

С.М. Темешева^{1,2}, М. Мұқаш^{3*}

¹Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы қ., Қазақстан

²әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

*e-mail: mukashma1983@gmail.com

БЕКІТІЛМЕГЕН МЕЗЕТТЕ ИМПУЛЬСТІК ӘСЕРІ БАР ЕСЕП ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Ұсынылған жұмыста дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульстік әсері бар екі нүктелі шеттік есеп қарастырылған. Қарастырылып отырған есеп параметрлеу әдісінің идеялары негізінде зерттеледі. Параметрлеу әдісі интервалды бірнеше бөліктерге бөлуге және ішкі интервалдардың бастапқы нүктелерінде шешім мәндері ретінде параметрлерді енгізуге негізделген. Қарастырылып отырған есептің жуық шешімін табудың бір жолы ұсынылады. Есептің шешімін табу үшін шеттік есептің қарастырылып отырған интервалы бірнеше бөліктерге бөлініп, жаңа параметр енгізіліп, берілген дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бөлік интервалдарда аралық шеттік есеп алынады және аралық шеттік есепте параметр енгізу нәтижесінде бастапқы шарт пайда болып, Коши есебін қарастыруға мүмкіндік аламыз. Дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бекітілмеген уақыт мезетіндегі импульстік әсері бар екі нүктелі шеттік есептің жуық шешімін табудың ұсынылған әдістің тиімділігін көрсететін сынақ мысалы келтірілген.

Түйін сөздер: дифференциалдық теңдеулер, уақыттың бекітілмеген мезетіндегі импульс әсері, шеттік есеп, параметрлеу әдісі.

Аннотация

С.М. Темешева^{1,2}, М. Мұқаш³

О ЗАДАЧЕ С НЕФИКСИРОВАННЫМ МОМЕНТОМ ИМПУЛЬСНОГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

¹Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

²Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

³Актюбинский региональный университет имени К. Жубанова, г.Актөбе, Казахстан

В представленной работе рассматривается двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений, подчиняющейся импульсному воздействию в нефиксированный момент времени. Рассматриваемая задача исследуется на основе идей метода параметризации. Метод параметризации основан на разделении интервала на несколько частей и вводе параметров в качестве значений решений в начальных точках подинтервалов. Предлагается способ поиска приближенного решения рассматриваемой задачи. Для нахождения решения задачи рассматриваемый интервал краевой задачи разбивается на несколько частей, вводится новый параметр, получается промежуточная краевая задача для заданной системы дифференциальных уравнений на частичных интервалах и в результате При вводе параметра в промежуточную краевую задачу появляется начальное условие и можно рассматривать задачу Коши. Предложен один из способов нахождения приближенного решения рассматриваемой задачи. Приведен тестовый пример, который показывает эффективность предложенного способа нахождения приближенного решения двухточечная краевая задача для системы дифференциальных уравнений, подчиняющейся импульсному воздействию в нефиксированный момент времени.

Ключевые слова: дифференциальные уравнения, импульсное воздействие в нефиксированный момент времени, краевая задача, метод параметризации.

Abstract

ABOUT THE PROBLEM WITH A NON-FIXED MOMENT OF IMPULSE ACTION

Temesheva S.M.^{1,2}, Mukash M.³

¹Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

²Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

³K. Zhubanov Aktobe Regional University, Aktobe, Kazakhstan

The presented work considers a two-point boundary value problem for a system of differential equations subject to impulse action at a non-fixed moment in time. The problem under consideration is studied based on the ideas of the parameterization method. The parameterization method is based on dividing the interval into several parts and entering

the parameters as decision values at the initial points of the subintervals. A way to find an approximate solution of the problem under consideration is proposed. To find the solution of the problem, the considered interval of the boundary value problem is divided into several parts, a new parameter is introduced, an intermediate boundary value problem is obtained for the given system of differential equations in partial intervals, and as a result of entering a parameter in the intermediate boundary value problem, an initial condition appears and we can consider the Cauchy problem. One of the ways to find an approximate solution to the problem under consideration is proposed. A test example is given that shows the effectiveness of the proposed method for finding an approximate solution to a two-point boundary value problem for a system of differential equations subject to impulse action at a non-fixed point in time.

Keywords: differential equations, impulse action at a non-fixed moment of time, boundary value problem, parameterization method.

