

**М.Ж. Сақыпбекова^{1*}, Ф.Р. Гусманова¹, С.А. Адилжанова¹,
Н.А. Тойганбаева¹, Л.Ш. Черикбаева¹**

¹ әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

*e-mail: sakypbekova.meruyert@gmail.com

КАВЕРНАДАҒЫ ЦИРКУЛЯЦИЯЛЫҚ СЫҒЫЛМАЙТЫН ТҰТҚЫР АҒЫНДАРДЫ ШЕШУ ҮШІН ЖОҒАРЫ ӨНІМДІ ЕСЕПТЕУ

Аңдатпа

Компьютерлік технологияның қарқынды дамуымен есептеу гидродинамикасы аэродинамикалық өнімділікті талдауда, күрделі ағын механизмін тиімді жобалауда және зерттеуде маңызды рөл атқарады. Кавернадағы сығылмайтын тұтқыр ағымның есебі қарастырылады. Осы есеп CFD-шешушілерін бағалау үшін кеңінен қолданылды, өйткені Рейнольдс санына, тор өлшеміне және қажетті уақыт қадамдарына байланысты мәселені шешу егжей-тегжейлі белгілі болғандықтан, мәселені шешу айтарлықтай есептеу ресурстарын қажет етеді. Осы есептің негізінде Re саны 100, 400 болғандағы және әртүрлі торлар өлшемдерін қолдана отырып, графикалық процессорда оңтайлы нәтижесі алынды. Орталық процессорлар мен графикалық процессорлар өнімділіктерінің салыстырмалы талдауы жасалып, графикалық процессорда бағдарламаның орындалу уақыты айтарлықтай артқанын көрсетті. Есептеу уақытын салыстыру графикалық процессор технологиясының қарқынды сандық есептеулерді қажет ететін инженерлік мәселелерді шешудегі артықшылығын көрсіп тұр.

Түйін сөздер: есептеу гидродинамикасы, CUDA, GPU, CPU, каверна, Навье-Стокс теңдеуі.

М.Ж. Сақыпбекова¹, Ф.Р. Гусманова¹, С.А. Адилжанова¹, Н.А. Тойганбаева¹, Л.Ш. Черикбаева¹

¹Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казакстан

ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ РЕШЕНИЙ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ НЕСЖИМАЕМЫХ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ В КАВЕРНЕ

Аннотация

В условиях быстрого развития компьютерных технологий вычислительная гидродинамика играет важную роль в анализе аэродинамических характеристик, эффективном проектировании и исследовании сложного механизма течения. Рассмотрена задача о течении несжимаемой вязкой жидкости в каверне. Эта задача широко используется для оценки CFD-решателей, поскольку подробно известно решение задачи в зависимости от числа Рейнольдса, размера сетки и необходимых временных шагов, решение задачи требует значительных вычислительных ресурсов. На основе этого расчета оптимальный результат был получен на графическом процессоре при числах Re 100, 400 и использовании разных размеров сетки. Проведен сравнительный анализ производительности центральных и графических процессоров и показано, что время выполнения программы на графическом процессоре значительно увеличилось. Сравнение времени вычислений показывает преимущество технологии графических процессоров при решении инженерных задач, требующих интенсивных численных вычислений.

Ключевые слова: вычислительная гидродинамика, CUDA, GPU, CPU, каверна, уравнение Навье-Стокса.

M. Sakypbekova¹, F. Gusmanova¹, S. Adilzhanova¹, N. Toiganbaeyeva¹, L. Cherikbayeva¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

HIGH-PERFORMANCE COMPUTING FOR SOLUTIONS OF CIRCULATING INCOMPRESSIBLE VISCOUS FLOWS IN A CAVITY

Abstract

With the rapid development of computer technologies, computational fluid dynamics plays an important role in the analysis of aerodynamic characteristics, efficient design and study of complex flow mechanism. The problem of incompressible viscous fluid flow in a cavern is considered. This problem is widely used to

evaluate CFD solvers, since the solution of the problem is known in detail depending on the Reynolds number, mesh size and required time steps, the solution of the problem requires significant computational resources. Based on this calculation, the optimum result was obtained on the graphics processor at Re numbers of 100, 400 and using different grid sizes. A comparative analysis of the performance of central and graphics processors has been carried out and it is shown that the program execution time on the graphics processor has increased significantly. The comparison of computation time shows the advantage of graphics processor technology in solving engineering problems requiring intensive numerical calculations.

Keywords: computational fluid dynamics, CUDA, GPU, CPU, cavity, Navier-Stokes equation.

