп көрсеткен дұрыс.

Бірқалыпты түзу сызықты қозғалыстағы денеге маңайындағы басқа (сыртқы) денелер тарапынан жасалатын әсерлер ...

1) мардымсыз (аз) немесе мүлдем жоқ болса, онда кез-келген массалы дене өзінің байырғы қозғалыс күйінде қала береді;

2) едәуір елеулі болғанымен, олар өзара теңгерілсе (жойылса немесе компенсацияланса), онда кез-келген массадағы дене өзінің алғашқы қозғалыс қалпын өзгертпейді;

3) өзара теңгерілмесе (жойылмаса немесе компенсацияланбаса), онда тек инертті (массасы едәуір үлкен) денелер ғана өзінің бастапқы қозғалыс сипатын (қалпын) сақтап қалады.

Бұл нұсқалардың алғашқы екеуі бірінші заңның қолданыстағы нұсқасымен сәйкес келеді, тек денелердің массасына шектеу қойылмайтыны нақты көрсетілген. Кинематикада денелердің массасы ескерілмейді деген тұжырым осы жағдаймен байланысты болса керек. Масса ескерілмейді екен деп ол туралы айтпай кететін болсақ, онда үшінші нұсқада массасы үлкен денелер ғана сыртқы әсерлерге қарсылық көрсете отырып өзінің бірқалыпты қозғалыс күйлерін сақтап қалуға қабілетті екендігі келтірілген.

Сондақтан, бірқалыпты түзу сызықты қозғалыстардың орындалу жағдайларының қай-қайсысын қарастырсақ та дене массасына қойылатын талаптардың қатар жүргені дұрыс. Ньютонның бірінші заңының біз ұсынып отырған үшінші нұсқасының қолданылып жүрген нұсқада болмау себебі мынада: сыртқы әсерлер өзара теңгерілмеген болса, онда дененің бірқалыпты қозғалысы үдемелі қозғалысқа ұласады деп Ньютонның екінші заңы басталып кетіуде. Дене массасын ескермеу қағидасы осындай жағдайлардың орындалуына себепші болып отыр. Керісінше, теңгерілмеген әсерлер жағдайында дененің бірқалыпты күйін сақтап қалуға бірден-бір атсалысатын шама–масса екендігіне мән берілмей келеді. Дененің алғашқы екі нұсқадағы қозғалысы инерциялық қозғалыс болғандықтан Ньютонның 1-ші заңы инерция заңы деп айтылады. Ал үшінші нұсқадағы массасы едәуір үлкен дене өзінің бірқалыпты қозғалысын сыртқы әсерлерге қарсылық көрсете отырып сақтап қалуын инерттілік деп атайды [9]. Ал дененің массасы–оның инерттілігінің өлшемі, олай болса Ньютонның бірінші заңының қолданыста жүрген тұжырымдамасында денелердің инерттілік қасиеті ескерілмей қалған, яғни инертті денелер ғана сыртқы теңгерілмеген әсерлердің ықпалына қарамастан өзінің бастапқы механикалық күйлерін сақтап қалатыны назардан тыс қалып қойған. Ал біз ұсынып отырған нұсқаларда бұл мәселе ескерілген. Сыртқы әсерлердің мақсаты–дененің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысын бұзу (өзгерту). Бірқалыптылықтың бұзылу немесе өзгеру ауқымы үдеу (a) деп аталатын шама арқылы беріледі (ағылшынның *acceleration*–үдеу деген сөзінен алынған). Ньютонның 1-ші заңының үш нұсқасында да дененің бірқалыпты қозғалыс күйі сақталады (бұзылмайды), олай болса қозғалыстың осы түрі үшін $a = 0$, дене координаталары прогрессия заңына бағынады, прогрессия жылдамдығы тұрақты ($\upsilon_x = const$).