Кіріспе

Дифференциалдық теңдеулердің импульстік жүйелері объектілердің математикалық модельдері ретінде қызмет етеді, олардың эволюциясы кезінде қысқа мерзімді күштердің әрекетіне ұшырайды. Қысқа мерзімді ауытқуы бар нақты процестердің эволюциясын математикалық сипаттауда көбінесе ауытқу ұзақтығын елемеу және бұл ауытқулар «лездік» сипатта деп болжауға ыңғайлы. Мұндай сипаттау үзіліссіз траекториялары бар динамикалық жүйелерді немесе оларды импульс әсері бар дифференциалдық теңдеулерді зерттеу қажеттілігіне әкеледі. Мұндай жүйелердің толық теориясы [1] монографиясында берілген. Импульсивті әсерлері бар нақты мәселелерді зерттеу [2-4] жұмыстарда қарастырылған. Тұрақты емес импульсивті мәселелер бойынша көптеген зерттеулер жүргізілді. Бұл мәселелер үшін шешімнің бар болуы, орнықтылығы және басқа асимптотикалық қасиеттері [5, 6] және [7, 8, 9], сонымен қатар импульсивті жүйелер үшін шекаралық есептер зерттелді. Импульстік жүйелер үшін периодты және периодты дерлік шешімдердің болуы туралы сұрақтар [10-13] қарастырылған.

Д. Жұмабаевтың ұсынған [14] параметрлеу әдісі [15] бекітілген уақыт мезетіндегі импульс әсері бар Фредгольм интегро-дифференциалдық теңдеуінің сызықтық шеттік есебін зерттеуде қарастырылды. Бұл әдіс интервалды бөліктерге бөлуге және қосымша параметрлерді енгізуге негізделген.

Есептің қойылымы және зерттеу әдісі

Бұл мақалада $[a, b]$ кесіндісінде келесі импульс әсерлі шеттік есеп қарастырылады:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in (a, b) \setminus \{t_*\}, \quad x \in R^n, \quad (1)$$

$$x(t_* + 0) - x(t_* - 0) = p, \quad p \in R^n, \quad (2)$$

$$t_* + \beta \cdot x(t_* - 0) = 0, \quad (3)$$

$$Bx(a) + Cx(b) = d, \quad d \in R^n \quad (4)$$

мұндағы $A(t) \in C([a, b] \setminus \{t_*\})$, $f(t) \in C([a, b] \setminus \{t_*\})$; B, C - тұрақты n -өлшемді квадрат матрицалар; p, d - тұрақты n -өлшемді векторлар, β - $(1 \times n)$ -өлшемді матрица-жол.

$PC([a, b] \setminus \{t_*\}, R^n)$ арқылы нормасы $\|x\|_1 = \max \left\{ \sup_{t \in [a, t_*)} \|x(t)\|, \sup_{t \in (t_*, b]} \|x(t)\| \right\}$ болатын үзінді-үзіліссіз

функциялар кеңістігін белгілейміз.

(1)-(4) есебінің шешімі деп

- (1) дифференциалдық теңдеуге,
- (2) импульс әсер шартына,
- (3) шартына,
- (4) шеттік шартына

қанағаттандыратын $(x(t), t_*)$ жұбын айтамыз, мұндағы $x(t) \in PC([a, b] \setminus \{t_*\}, R^n)$ және $t_* \in (a, b)$.

Келесідей белгілеулер қолданамыз: $t_1 = a$, $t_0 = t_*$, $t_2 = b$, $a = t_1 < t_0 < t_2 = b$.

Кейбір $t_0 \in (t_1, t_2)$ үшін $C([t_1, t_2] \setminus t_0, R^{2n})$ арқылы нормасы $\|x\|_2 = \max \left\{ \max_{r=1,2} \sup_{t \in (t_{r-1}, t_r)} \|x_r(t)\|, \|x_1(t)\|, \|x_2(t)\| \right\}$ болатын $x[t] = (x_1(t), x_2(t))$ функциялар жүйелерінің

кеңістігін белгілейміз, мұндағы $x_1 : [t_1, t_0) \rightarrow R^n$ - үзіліссіз және әрбір $t_0 \in (t_1, t_2)$ үшін $\lim_{t \rightarrow t_0-0} x_1(t)$, ал $x_2 : (t_0, t_2] \rightarrow R^n$ -- үзіліссіз және әр бір $t_0 \in (a, b)$ үшін $\lim_{t \rightarrow t_0+0} x_2(t)$ ақырлы шегі бар функция.

(1)-(4) есебін Д.С.Джумабаевтың параметрлеу әдісінің идеясын пайдалану арқылы шешімін табу алгоритмін ұсынғалы отырмыз. Ол үшін белгілеулер енгіземіз:

- $\lambda_1 = x(t_1)$, $\lambda_2 = x(t_2)$;
- $u_1(t) = x(t) - \lambda_1$, $t \in (t_0, t_1]$, $u_2(t) = x(t) - \lambda_2$, $t \in (t_0, t_2]$.