Кіріспе

Сығылмайтын сұйықтық үшін Навье-Стокс теңдеулері сығылмайтын және тұтқыр сұйықтықтың ағынын модельдеді. Сығылмайтын ағында қысымға байланысты тығыздықтың өзгеруі еленбейді, сондықтан тығыздықты тұрақты деп санауға болады. Бұл сұйықтық ағыны су, май және ауа ағынында төмен жылдамдықпен түзіледі. Сығылмайтын сұйықтық ағыны сызықтық емес дербес дифференциалдық теңдеулер жүйесімен ұсынылған және массаны сақтау және қозғалыс мөлшерін сақтау теңдеулерінен тұрады. Бұл теңдеуді сандық түрде шешу қиын, өйткені қысым өрісін айнаымалы жылдамдықпен байланыстыратын күй теңдеуі жоқ. Жоғарыда аталған қиындықты жеңу үшін сандық шешудің бірнеше тәсілдері бар, олардың біріншісі - ток және құйын функциясы арқылы қысым өрісін жою [1, 2]. Екінші тәсіл қарапайым айнаымалыларға негізделген, бұл тәсіл мыналарды қамтиды: маркерлер мен ұяшықтар әдісі (MAC) [3], бөлшек қадам әдісі [4], қысым теңдеулерінің жартылай айқын әдісі (SIMPLE) [5] және жасанды сығымдау әдісі [6]. Маркерлер мен ұяшықтардың әдістері, бөлшек қадам әдісі және қысым теңдеулерінің жартылай айқын әдісі Пуассон теңдеуін шешу арқылы қысым өрісін алады. Жасанды қысу әдісі массаның сақталу теңдеуіне уақыт қысымының туындысын қосады, сондықтан қысымды тікелей алуға болады.

Навье-Стокстың (N–S) сығылмайтын теңдеулерін шешудің тұрақтандырылған әдісі ақырлы элементтерді зерттеудің маңызды саласында қолданылады. Шешім әдістеріне негізделген соңғы элементті тұрақтандыру екі компоненттен тұрады: рейнольдстың үлкен сандарындағы конвекция мүшелерін таңдау нәтижесінде пайда болатын кеңістіктік тербелістерді тұрақтандыру және қысымды тұрақтандыру. Конвекция мүшесінің стандартты центрге тартқыш іріктеуінен туындаған кеңістіктік тербелістерді айналып өту үшін Галеркиннің стандартты емес соңғы элемент әдісін жасау үшін айтарлықтай күш жұмсалды. Тұрақтандырудың кейбір танымал және жалпы әдістеріне Петров-Галеркин (Pranowo және т.б., 2018), ең кіші квадраттардың ақырлы элемент әдісі (LSFEM) (Shui және т. б., 2018; Castelo және т. б., 2021) және сипаттамалық бөлу (CBS) [7] жатады.

Кавернадағы екі өлшемді сығылмайтын тұтқыр ағынның сандық жүзеге асуын ұсынамыз. Бұл эталонды есеп есептеу гидродинамикасы (CFD) шешушілерін бағалау үшін кеңінен қолданылды, өйткені Рейнольдс санына, тор өлшеміне және қажетті уақыт қадамдарына байланысты мәселені шешу егжей-тегжейлі белгілі болғандықтан, мәселені шешу айтарлықтай есептеу ресурстарын қажет етеді. Қақпақпен басқарылатын кавернадағы ағын мәселесін шешуде авторлардың көпшілігі жылдамдық – ағын функциясының тұжырымдамасын қолданды, өйткені белгісіз екеуі ғана, ал үздіксіздік теңдеуі автоматты түрде орындалады. Екі өлшемді декарттық жүйеде қысылмайтын Навье-Стокс теңдеулері қызығушылық тудыратын қақпақпен басқарылатын кавернадағы ағын мәселесін модельдеу үшін қолданылады. Бұл сызықтық емес, уақытқа тәуелді дифференциалдық теңдеулердің жиынтығы:

$$1) \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

$$2) \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (2)$$

$$3) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

мұндағы p – қысым, (x, y) – координаттар, t – уақыт, (u, v) – жылдамдықтар компоненттері, Re -Рейнольдс саны.

Тапсырманы дұрыс қою үшін бастапқы және шекаралық шарттар қою керек. Бастапқы шарттар:

$$u(x, y, 0) = 0, \quad (4)$$

$$v(x, y, 0) = 0, \quad (5)$$

шекаралық шарттар:

$$\begin{aligned} u(0, y, t) = 0, & \quad u(1, y, t) = 0, \\ u(x, 0, t) = 0, & \quad u(x, 1, t) = 1, \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} v(0, y, t) = 0, & \quad v(1, y, t) = 0, \\ v(x, 0, t) = 0, & \quad v(x, 1, t) = 0, \end{aligned}$$

Зерттеу әдіснамасы

Сандық шешімдер үшін қолданылатын жалпы дискреттеу әдістері - ақырлы айырымдық, ақырлы көлем және ақырлы элементтер әдістері. Бұл әдістер торға негізделген және сандық дискреттеу үшін торды қажет етеді. Элементтер мен түйіндердің байланыс топологияларын құру салыстырмалы түрде күрделі міндетке айналады. Сонымен қатар, торсыз әдісті әзірлеу ұсынылады. Бұл әдіс торды қажет етпейді, тек тарату түйіндерін, Навье-Стокс теңдеулерінің жуықталған шешімдерін алудың бірқатар торсыз әдістерін қажет етеді [8, 9].