Егер инертсіз (массасы аз) дене өзара теңгерілмейтін сыртқы әсерлердің ықпалында қозғалатын болса, онда 1-ші заңның үшінші нұсқасы төменде келтірілген 2-ші заңға ауысады: *өзара теңгерілмеген сыртқы әсерлер инертсіз (массасы аз) денеге және оның бірқалыпты\ қозғалысына үдеу береді.*

Бұл заңды дененің бірқалыпты қозғалысының бұзылуы (өзгеруі) туралы деп қабылдау керек. Халықаралық стандарт (SI) бойынша сыртқы әсерлердің шамасын (сандық мәнін) F Н (Ньютон) деп белгілеу бекітілген (ағылшынның *Force*–күш деген сөзінен алынған). F Н–әсердің сандық бағасы, мысалы $F = 3$Н секілді. Ал, күш сөзін әсердің күші (шамасы, сандық мәні) деген мағынада қолдануымыз қажет. Көп жағдайда денеге күш әсер етеді деп айту әдетке айналған, бұл – орынсыз.

Қозғалыстағы денеге күш емес маңайындағы басқа денелер тарапынан әсерлер жасалынады, ал осы әсерлердің сандық бағасы (шамасы, күші) $F=3$Н, 5Н т.с.с белгіленеді.

Бірқалыпты қозғалыстағы массасы m кг дененің маңайында көптеген сыртқы (басқа да) денелер бар болып, олардың кейбірі қозғалыста, ал қалғандары тыныштықта болуы мүмкін. Біз осындай денелердің ішінен екі денені ғана бірқалыпты қозғалысқа әсерін тигізушілер ретінде таңдап алайық. Мұндай таңдау сыртқы әсерлердің қозғалысқа тигізетін ықпалын есептеуді едәуір жеңілдетеді. Таңдап алынған екі дененің әрқайсысының әсерлерінің мәні (күші, шамасы) F_1 Н, F_2 Н болсын. Екі әсер бірқалыпты қозғалыстағы денеге бірмезгілде жасалатын болғандықтан, олардың қосынды (латынша summarum–қорытқы, жиынтық, нәтижелік) мәні есептеледі:

$$F_S=\sqrt{F_1^{\,2}+F_2^{\,2}+2F_1F_2\cos\alpha} \tag{9}$$

Бұл өрнектегі cosα–шамалары F_1 Н, F_2 Н болатын әсерлердің арасындағы бұрыш. Қорытқы F_S Н әсердің қозғалысқа беретін үдеуі

$$a=\frac{F_S}{m} \tag{10}$$

Бұл қатынас Ньютонның 2-ші заңының математикалық көрінісі (формасы) болып табылады. Ньютонның 1-ші заңының 1-ші нұсқасында бірқалыпты қозғалып келе жатқан денеге сыртқы денелердің тигізетін әсері өте мардымсыз аз ($F_1\approx 0$ Н, $F_2\approx 0$ Н) немесе мүлдем жоқ ($F_1=0$ Н, $F_2=0$ Н) болғанда ғана дененің қозғалыс күйінің өзгермейтіндігі айтылған.

(9)-ға осы шарттарды қолдансақ:

$$F_S=\sqrt{0^2+0^2+2\cdot 0\cdot 0\cos\alpha}=0 \text{ Н}$$

Ал денеге берілетін үдеуі

$$a=\frac{F_S}{m}=\frac{0}{m}=0$$

1-ші заңның 2-ші нұсқасында сыртқы денелердің тигізер әсері едәуір елеулі ($F_1\neq 0$ Н, $F_2\neq 0$ Н) болғанымен олар өзара теңгерілгенде (жойылғанда немесе компенсацияланғанда) ғана дене өзінің бірқалыпты қозғалысын сақтап қалады делінген.

Әсерлердің теңгерілуі деп олардың шама жағынан бірдей ($F_1=F_2=F$ Н, мысалы $F_1=F_2=5$Н), ал бағыттарының қарама-карсы ($\alpha=180^O$) болуын айтады.

Олай болса, (9)-теңдіктен:

$$F_S=\sqrt{F_1^{\,2}+F_2^{\,2}+2F_1F_2\cos\alpha}=|\,F_1=F_2=F\text{ Н}\,|\;=\sqrt{F^2+F^2+2FF\cos 180^0}=$$

$$=|\cos 180^0=-1\,|=\sqrt{2F^2-2F^2}=0 \text{ Н}$$

Ал дененің үдеуі

$$a=\frac{F_S}{m}=\frac{0}{m}=0$$

Олай болса, Ньютонның 1-ші заңының алғашқы екі нұсқасын өзара эквивалент (ұқсас, бір түсініктегі, бір ұғымдағы) нұсқалар деп қабылдауға болады, себебі дененің теңгерілген әсерлердің ықпалындағы қозғалысы мен ешқандай да әсер жасалынбаған жағдайдағы қозғалысының арасында айырмашылық жоқ. Екі жағдайда да дененің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысы өзгермейді (бұзылмайды немесе қозғалысқа үдеу берілмейді) [10–12].