Енді (1)-(4) есебінен төмендегі эквивалентті көпнүктелі параметрлер енгізілген шеттік есепке көшеміз:

$$\frac{du_r}{dt} = A(t)(\lambda_r + u_r) + f(t), \quad t \in (t_0, t_r), \quad r = \overline{1,2}, \quad (5)$$

$$u_r(t_r) = 0, \quad r = \overline{1,2}, \quad (6)$$

$$\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow t_0-0} u_1(t) - \lambda_2 - \lim_{t \rightarrow t_0+0} u_2(t) + p = 0, \quad (7)$$

$$t_0 + \beta \cdot \left(\lambda_1 + \lim_{t \rightarrow t_0-0} u_1(t) \right) = 0, \quad (8)$$

$$B\lambda_1 + C\lambda_2 - d = 0. \quad (9)$$

Жаңадан құрылған (5)-(9) есептің шешімі деп компоненттері (5) теңдеуіне және (6)-(9) теңдіктерін қанағаттандыратын $(\lambda^*, u^*[t])$ жұбын айтамыз. Мұндағы $\lambda^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*) \in R^{2n}$, $u^*[t] = (u_1^*(t), u_2^*(t)) \in C([a, b] \setminus t_0, R^{2n})$.

Берілген (1)-(4) есебі мен жаңадан құрылған (5)-(9) есептердің эквиваленттігін келесі мағынада түсінеміз. Егер $(\lambda^*, u^*[t])$ жұбы (5)-(9) есебінің шешімі болса, онда үзінді-үзіліссіз

$$x^*(t) = \begin{cases} \lambda_1^*, & \text{егер } t = t_1, \\ \lambda_r^* + u_r^*(t), & \text{егер } t \in (t_0, t_r), \quad r = \overline{1,2}, \\ \lambda_2^*, & \text{егер } t = t_2, \end{cases}$$

функциясы (1)-(4) есебінің шешімі болады. Ал егер $\tilde{x}(t)$ функциясы (1)-(4) есебінің шешімі болса, онда компоненттері $\tilde{\lambda} = (\tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t_2))$, $\tilde{u}[t] = (\tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_1), \tilde{x}(t) - \tilde{x}(t_2))$ болатын $(\tilde{\lambda}, \tilde{u}[t])$ жұбы (6)-(9) есебінің шешімі болады.

Айталық, λ_r белгілі болсын. Онда (5), (6) Коши есебі

$$u_r(t) = \int_{t_r}^t A(\tau_1)(\lambda_r + u_r(\tau_1))d\tau_1, \quad t \in (t_0, t_r], \quad r = \overline{1,2}. \quad (10)$$

Вольтерра екінші текті интегралдық теңдеуіне пара-пар болады.

Соңғы (10) теңдікте λ_r белгілі деп санасақ, $u_r(t)$ үшін келесі өрнекті жаза аламыз:

$$\begin{aligned}
 u_r(t) = & \left(\int_{t_r}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) d\tau_v \dots d\tau_1 \right) \cdot \lambda_r + \\
 & + \left(\int_{t_r}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} f(\tau_v) d\tau_v \dots d\tau_1 \right) + \\
 & + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) u_r(\tau_v) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1, \quad t \in (t_0, t_r], \quad r = \overline{1, 2}.
 \end{aligned} \tag{11}$$

Жазуды қысқарту мақсатында

$$\begin{aligned}
 D_{v,r}(t) = & \int_{t_r}^t A(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} A(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) d\tau_v \dots d\tau_1, \\
 F_{v,r}(t) = & \int_{t_r}^t f(\tau_1) d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \int_{t_r}^{\tau_1} f(\tau_2) d\tau_2 d\tau_1 + \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} f(\tau_v) d\tau_v \dots d\tau_1, \\
 G_{v,r}(u_r, t) = & \int_{t_r}^t A(\tau_1) \dots \int_{t_r}^{\tau_{v-2}} A(\tau_{v-1}) \int_{t_r}^{\tau_{v-1}} A(\tau_v) u_r(\tau_v) d\tau_v d\tau_{v-1} \dots d\tau_1,
 \end{aligned}$$

белгілеулерді енгіземіз де, (11) теңдікті төмендегідей жазып аламыз:

$$u_r(t) = D_{v,r}(t) \cdot \lambda_r + F_{v,r}(t) + G_{v,r}(u_r, t), \quad t \in (t_0, t_r], \quad r = \overline{1, 2} \tag{12}$$