Теңдеулерді шешу үшін қысымды түзету нұсқасы үшін бөлшек қадам әдісі [4, 1 б.] қолданылады. Бірінші қадам үшін (4.1) және (4.2) теңдеуіндегі қысым шарттарын төмендету арқылы аралық жылдамдық компоненттерін (u^* , v^*) айқын емес түрде есептейміз:

$$\begin{aligned} u_{ij}^* = \Delta t \left(-u_{ij}^n \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{\Delta x} - v_{ijk}^n \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{\Delta y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \left(\frac{u_{i+1j}^n - 2u_{ij}^n + u_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{ij+1}^n - 2u_{ij}^n + u_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) + u_{ij}^n \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} v_{ij}^* = \Delta t \left(-u_{ij}^n \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{\Delta x} - v_{ij}^n \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{\Delta y} + \right. \\ \left. + \frac{1}{Re} \left(\frac{v_{i+1j}^n - 2v_{ij}^n + v_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{v_{ij+1}^n - 2v_{ij}^n + v_{ij-1}^n}{\Delta y^2} \right) \right) + v_{ij}^n \end{aligned} \quad (8)$$

Жылдамдықтың аралық компоненттері үздіксіздік теңдеуін қанағаттандырмайды, яғни (4.3) теңдеуді. Сондықтан u_{ij}^{n+1} , v_{ij}^{n+1} жылдамдықтардың дұрыс компоненттерін алу үшін оларды келесідей реттеу керек:

$$u_{ij}^{n+1} = -\Delta t \frac{P_{ij}^n - P_{i-1j}^n}{\Delta x} + u_{ij}^* \quad (9)$$

$$v_{ij}^{n+1} = -\Delta t \frac{P_{ij}^n - P_{i-1j}^n}{\Delta y} + v_{ij}^* \quad (10)$$

Жылдамдық пен қысым арасындағы байланысы үздіксіздік теңдеуін қысым үшін Пуассон теңдеуімен ауыстыруға әкеледі:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x} + \frac{\partial v^*}{\partial y} \right) \quad (11)$$

Бес нүктелі схема көбінесе екі өлшемді Пуассон теңдеуінің ақырлы айырымдық аналогын құру үшін қолданылады. Мәселені шешу үшін біз Якоби әдісін қолданамыз. Туындыларды ақырлы айырымдықтармен жуықтау келесідей болады:

$$P_{ij}^{n+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{P_{i+1j}^n + P_{i-1j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{ij+1}^n + P_{ij-1}^n}{\Delta y^2} - \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{u_{ij}^* - u_{i-1j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{ij}^* - v_{ij-1}^*}{\Delta y} \right) \right) \left(\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) \quad (12)$$

Шарт орындалғанша көрсетілген процедураны орындаймыз:

$$\max_{ij} |P_{ij}^{n+1} - P_{ij}^n| < \varepsilon$$

Есептің шешу жолдары

Графикалық процессорда (GPU) параллелизация алгоритмі берілген. Біз параллель алгоритмдердің өнімділігін арттыруға ерекше назар аударамыз. CUDA платформасында жұмыс істейтін кодтар күтілетін нәтиже беретіні байқалды. GPU-дағы сынақтарымызды орталық процессорда (CPU) бірдей модельдеудің тізбектей кодын іске қосу арқылы алынған сынақтармен салыстырсақ, GPU-дағы модельдеу CPU қарағанда әлдеқайда жылдамырақ жұмыс істейді. GPU барлық есептеулерді орындайды және CPU тек GPU бағдарламалық жасақтамасын басқаруға, файлдарды енгізу-шығаруға және деректерді тасымалдауға жауап береді. Бұл код C++ және CUDA C/C++ көмегімен жазылған.

Қолданылатын айқын ақырлы айырымдық схемасы әр түйінде тәуелсіз есептеулер жүргізуге мүмкіндік береді, сондықтан параллелизация схемасының әр түрлі мүмкіндіктері бар. Түйіндер тобын ағындар блогымен өңдеуге болады, онда әр ағын сәйкес түйіндегі ақырлы айырымдық әдісін бағалайды. Блок ағындары бірдей ағындық процессормен (SM) өңделеді, ал параллелизация SM-дегі ядролардың санына байланысты. GPU архитектурасында блоктағы ағындар санына шектеу бар. Бұл жұмыста NVIDIA GeForce GTX 1050 картасы бір блокқа 1024 ағынға дейін қолданылды. Дегенмен, бір блок санына көбірек ағындар әдетте жоғары өнімділікті білдірмейді. Әр түрлі блоктарды бір уақытта әр түрлі SM-де өңдеуге болады, содан кейін блоктардың параллелизациясы GPU-дағы SM санына байланысты болады. Бір блокқа ағындардың саны (ағындар) 32 мәніне бекітілген. Содан кейін блоктар Саны blocks = Nodes/Threads болды. Шешім тек ауқымды жадты қолдану арқылы жүзеге асырылды. Бұл тәсілде баяу ауқымды жадтың әрбір ағыны соңғы айырмашылықтар үлгісін бағалау үшін қажетті мәндерді оқуы керек. Әр түйіннің айналасындағы мәндер тиісті ағынмен жүктелуі керек. Нәтижесінде әр түйін бірнеше рет оқылады, бұл өнімділікке әсер етеді. Бұл мәселенің шешімі деректерді қайта пайдалану деп аталатын тәсіл болып табылады, онда деректер