1-ші заңның үшінші нұсқасында дене өзара теңгерілмеген ($F_1 \neq F_2$) әсерлерлердің ықпалында қозғалатын болса, онда (9)-теңдінен $F_S \neq 0$ Н (F_S >0 – оң шама немесе $F_S < 0$ – теріс шама) болуы мүмкін). Бұл жағдайлар F_1, F_2 әсерлердің арасындағы бұрышқа байланысты: егер бұл әсерлер бір бағытта жасалса ($\alpha = 0$), онда (9)-теңдіктен

$$F_S = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} + 2F_1F_2} = \sqrt{\left(F_1 + F_2\right)^2} = F_1 + F_2 > 0$$

F_S >0 әсер дененің қозғалыс бағытында жасалып, қозғалысқа оң үдеу береді:

$$a = \frac{F_S}{m} > 0$$

Қозғалыстың үдеу алуы–қозғалыстың өзгергендігінің айғағы. Бірқалыпты қозғалысқа оң үдеудің берілуі деп дене координаталарының аралығы сәт (секунд) сайын көбейетінін (секунд сайын көбірек орын ауыстырулар жасалатынын) айтады. Бұл жағдай дененің оң үдеумен қозғалуы немесе үдемелі қозғалысы деп аталады. Егер F_1, F_2 әсерлер өзара қарама-қарсы бағыттарда жасалса ($\alpha = 180^o$), онда (9)-теңдігінен

$$F_S = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2} - 2F_1F_2} = \sqrt{\left(F_1 - F_2\right)^2} = F_1 - F_2$$

Бұл теңдікте $F_1 > F_2$ болса, онда F_S >0 және a >0. Ал егер $F_1 < F_2$ болса, онда F_S <0 және a <0. F_S <0–теріс мәнді қорытқы (жиынтық) әсер дененің қозғалысына қарсы бағытта жасалады да, денеге теріс үдеу береді:

$$a = \frac{F_S}{m} < 0$$

Сыртқы қорытқы теріс әсерден теріс үдеу алған дене өзінің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысынан сәт сайын (секунд сайын) баяулайтын қозғалысқа ауысады. Бұл жағдай дененің теріс үдеумен_қозғалуы немесе дененің тежелуі деп аталады. F_1, F_2 әсерлер өзара перпендикуляр (көлденең) болса ($\alpha = 90^0$), онда (9)-теңдігінен

$$F_S = \sqrt{F_1^{\ 2} + F_2^{\ 2}}$$

Теңгерілмеген $F_S \neq 0$ Н немесе F_S >0, F_S <0 әсерлер денені бірқалыпты қозғалыстан шығарып жіберетіндігіне көз жеткіздік. Дененің бірқалыпты қозғалыс қалпын сақтап қалу үшін Ньютонның 1-ші заңының үшінші нұсқасында дененің массасын өте үлкен етіп алу қажеттілігі туындады. Оның мәнісі мынада: $F_S \neq 0$ Н сыртқы әсердің ықпалындағы дене өзінің бірқалыпты қозғалыс күйін сақтап қалуы үшін (10)-қатынастан дененің үдеуі $a = 0$ болып шығуы керек. Ал ол үшін дененің массасының сандық мәні қорытқы әсердің сандық мәнінен едәуір үлкен болуы тиіс ($m \gg F_S$). Себебі, бөлшектерге арналған ереже бойынша бөлшектің бөлімі алымынан көп үлкен болса, онда бөлшектің мәні нөл болады:

$$A = \frac{B}{C} = |\ C \gg B\,| = 0$$

Дәл осы секілді:

$$a = \frac{F_S}{m} = |\,m \gg F_S\ | = 0$$

Осы келтірілген тұжырымдарды мысал келтіру арқылы айқындап өтейік. Массасы $m = 200кг$ денеге бір бағытта $F_1 = 3H, F_2 = 5H$ әсерлер жасалған жағдайда (9)-теңдіктен

$$F_S = \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2} + 2F_1F_2} = \sqrt{\left(F_1 + F_2\right)^2} = F_1 + F_2 = 3 + 5 = 8H$$