Онда

$$\lim_{t \rightarrow t_0^-} u_1(t) = D_{v,1}(t_0) \cdot \lambda_1 + F_{v,1}(t_0) + G_{v,1}(u_1, t_0), \tag{13}$$

$$\lim_{t \rightarrow t_0^+} u_2(t) = D_{v,2}(t_0) \cdot \lambda_2 + F_{v,2}(t_0) + G_{v,2}(u_2, t_0) \tag{14}$$

болады. Осы шектердің мәндерін (7)-ші теңдікке қойып, сонымен бірге (9) теңдігін ескере отырып,

$$\begin{cases} Q_v(t_0) \cdot \lambda = F_v(t_0) + G_v(u, t_0), & \lambda \in R^{2n}, \\ P_v(t_0, \lambda_1, u_1) = 0, & t_0 \in (a, b), \end{cases} \tag{15}$$

теңдеулер жүйесін құрып аламыз, мұндағы

$$\begin{aligned}
 Q_v(t_0) = & \begin{pmatrix} B & C \\ I + D_{v,1}(t_0) & I + D_{v,2}(t_0) \end{pmatrix}, \\
 F_v(t_0) = & \begin{pmatrix} d \\ F_{v,2}(t_0) - F_{v,1}(t_0) - p \end{pmatrix}, \quad G_v(u, t_0) = \begin{pmatrix} O^{(1)} \\ G_{v,2}(u_2, t_0) - G_{v,1}(u_1, t_0) \end{pmatrix}, \\
 P_v(t_0, \lambda_1, u_1) = & t_0 + \beta \cdot ((I + D_{v,1}(t_0)) \cdot \lambda_1 + F_{v,1}(t_0) + G_{v,1}(u_1, t_0)).
 \end{aligned}$$

Параметр мен функцияның $(\lambda^{(0)}, u^{(0)}[t])$ жұбы бойынша $[t_1, t_2]$ аралығында үзінді-үзіліссіз

$$x^{(0)}(t) = \begin{cases} \lambda_1^{(0)} + u_1^{(0)}(t), & \text{егер } t \in [t_1, t_0), \\ \lambda_2^{(0)} + u_2^{(0)}(t), & \text{егер } t \in (t_0, t_2] \end{cases}$$

функциясын анықтап аламыз.

Құрып алған $Q_v(t_0): R^{2n} \rightarrow R^{2n}$ матрицасының (t_1, t_2) аралығының кез келген t_0 нүктесі үшін кері матрицасы бар болсын деп ұйғарамыз. Параметрлеу әдісіндегідей $\{(\lambda^{(k)}, u^{(k)}[t])\}$, $\{t_0^{(k)}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots$ шамаларын төмендегі ретпен табамыз.

Қадам 0.

(a) $Q_v\left(\frac{a+b}{2}\right)\lambda = F_v\left(\frac{a+b}{2}\right)$ теңдеуін шешіп $\lambda^{(0)} = (\lambda_1^{(0)}, \lambda_2^{(0)}) \in R^{2n}$ параметрін табамыз;

(b) $\lambda_r = \lambda_r^{(0)}$ деп алып, $(t_0, t_r]$ аралығында $u_r^{(0)}(t) = D_{v,r}(t) \cdot \lambda_r^{(0)} + F_{v,r}(t)$ функциясын анықтап аламыз ($r = \overline{1, 2}$);

(c) $P_v(t_0, \lambda_1^{(0)}, u_1^{(0)}) = 0$ сызықтық емес теңдеуді шешу арқылы $t_0^{(0)} \in (t_1, t_2)$ табамыз.

Қадам 1.

(a) $Q_v(t_0^{(0)})\lambda = F_v(t_0^{(0)}) + G_v(u^{(0)}, t_0^{(0)})$ теңдеуін шешіп $\lambda^{(1)} = (\lambda_1^{(1)}, \lambda_2^{(1)}) \in R^{2n}$ параметрін табамыз;

(b) $\lambda_r = \lambda_r^{(1)}$ деп алып, $(t_0, t_r]$ аралығында $u_r^{(1)}(t) = D_{v,r}(t) \cdot \lambda_r^{(1)} + F_{v,r}(t) + G_{v,r}(u_r^{(0)}, t)$ функциясын анықтап аламыз ($r = \overline{1, 2}$);

(c) $P_v(t_0, \lambda_1^{(1)}, u_1^{(1)}) = 0$ сызықтық емес теңдеуді шешу арқылы $t_0^{(1)} \in (t_1, t_2)$ табамыз.