жиынтығы тезірек ортақ жадқа жүктеледі және түйіндер тобы бағаланады. Деректер жиынтығы неғұрлым көп болса, соғұрлым көп оқылым аз болады және осылайша өнімділік жақсарады.

1-алгоритм GPU-да параллелизация алгоритмін көрсетеді. CUDA коды деректерді GPU ғаламдық жадына тасымалдаудан, CUDA ядросын іске қосудан және деректерді GPU жадынан орталық процессор жадына тасымалдаудан тұрады. Бұл есепті шешу үшін біз 16x16 өлшемді блоктарды қолданамыз және тор өлшемі мына формуламен анықталады:

$$\dim3 \dimGrid((N - 1) / \dimBlock.x + 1, (N - 1) / \dimBlock.y + 1).$$

Алгоритм 1. Кавернадағы екі өлшемді сығылмайтын тұтқыр тоқты жүзеге асыру

compute initial function matrix u, v

from initial condition (4.4), (4.5) we get $u_n \leftarrow u, v_n \leftarrow v$

do {

 call function $u(d_{un}, d_u, d_v, N, h, dt)$;

$d_{un} \leftarrow d_u$;

 call function $v(d_{vn}, d_v, d_u, N, h, dt)$;

$d_{vn} \leftarrow d_v$;

 call function $f(d_u, d_v, d_f, N, h, dt)$;

 call function $P(d_{Pn}, d_p, d_f, N, h, d_{max})$;

$d_{Pn} \leftarrow d_P$

$k++$;

} while ($k < nIterations$);

Соңғы екі итерацияның мәндері арасындағы ауытқу үшін 2 алгоритмде көрсетілгендей параллель редукция қолданылады.

Алгоритм 2. Соңғы екі итерация мәндерінің арасындағы ауытқулар

unsigned int $s \leftarrow blockDim.x / 2$;

 while ($s \neq 0$) {

 if ($tid < s$) {

 if ($shArrr[tid + s] > shArrr[tid]$)

$shArrr[tid] \leftarrow shArrr[tid + s]$;

 }

 __syncthreads();

$s \leftarrow s / 2$;

 }

 if ($tid == 0$) {

$d_{max}[index] \leftarrow shArrr[0]$;

 }

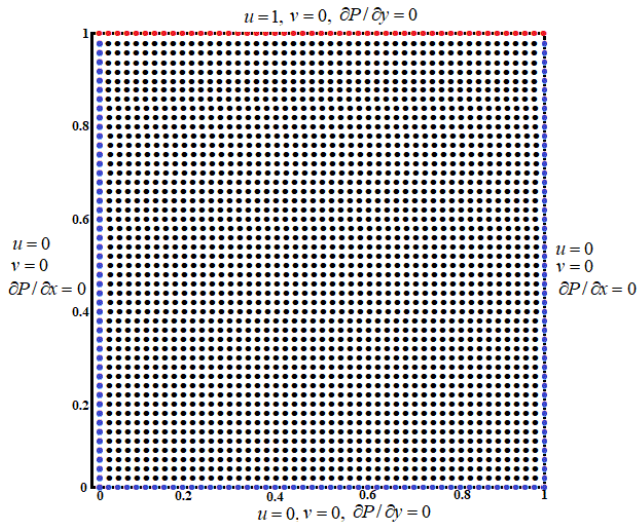
$sData_P[d_{ti}][d_{tj}] \leftarrow output_{Pn}[index]$;

Осыдан кейін біз $cudaMemcpy(resultOnHost, nb, cudaMemcpyDeviceToHost)$ көмегімен құрылғыдан есептелген деректерді хостқа көшіреміз.