Ал оның денеге беретін үдеуі:

$$a = \frac{F_S}{m} = \frac{8H}{200кг} = 0,04\frac{H}{кг} \approx 0\frac{H}{кг}$$

Олай болса, бірқалыпты қозғалыс жасап келе жатқан массасы 200 кг денеге шамасы 8 Н-ға тең болатын теңгерілмеген әсерлер жасалғанымен дене инертті (200>>8) болса, онда ол өзінің бірқалыпты қозғалыстағы күйін сақтап қалады екен ($a = 0$).

Сонымен, үдеу–дененің бірқалыпты қозғалысының өзгергендігін айғақтайтын шама екендігіне көз жеткіздік. Қарастырылған мысалда үдеудің мәні 0,04 Н/кг болды, бұл массасы 200 кг денеге шамасы 8 Н-ға тең қорытқы әсер жасалған кезде әрбір килограмға 0,04 Н-ға тең әсерден келетінін білдіреді (8 Н әсердің 1 килограмға келетін үлесі). Есептеулер кезінде дененің массасы мен оның алған үдеуі белгілі болса, онда денеге жасалатын қорытқы әсердің шамасын анықтау қиын емес: $F_S = ma$.

Дискуссия

Біз сыртқы әсерлердің денеге беретін үдеуін талқыладық, яғни ол шамасы (күші) F_S болатын сыртқы қорытқы әсердің әрбір килограмға келетін үлесі екен, яғни *a Н/кг*.

Осы жерде мынадай заңды сұрақ туындайды: дененің әрбір килограмына *a Н* әсерден келуі мен дененің бірқалыпты қозғалысының бұзылуының (өзгеруінің) арасында қандай байланыс бар?

Бұл сұраққа жауап беру үшін біз Ньютонның екінші заңында айтылған *сыртқы әсерлер денеге және оның бірқалыпты қозғалысына үдеу береді* деген тұжырымды еске түсірейік. Дененің *a Н/кг*–ға тең болатын үдеу алуын дененің әрбір килограмына *a Н*-ға тең әсерден келуімен түсіндірдік. Ал осы үдеудің қозғалысқа берілуі дегенді қалай түсінуге болады?

Денеге берілген үдеудің өлшемі $\frac{H}{кг}$, ал қозғалысқа берілген үдеудің өлшемі $\frac{м}{с^2}$, бірақ екеуі бір ұғым: $\frac{H}{кг} = \frac{м}{с^2} = \frac{\frac{м}{с}}{с}$.

Осыдан үдеу туғызатын сыртқы F_S әсердің өлшемі Ньютон (Н) болып шығады: $H = кг\frac{м}{с^2}$.

Олай болса, жоғарыдағы қойылған сұрақтың жауабы табылды және оны келтіріліп өткен мысал аясында көрсетеміз: массасы 200 кг денеге шамасы (+8 Н)-ға тең қорытқы әсер жасалған кезде дене $+0,04\frac{Н}{кг}$ тең үдеу алған болатын, бұл дегеніміз дене координаталарының өзгеру жылдамдығы секунд сайын $0,04\frac{м}{с}$ - ке артады деген сөз:

$$+0,04\frac{Н}{кг} = +0,04\frac{м}{с^2} = \frac{+0,04\frac{м}{с}}{1с}$$

Осылайша дене координаталарының өзгеру жылдамдығы секун сайын $+0,04\frac{м}{с}$ жылдамдықпен арта бастайды (өспелі прогрессияға түседі). Жылдамдықтардың өзгеру жылдамдығы немесе жылдамдықтар прогрессиясының өзгеру жылдамдығы (υ_υ)–үдеу.

$$\upsilon_\upsilon = a = \frac{+0,04\frac{м}{с}}{1с}$$

Дененің кез-келген t уақыт мезетіндегі жылдамдығы арифметикалық прогрессия заңдылығы бойынша анықталады:

$$\upsilon_t = \upsilon_0 + at = \upsilon_0; (\upsilon_0 + a); (\upsilon_0 + 2a); ... \qquad t = 0,1,2,3,...с$$