Қадам 2.

(a) $Q_v(t_0^{(1)})\lambda = F_v(t_0^{(1)}) + G_v(u^{(1)}, t_0^{(1)})$ теңдеуін шешіп $\lambda^{(2)} = (\lambda_1^{(2)}, \lambda_2^{(2)}) \in R^{2n}$ параметрін табамыз;

(b) $\lambda_r = \lambda_r^{(2)}$ деп алып, $(t_0, t_r]$ аралығында $u_r^{(2)}(t) = D_{v,r}(t) \cdot \lambda_r^{(2)} + F_{v,r}(t) + G_{v,r}(u_r^{(1)}, t)$ функциясын анықтап аламыз ($r = \overline{1, 2}$);

(c) $P_v(t_0, \lambda_1^{(2)}, u_1^{(2)}) = 0$ сызықтық емес теңдеуді шешу арқылы $t_0^{(2)} \in (t_1, t_2)$ табамыз. Т.с.с.

Бұл алгоритмнің орындалу және жинақты болу шарттары алынған. Және осы шарттар (1)-(4) есебінің оқшауланған шешімі бар болуды қамтамасыз етеді.

Мысал $[0, 1]$ сегментінде келесі тестілік есепті қарастырамыз:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \quad t \in (0, 1) \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}, \quad x \in R^2$$

$$x(t_* + 0) - x(t_* - 0) = p, \quad t_* + \beta \cdot x(t_* - 0) = 0, \quad Bx(0) + Cx(1) = d,$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{t+2} & \frac{1}{2} \\ 0 & t \end{pmatrix}, \quad f(t) = \eta(t_* - t)f_1(t) + \eta(t - t_*)f_2(t), \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & \text{егер } t \geq 0, \\ 0, & \text{егер } t < 0, \end{cases}$$

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{t+2} \right) \cos t + \left(1 - \frac{1}{5(t+2)} \right) \sin t + \frac{t^3}{4} + \frac{3}{2} \\ \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} + 3t \end{pmatrix},$$

$$f_2(t) = \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{t+2} \right) \cos t + \left(1 - \frac{1}{5(t+2)} \right) \sin t + \frac{t^3}{4} - \frac{t+5}{t+2} \\ \frac{t^4}{2} - \frac{3t^2}{2} - 2t \end{pmatrix},$$

$$p = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 3 & \\ 10 \cos 0.3 - 2 \sin 0.3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -0.5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, d = \begin{pmatrix} \cos 1 - 0.2 \sin 1 + 0.5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Бұл есептің дәл шешімі $\left(x^*(t) = \eta(t_* - t) \begin{pmatrix} 0.2 \sin t - \cos t \\ -3 - 0.5t^3 \end{pmatrix} + \eta(t - t_*) \begin{pmatrix} 0.2 \sin t - \cos t + 3 \\ 2 - 0.5t^3 \end{pmatrix}, t_* = 0.3 \right)$ жұбы.

Тестілік есеп болған соң, мақалада ұсынылған алгоритм бойынша қойылған есептің жуық шешімін табамыз. Ол үшін $\nu = 3$ аламыз. Есептеу барысында $P_\nu(t_0, \lambda_1, u_1) = 0$ теңдеуінің шешімін табу үшін әр қадамда дихотомия әдісі қолданылды. Теңдеудің шешімін $\varepsilon = 0.000001$ дәлдігімен анықталды.

Төмендегі кестелерде әр қадамдағы есептеу нәтижелері келтірілген (Кесте 1-6).

Кесте 1. 0-ші қадамдағы $[0, t_*^{(0)}]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

m	t_m	$\lambda_{11}^{(0)} + u_{11}^{(0)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(0)} + u_{12}^{(0)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9990132524	-2.9982212631
2	0.0500000000	-0.9876979784	-2.9982815383
3	0.1000000000	-0.9739102275	-2.9987123472
4	0.1500000000	-0.9576844269	-2.9998886393
5	0.2000000000	-0.9390612308	-3.0021853294
6	0.2500000000	-0.9180873920	-3.0059772940
7	0.2995922863	-0.8950145067	-3.0115846219

Кесте 2. 0-ші қадамдағы $[t_*^{(0)}, 1]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