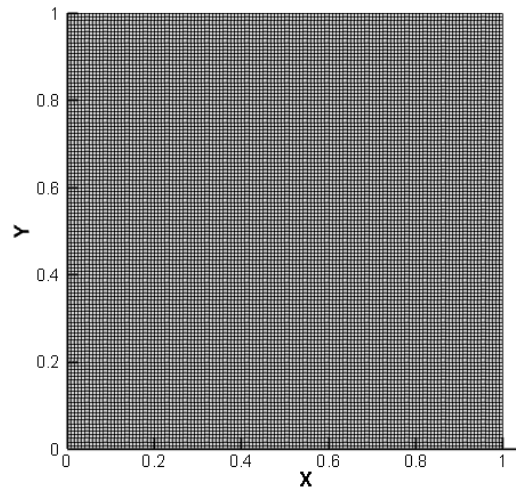
Зерттеу нәтижелері

Қақпақпен басқарылатын кавернадағы ағын-бұл есептеу гидродинамикасы саласындағы ең танымал міндеттердің бірі. Burggraf (1966) алғашқы жұмысынан бастап көптеген зерттеулер басқарылатын кавернадағы ағынның динамикасын зерттеді. Геометрия қарапайым болғанымен, бұл модель кавернадағы күрделі ағын режимдерін жақсы түсінуге мүмкіндік береді. Осы модельдің көмегімен h индексі $1/(N-1)$ белгіленген қақпақпен басқарылатын

кавернадағы екі өлшемді ағынның сандық шешімдерінің сериясы алынды. 1-суретте көрсетілгендей, қуыстың өлшемсіз өлшемі 1×1 . Өлшемсіз жылдамдықтар $u = 1$ және $v = 0$ жоғарғы қабырғаға беріледі, ал қалған үш жағы $u = 0$ және $v = 0$ шекаралық шарттары берілген қабырғалар. Біз 2-суретте көрсетілген 129×129 тордан тұратын біртекті торды қолданамыз. Таңдалған тор өлшемі тәуелсіз тор сынағы негізінде оңтайлы болып табылады.

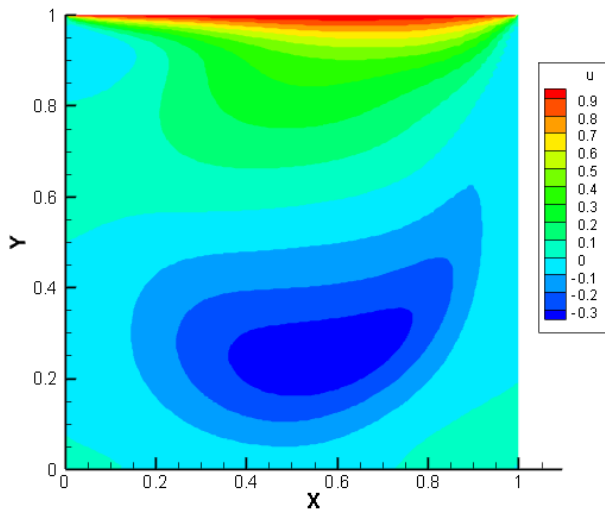


Сурет 1. Кавернадағы сығылмайтын тұтқыр есебі

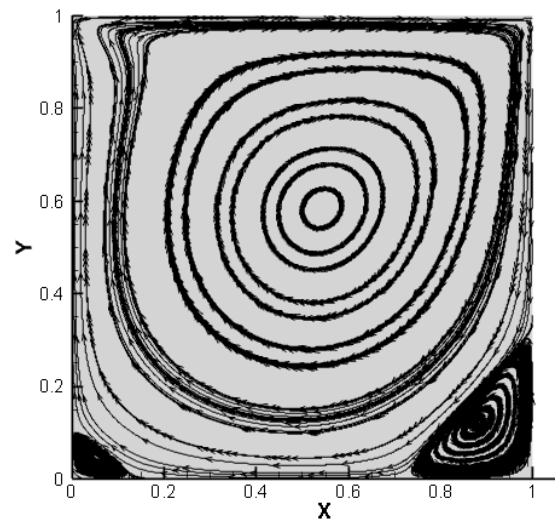


Сурет 2. 129×129 тор өлшемін білдіретін схемалық диаграмма

3-суретте қақпақпен басқарылатын кавернаны модельдеу нәтижесі көрсетілген. 4-суретте кавернаның орталығына жақын жерде пайда болатын бастапқы құйын көрсетілген, екінші реттік құйындыларға үлкен назар аударылады, қарқынды ағын сызықтарымен белгіленген бұрыштарда пайда болатын шағын жергілікті айналымдар.