Дене координаталарының өзгеру жылдамдығының секун сайын $+0,04\frac{м}{с}$ жылдамдықпен арта бастауы дененің секун сайын + 0,04 метрге артық орын ауыстыру жасайтындығын білдіреді. Олай болса, дененің әрбір *t*-ші секундта жасайтын орын ауыстырулары да прогрессия заңына бағынатын болады:

$$S_{t-ші} = \upsilon_0 + \left(\frac{a}{2}\right)(2t-1) = S_{1-ші}, S_{2-ші}, S_{3-ші}, ... = (\upsilon_0 + 0,5a); (\upsilon_0 + 1,5a); (\upsilon_0 + 2,5a); ...$$

Дененің бірқалыпты қозғалысының үдемелі қозғалысқа ауысуын (немесе бірқалыпты қозғалыстың үдеу алуын) дене координаталарының $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ түрдегі арифметикалық прогрессиясының (бірқалыпты өзгеру сипатының) бұзылуы деп түсіну керек.

Бұл жағдай координаталардың $x_t = x_0 + \upsilon_0 t -$ бірқалыпты өзгеру заңдылығына $\left(\frac{a}{2}\right)t^2$ мүшесінің қосылуы арқылы сипатталады:

$$x_t = x_0 + \upsilon_0 t + \left(\frac{a}{2}\right)t^2 = x_0 + S_t \tag{11}$$

Қосылған $\left(\frac{a}{2}\right)t^2$ мүшесі бастапқы $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ сызықтық теңдеуді квадраттық теңдеуге айналдырып жіберді немесе ол $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ түзуін майыстырып параболаға айналдырады. Егер (11)-ді

$$x_t = x_0 + \left(\upsilon_0 + \frac{a}{2}t\right)t$$

түрде жазып

$$U = \left(\upsilon_0 + \frac{a}{2} t \right)$$

орташа жылдамдық деген шама енгізсек, онда координаталардың (11)-түрдегі үдемелі өзгерісін (параболаны) бірқалыпты өзгеріске (түзуге) қайтадан айналдыруға болады: $x_t = x_0 + Ut$. Бұл (11)-түрдегі параболаға $(x_t; t)$ нүктесінде жүргізілген жанама түзудің теңдеуі деп аталады. (11)-гі S_t–дененің *t* уақыт ішіндегі жасайтын орын ауыстыруы (жүрген жолы немесе траекториясының ұзындығы).

Ол әрбір *t*-ші секундта жасайтын қадамдарының (орын ауыстыруларының) (3)-секілді қосындысына тең:

$$S_t = S_{1-ші} + S_{2-ші} + S_{3-ші} + ... = \upsilon_0 t + \frac{a}{2} t^2 = (\upsilon_0 + 0,5a) + (\upsilon_0 + 1,5a) + (\upsilon_0 + 2,5a) + ... \quad (12)$$

Үдемелі қозғалыстағы дененің *t* уақыт ішіндегі орын ауыстыруын орташа жылдамдық арқылы анықтау үшін (12)-ге $U = \left(\upsilon_0 + \frac{a}{2} t \right)$ белгілеуін қолдану керек, нәтижеде $S_t = Ut$.

Қорытынды

Мақалада көтерілген мәселенің нәтижелері мен негізгі тұжырымдамаларына қорытынды жасар болсақ, ең алдымен дененің бірқалыпты түзу сызықты қозғалысы үдемелі қозғалысқа ауысқан кезде дене координаталарының бастапқы $x_t = x_0 + \upsilon_0 t$ түрдегі арифметикалық прогрессиясы бұзылады да прогрессияның υ_0 жылдамдығы мен дененің секунд сайынғы жасайтын $S_{t-ші}$ қадамдары (орын ауыстырулары) прогрессия заңдылығы бойынша өзгере бастайтындығының математикалық дәлелдемесіне қол жеткіздік. Механикалық шамалардың бір бөлігі прогрессияға түсушілер, ал келесі біреулері прогрессия жылдамдығының рөлінде болатындығы көрсетілді. Ньютон заңдары тұтас бір тұжырым түрінде беріліп, олардың дәстүрлі анықтамасына математикалық түсініктемелер жасалып өтілді, яғни бірқалыпты және бірқалыпсыз механикалық қозғалыстар прогрессия арқылы басқарылатыны келтірілді.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