ℓ	t_ℓ	$\lambda_{21}^{(0)} + u_{21}^{(0)}(t_\ell)$	$\lambda_{22}^{(0)} + u_{22}^{(0)}(t_\ell)$
1	0.2995922863	2.1082897492	1.9897819483
2	0.3000000000	2.1084796609	1.9897245722
3	0.3500000000	2.1329611038	1.9814834745
4	0.4000000000	2.1597597829	1.9706101225
5	0.4500000000	2.1888006175	1.9567426689
6	0.5000000000	2.2200015585	1.9395186546
7	0.5500000000	2.2532737973	1.9185742681
8	0.6000000000	2.2885220531	1.8935436277
9	0.6500000000	2.3256449500	1.8640581364
10	0.7000000000	2.3645355007	1.8297459738
11	0.7500000000	2.4050817107	1.7902317972
12	0.8000000000	2.4471673239	1.7451367422
13	0.8500000000	2.4906727252	1.6940788246
14	0.9000000000	2.5354760224	1.6366738624
15	0.9500000000	2.5814543280	1.5725370537
16	1.0000000000	2.6284852649	1.5012853631

Кесте 3. 1-ші қадамдағы $[0, t_*^{(1)}]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

m	t_m	$\lambda_{11}^{(1)} + u_{11}^{(1)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(1)} + u_{12}^{(1)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9999985308	-2.9999990083
2	0.0500000000	-0.9887528953	-3.0000615070
3	0.1000000000	-0.9750358870	-3.0004990033
4	0.1500000000	-0.9588817914	-3.0016864970
5	0.2000000000	-0.9403309849	-3.0039989882
6	0.2500000000	-0.9194298349	-3.0078114768
7	0.2999994457	-0.8962308528	-3.0134988878

Кесте 4. 1-ші қадамдағы $[t_*^{(1)}, 1]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

ℓ	t_ℓ	$\lambda_{21}^{(1)} + u_{21}^{(1)}(t_\ell)$	$\lambda_{22}^{(1)} + u_{22}^{(1)}(t_\ell)$
1	0.2999994457	2.1037691452	1.9865011116
2	0.3000000000	2.1037694149	1.9865010368
3	0.3500000000	2.1292085436	1.9785634765
4	0.4000000000	2.1568242142	1.9680009099
5	0.4500000000	2.1865474016	1.9544383382
6	0.5000000000	2.2183038131	1.9375007631
7	0.5500000000	2.2520140741	1.9168131859
8	0.6000000000	2.2875939266	1.8920006086
9	0.6500000000	2.3249544394	1.8626880330
10	0.7000000000	2.3640022309	1.8285004614
11	0.7500000000	2.4046397019	1.7890628961
12	0.8000000000	2.4467652802	1.7440003395
13	0.8500000000	2.4902736740	1.6929377943
14	0.9000000000	2.5350561352	1.6355002634
15	0.9500000000	2.5810007312	1.5713127496
16	1.0000000000	2.6279926257	1.5000002571

Кесте 5. 2-ші қадамдағы $[0, t_*^{(2)}]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

m	t_m	$\lambda_{11}^{(2)} + u_{11}^{(2)}(t_m)$	$\lambda_{12}^{(2)} + u_{12}^{(2)}(t_m)$
1	0.0000000000	-0.9999985349	-2.9999990065
2	0.0500000000	-0.9887528995	-3.0000615053
3	0.1000000000	-0.9750358913	-3.0004990015
4	0.1500000000	-0.9588817957	-3.0016864953
5	0.2000000000	-0.9403309893	-3.0039989864
6	0.2500000000	-0.9194298394	-3.0078114750
7	0.2999994457	-0.8962308573	-3.0134988859

Кесте 6. 2-ші қадамдағы $[t_*^{(2)}, 1]$ аралығындағы жуық шешімнің мәндері

ℓ	t_ℓ	$\lambda_{21}^{(2)} + u_{21}^{(2)}(t_\ell)$	$\lambda_{22}^{(2)} + u_{22}^{(2)}(t_\ell)$
1	0.2999994457	2.1037691427	1.9865011141
2	0.3000000000	2.1037694124	1.9865010392
3	0.3500000000	2.1292085411	1.9785634789
4	0.4000000000	2.1568242117	1.9680009124
5	0.4500000000	2.1865473991	1.9544383408
6	0.5000000000	2.2183038106	1.9375007657
7	0.5500000000	2.2520140717	1.9168131886
8	0.6000000000	2.2875939242	1.8920006113
9	0.6500000000	2.3249544371	1.8626880359
10	0.7000000000	2.3640022285	1.8285004644
11	0.7500000000	2.4046396996	1.7890628992
12	0.8000000000	2.4467652779	1.7440003427
13	0.8500000000	2.4902736717	1.6929377976
14	0.9000000000	2.5350561330	1.6355002669
15	0.9500000000	2.5810007291	1.5713127533
16	1.0000000000	2.6279926236	1.5000002610