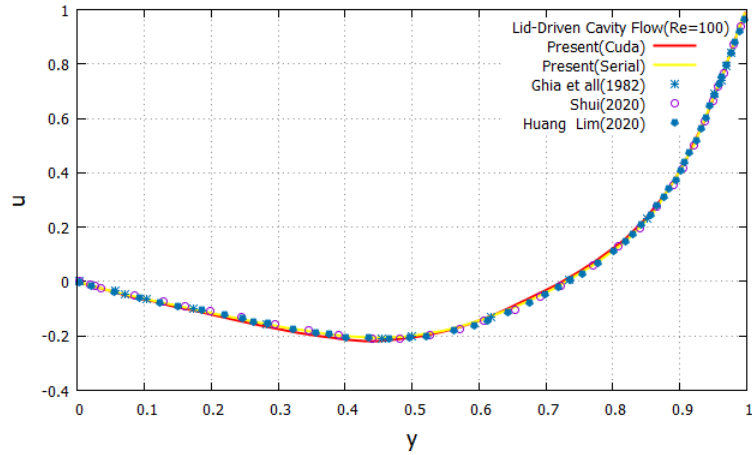
Сурет 3. Контурлар мен жылдамдықтар



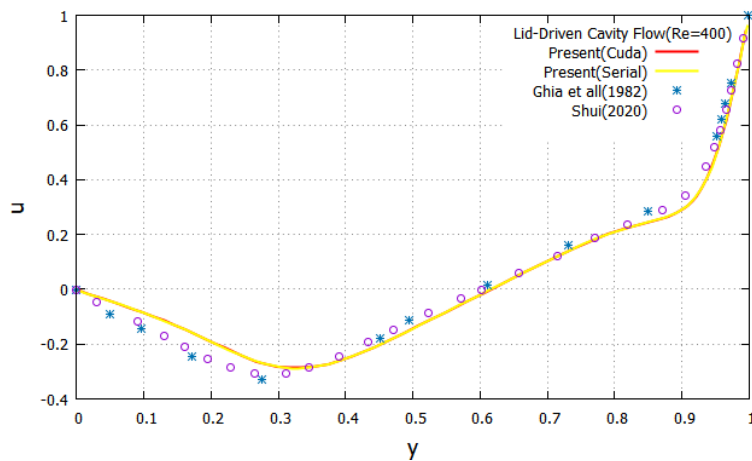
Сурет 4. Кавернаға арналған ағын сызықтары

5, 6, 7, 8-суреттерде осьтік сызықтардағы параллель сандық шешімнің жылдамдық компоненттерін дәл салыстыру үшін көлденең жылдамдықтардың осьтік сызықтар бойымен тік таралуы көрсетілген. Әр суретте x және y координаттары сәйкес осьтерді, ал u және v сәйкесінше $x = 0,5$ және $y = 0,5$ кезінде көлденең және тік жылдамдықтардың компоненттерін білдіреді. Рейнольдстың әр түрлі сандарында қақпақпен басқарылатын екі

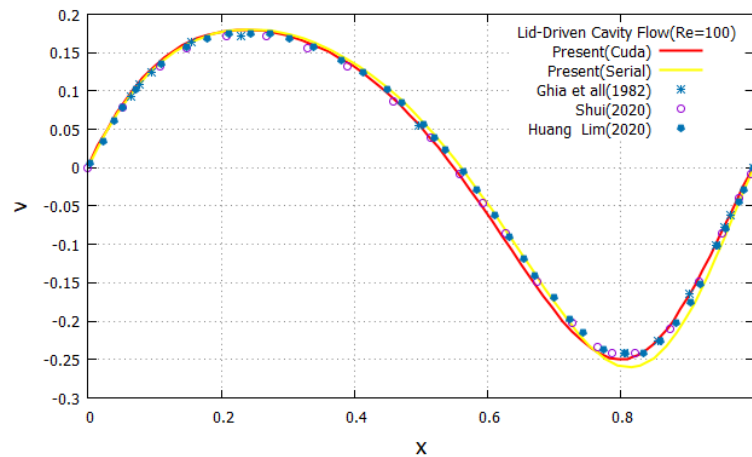
өлшемді есеп туралы Shui (2020), Ghia (1982), Huang & Lim (2020) және басқалардың салыстырмалы нәтижелері алынды. $Re=100$ және $Re=400$ болғанда торлар саны 64×64 , 128×128 , 512×512 . Re жоғарылаған сайын максималды көлденең жылдамдықтың мәні артады, ал максималды шыңның нүктесі қабырғаға қарай жылжиды. Нәтижелерден көрініп тұрғандай, модельдеу қолданыстағы зерттеулердің нәтижелеріне сәйкес келеді [7, 10, 11].



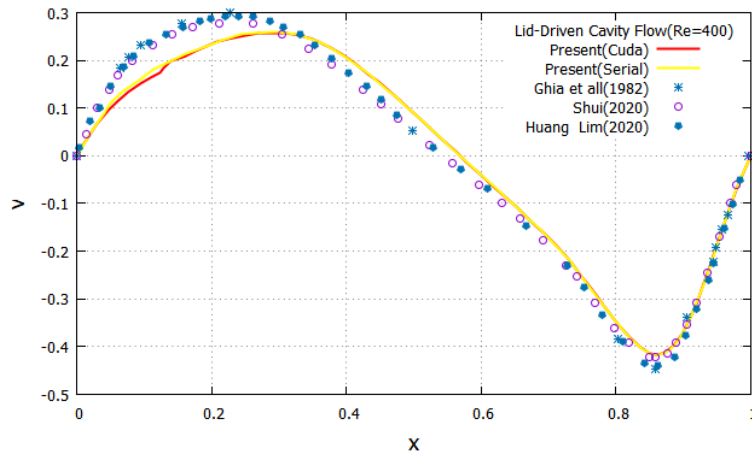
Сурет 5. Көлденең жылдамдықпен геометриялық центр арқылы өтетін сызықтар бойындағы жылдамдықтар, $Re=100$