[1] Математические начала натуральной философии. –М.: Наука, 1989. –688 с.
[2] Кудрявцев П.С. Курс истории физики. –М.: Просвещение, 1982. –448 с.
[3] Дж. У. Лич. Классическая механика –М.: ИИЛ, 1961. –173 с.
[4] Голдстейн Г., Чарлз Пуль, Джон Сафко. Классическая механика. К.: ИКИ, 2012. –828 с.
[5] Яковлев В.И., Остапенко Е.Н. История и методология механики. Пермь, 2109. –218 с.
[6] Андреев А.Д., Колгатин С.Н., Черных Л.М. Классическая мехнаика. Санкт-Петербург, 2018. –32 с.
[7] Ишлинский А.Ю. Классическая механика и силы инерции. УРСС, Ленанд, 2018. –258 с.
[8] Ворович И.И. Лекции по динамике Ньютона. Физматлит., 2010. –602 с.
[9] Алмабаева Н.М., Калдарова М., Мадимар А. Механические свойства тел. Альманах мировой науки. № 2–1(2), 2015. Стр. 12–13.
[10] Джавадов И.Д. За Ньютона обидно. Изобретательство, 2009. Том–9, стр. 47–49.
[11] Лукашевия С.А., Садовский А.А. Определение фундаментальных понятий физики через законы. Эпохи науки, № 22, 2020. Стр. 56–61. DOI 10.24411/2409–3203–2020–12274.
[12] Чадов М.С. Ньютон и Гук: приоритетный спор. ВПУ, 2013. Вып. 2 (19). Стр. 102-106.

References

[1] N'juton I. (1989) Matematicheskie nachala natural'noj filosofii [Mathematical principles of natural philosophy]. Moscow: Nauka (in Russian)

[2] Kudrjavcev P.S. (1982) Kurs istorii fiziki [Physics History Course]. Moscow: Prosveshhenie (in Russian)

[3] Lich Dzh. U. (1961) Klassicheskaja mehanika [Classical mechanics]. Moscow: Izdatel'stvo inostrannoj literatury (in Russian)

[4] Goldstejn G., Charlz Pul', Dzhon Safko. (2012) Klassicheskaja mehanika [Classical mechanics]. Moscow: Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika», Izhevskij institut komp'juternyh issledovanij (in Russian)

[5] Jakovlev V.I., Ostapenko E.N. (2019) Istorija i metodologija mehaniki. Osnovy klassicheskoj mehaniki [The history and methodology of mechanics. Fundamentals of classical mechanics]. Perm': Permskij gosudarstvennyj nacional'nyj issledovatel'skij universitet (in Russian)

[6] Andreev A.D., Kolgatin S.N., Chernyh L.M. Klassicheskaja mehanika [Classical mechanics.]. Sankt-Peterburg (in Russian)

[7] Ishlinskij A.Ju. (2018) Klassicheskaja mehanika i sily inercii [Classical mechanics and inertia forces]. URSS, Lenand (in Russian)

[8] Vorovich I.I. (2010) Lekcii po dinamike N'jutona [Lectures on Newton's dynamics.]. Fizmatlit (in Russian).

[9] Almabaeva N.M., Kaldarova M., Madimar A. (2015) Mehanicheskie svojstva tel [Mechanical properties of bodies]. Al'manah mirovoj nauki. № 2–1(2), 12–13. (in Russian)

[10] Dzhavadov I.D. (2009) Za N'jutona obidno [It's a shame about Newton]. Izobretatel'stvo. No 7, Volume 9, 47–49. (in Russian)

[11] Lukashevija S.A., Sadovskij A.A. (2020) Opredelenie fundamental'nyh ponjatij fiziki cherez zakony [Defining fundamental concepts of physics through laws]. Jepohi nauki, № 22, 56–61. DOI 10.24411/2409–3203–2020–12274. (in Russian)

[12] Chadov M.S. (2013) N'juton i Guk: prioritetnyj spor [Newton and Hooke: Priority Dispute]. VPU, No 2 (19), 102-106. (in Russian)