Белгілеулер енгіземіз:

$$\max_{t_m \in [0, t_*^{(s)}]} |\lambda_{11}^{(s)} + u_{11}^{(s)}(t_m) - x_1^*(t_m)| = \varepsilon_{11}^{(s)},$$

$$\max_{t_m \in [0, t_*^{(s)}]} \left| \lambda_{12}^{(s)} + u_{12}^{(s)}(t_m) - x_2^*(t_m) \right| = \varepsilon_{12}^{(s)}, \quad \max_{t_\ell \in [t_*^{(s)}, 1]} \left| \lambda_{21}^{(s)} + u_{21}^{(s)}(t_\ell) - x_1^*(t_\ell) \right| = \varepsilon_{21}^{(s)},$$

$$\max_{t_\ell \in [t_*^{(s)}, 1]} \left| \lambda_{22}^{(s)} + u_{22}^{(s)}(t_\ell) - x_2^*(t_\ell) \right| = \varepsilon_{22}^{(s)}, \quad \varepsilon^{(s)} = \max \left\{ \varepsilon_{11}^{(s)}, \varepsilon_{12}^{(s)}, \varepsilon_{21}^{(s)}, \varepsilon_{22}^{(s)} \right\}.$$

Жоғарыдағы 1-6 кестелерден келесі қорытынды жасай аламыз (Кесте 7):

Кесте 7. Бағалаулар

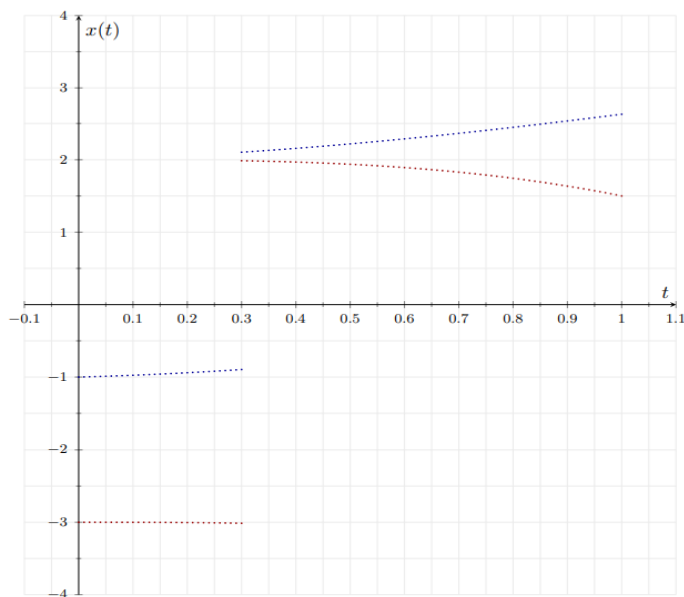
s	$\varepsilon_{11}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{12}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{21}^{(s)} \leq$	$\varepsilon_{22}^{(s)} \leq$	$\varepsilon^{(s)} \leq$
0	0.0014162549	0.0018604115	0.0047205109	0.0032269817	0.0047205109
1	0.0000018647	0.0000010374	0.0000018627	0.0000010368	0.0000018647
2	0.0000018602	0.0000010392	0.0000018602	0.0000010392	0.0000018602

7-ші кестеден ұсынылған алгоритмнің 2-ші қадамында есептің жуық шешімін $2 \cdot 10^{-6}$ -дан аспайтын дәлдікпен табылғанын көреміз.

Әр қадамда табылған бекітілмеген уақыт мезеті үшін төмендегі бағалаулар орындалады:

$$t_* - t_*^{(0)} < 0.00041, \quad t_* - t_*^{(1)} < 0.000000555, \quad t_* - t_*^{(2)} < 0.000000555,$$

демек, t_* нүктесі $1 \cdot 10^{-6}$ -дан аспайтын дәлдікпен табылды (Сурет 1).



Сурет 1. 2-ші қадамда табылған шешім: көк – $x_1^{(2)}(t)$, қызыл – $x_2^{(2)}(t)$

Қорытынды

Бұл жұмыста дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін бекітілмеген мезетінде импульстік әсері бар екі нүктелі шеттік есептің жуық шешімін табудың бір тәсілі ұсынылды. Ұсынылған тәсіл Д.С. Джумабаевтың дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін екі нүктелі шеттік есепті зерттеуге арналған параметрлеу әдісінің идеяларына толықтай сүйенеді. Келтірілген тестілік есептің осы тәсілмен шешімін табуға ұсынылған тәсілдің жоғары дәлдікпен нәтижеге жеткізетінін көрдік.