Сурет 6. Көлденең жылдамдықпен геометриялық центр арқылы өтетін сызықтар бойындағы жылдамдықтар, $Re=400$



Сурет 7. Тік жылдамдықпен геометриялық центр арқылы өтетін сызықтар бойындағы жылдамдықтар, $Re=100$



Сурет 8. Тік жылдамдықпен геометриялық центр арқылы өтетін сызықтар бойындағы жылдамдықтар, $Re=400$

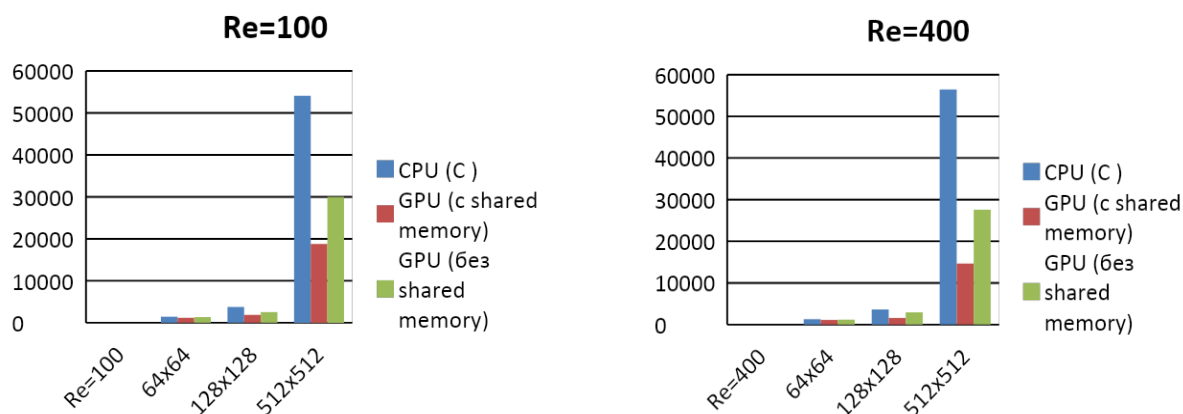
Дискуссия

Салыстырмалы түрде арзан GPU CFD есептеулерін айтарлықтай жылдамдата алады. Графикалық процессорлардың жаппай өндірісі соңғы тұтынушыға шығындарды қысқартты, ал өндірушілердің зерттеулері мен инновациялары есептеу қуатын күрт арттырып, энергияны пайдалануды жақсартты. Маңызды қасиет-масштабтау, өйткені өңдеу қуатын арттыру үшін бірнеше құрылғыларды біріктіруге болады. Сонымен қатар, бағдарламалық жасақтама үнемі жетілдіріліп отырады, оның ішінде тіл мен кітапхананың жаңа мүмкіндіктері бар. Сәйкесінше, GPU технологиясы инженерлік есептеулерді жылдамдатудың қызықты және қол жетімді нұсқасы болып табылады.

1-кестеде CPU мен GPU уақытын салыстыру көрсетілген, бұл жылдамдықтың айтарлықтай өсуін көрсетеді, GPU көмегімен есептеулерді көрсететін өнімділікті талдауға мүмкіндік берді. Есептеу уақытын салыстыру (9-сурет) қарқынды сандық есептеулерді қажет ететін инженерлік есептерді шешуде GPU технологиясының артықшылығын көрсетеді. Бұл нәтиже қарапайым, бірақ қуатты CUDA оңтайландыру әдісі болып табылады, ол жалпы өңдеу уақытына айтарлықтай әсер етеді.

Кесте 1. Есептеу жылдамдығын арттыру

Орындалу уақыты					
Торлар өлшемі	CPU(C)	GPU (shared memory)	GPU (global memory)	u-velocity (shared memory) v-velocity (global memory)	v-velocity (shared memory) u-velocity (global memory)
$Re=100$					
64x64	1436,53	1082,4	1345,5	1235,8	1237,6
128x128	3663,23	1266,15	2538,4	1756,4	1698,9
512x512	54101,6	13163,4	30012,8	2583,4	2678,9
$Re=400$					
64x64	1598,01	1122,6	1485,9	1356,8	1345,7
128x128	3831,09	1590,4	2945,6	2236,6	2348,3
512x512	56450,5	14685,8	37604,8	30696,3	29456,4



Сурет 9. $Re=100$ и $Re=400$ болғанда бағдарламаның орындалу уақыты

Қорытынды

Кавернадағы сығылмайтын тұтқыр ағынның есебі қарастырылады. Процессор уақыты мен графикалық жұмыс процессорының салыстырмалы талдауы жасалды, бұл графикалық процессордың жылдамдығының едәуір өсуін көрсетті. Бұл есептеу уақытын салыстыру қарқынды сандық есептеулерді қажет ететін инженерлік есептерді шешуде GPU технологиясының артықшылығын көрсетіп тұр. Бұл нәтиже қарапайым, бірақ қуатты CUDA оңтайландыру әдісі болып табылады, ол жалпы өңдеу уақытына айтарлықтай әсер етеді.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