Бұл зерттеуді Қазақстан Республикасы Ғылым және жоғары білім министрлігінің Ғылым комитеті (Грант №АР19675193) қаржыландырады.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

- 1 Samoilenko A.M. *Impulsive Differential equations* / A.M. Samoilenko and M.O. Perestyuk // Singapore: World Scientific, 1995, 472 p.
- 2 Jiao J. *Analysis of a stage-structured predator-prey system with birth pulse and impulsive harvesting at different moments* / J. Jiao, S. Cai, and L. Chen // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2011. Vol. 12. no. 4. P. 2232-2244. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2011.01.005.
- 3 Nie L. *Dynamic analysis of an SIR epidemic model with state dependent pulse vaccination*, / L. Nie, Z. Teng, and A. Torres // *Nonlinear Analysis: Real World Applications*. 2012. Vol. 13. no. 4. P. 1612-1629. DOI: 10.1016/j.nonrwa.2011.11.019.
- 4 Cordova-Lepe F. *Stability analysis of a self-cycling fermentation model with state-dependent impulse times* / F. Cordova-Lepe, R. Del Valle, and G. Robledo // *Math. Methods Appl. Sci*. 2011. Vol. 37. no. 4. P. 2232-2244. DOI: 10.1002/mma.2907.
- 5 Akhmetov M.U. and Perestyuk N.A. *Stability of periodic solutions of differential equations with impulse action on surfaces*. *Ukr. Mat. Zh.* 41 (1989), No. 12, 1596–1601 English translation: *Ukr. Math. J.* 41 (1989), No. 12, 1368–1372.
- 6 Akhmet M.U. *On the general problem of stability for impulsive differential equations* / M.U. Akhmet // *J. Math. Anal. Appl.* 2003. Vol. 288. no. 1. P. 182-196. DOI: 10.1016/j.jmaa.2003.08.001.
- 7 Gabor G. *The existence of viable trajectories in state-dependent impulsive systems* / G. Gabor // *Nonl. Anal.* 2010. Vol. 72. no. 9-10. P. 3828-3836. DOI: 10.1016/j.na.2010.01.019
- 8 Rachunkova I. *Existence principle for higher-order nonlinear differential equations with state-dependent impulses via fixed point theorem* / I. Rachunkova, I. Tomecek // *Boundary Value Problems*. 2014. Vol. 2017. no. 118. DOI: 10.1186/1687-2770-2014-118.
- 9 Rachunkova I. *A constructive approach to boundary value problems with state-dependent impulses* / I. Rachunkova, L. Rachunek, A. Ronto, and M. Ronto // *Appl. Math. Comp.* 2016. Vol. 274. P. 726-744. DOI: 10.1016/j.amc.2015.11.033.
- 10 Ronto A. *Investigation of solutions of state-dependent multi-impulsive boundary value problems* / A. Ronto, I. Rachunkova, M. Ronto, and L. Rachunek // *Georgian Math. J.* 2017. Vol. 24. no. 2. P. 287-312. DOI: 10.1515/gmj-2016-0084.
- 11 Samoilenko A.M. *Periodic solutions of weakly nonlinear systems with impulse action* / A.M. Samoilenko, N.A. Perestyuk // *Diff. Equat.*, 1978. Vol. 14. no.16, P. 1034-1045.
- 12 Hakl R. *Almost periodic evolution systems with impulse action at state-dependent moments* / R. Hakl, M. Pinto, V. Tkachenko, and S. Trofimchuk // *J. Math. Anal. Appl.* 2017. Vol. 446. no.1. P. 1030-1045. DOI: 10.1016/j.jmaa.2016.09.024.
- 13 Dvornyk A.V. *Almost periodic solutions for systems with delay and non-fixed times of impulsive actions* / A.V. Dvornyk, V.I. Tkachenko // *Ukr. Math. J.* 2017. Vol. 68. P. 1673-1693. DOI: 10.1007/s11253-017-1320-z.
- 14 Dzhumabayev D.S. *Criteria for the unique solvability of a linear boundary-value problem for an ordinary differential equation*, *USSR Comput. Maths. Math. Phys.*, 29 (1989), 34-46.
- 15 Dzhumabaev D.S. *Solvability of a linear boundary value problem for a Fredholm integro-differential equation with impulsive inputs*, *Differential Equations*, 51:9 (2015), 1180-1197.