- [1] Kamel A. G., Haraz E. H., Hanna S. N. Numerical simulation of three-sided lid-driven square cavity // *Engineering Reports*. – 2020. – Vol. 2, Issue 4. DOI: 10.1002/eng2.12151
- [2] Сақынбекова М.Ж. Екі өлшемді ағынды модельдеуде гидродинамиканың негізгі теңдеуін сандық шешу // *ҚазҰТЗУ Хабаршысы*. – 2018. – №3. – С. 482-486.
- [3] Shobha A., Lakshmi C. V., Venkatadri K., Prasad V. R. Comparative numerical simulation of lid-driven cavity flow problem with pressure term handling methods // *International conference on mathematical sciences and applications (ICMSA-2019)*. – 2020. DOI:10.1063/5.0014568
- [4] Moon H., Hong S. and You D. Application of the parallel diagonal dominant algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations // *Journal of Computational Physics*. – 2020. – Vol. 423. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109795>
- [5] He W., Qin G., Wang Y. and Bao Z. A segregated spectral element method for the 2D transient incompressible Navier-Stokes equations // *Computers & Fluids*. – 2020. – Vol. 216. – 104643. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104643>
- [6] Shi X., Agrawal T., Lin C.-A., Hwang F.-N. and Chiu T.-H. A parallel nonlinear multigrid solver for unsteady incompressible flow simulation on multi-GPU cluster // *Journal of Computational Physics*. – 2020. – Vol. 414. – 109447. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109447>
- [7] Shui Q. Penalty and characteristic-based operator splitting with multistep scheme finite element method for unsteady incompressible viscous flows // *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal*. – 2020. – Vol. 20, №3. – P. 125-142. DOI:10.1504/PCFD.2020.10029278
- [8] Zhan N., Chen R. and You Y. Meshfree method based on discrete gas-kinetic scheme to simulate incompressible/compressible flows // *Physics of Fluids*. – 2021. – Vol. 33, №1. – 017112. <https://doi.org/10.1063/5.0033770>
- [9] Zamolo R., Nobile E. Numerical analysis of advection-diffusion problems on 2D general-shaped domains by means of a RBF Collocation Meshless Method // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1224. DOI: 10.1088/1742-6596/1224/1/012013
- [10] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method // *J. Comput. Phys*. – 1982. – Vol. 48. – P. 387–411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)

[11] Huang T., Lim H.-C. *Simulation of Lid-Driven Cavity Flow with Internal Circular Obstacles* // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10, №13. – P. 4583. <https://doi.org/10.3390/app10134583>

References

[1] Kamel A. G., Haraz E. H., Hanna S. N. *Numerical simulation of three-sided lid-driven square cavity* // *Engineering Reports*. – 2020. – Vol. 2, Issue 4. DOI: 10.1002/eng2.12151

[2] Sakypbekova M.Zh.(2018) *Eki əlshemdi əzyndy model'deude gidrodinamikanyñ negizgi teñdeuin sandyқ sheshu* [Numerical solution of the basic equation of hydrodynamics in two-dimensional flow simulation]. *KazҰTZU Habarshysy*. –2018. – №3. – S. 482-486. (in Kazakh)

[3] Shobha A., Lakshmi C. V., Venkatadri K., Prasad V. R. *Comparative numerical simulation of lid-driven cavity flow problem with pressure term handling methods* // *International conference on mathematical sciences and applications (ICMSA-2019)*. – 2020. DOI:10.1063/5.0014568

[4] Moon H., Hong S. and You D. *Application of the parallel diagonal dominant algorithm for the incompressible Navier-Stokes equations* // *Journal of Computational Physics*. – 2020. – Vol. 423. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109795>

[5] He W., Qin G., Wang Y. and Bao Z. *A segregated spectral element method for the 2D transient incompressible Navier-Stokes equations* // *Computers & Fluids*. – 2020. – Vol. 216. – 104643. <https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2020.104643>

[6] Shi X., Agrawal T., Lin C.-A., Hwang F.-N. and Chiu T.-H. *A parallel nonlinear multigrid solver for unsteady incompressible flow simulation on multi-GPU cluster* // *Journal of Computational Physics*. – 2020. – Vol. 414. – 109447. <https://doi.org/10.1016/j.jcp.2020.109447>

[7] Shui Q. *Penalty and characteristic-based operator splitting with multistep scheme finite element method for unsteady incompressible viscous flows* // *Progress in Computational Fluid Dynamics, an International Journal*. – 2020. – Vol. 20, №3. – P. 125-142. DOI:10.1504/PCFD.2020.10029278

[8] Zhan N., Chen R. and You Y. *Meshfree method based on discrete gas-kinetic scheme to simulate incompressible/compressible flows* // *Physics of Fluids*. – 2021. – Vol. 33, №1. – 017112. <https://doi.org/10.1063/5.0033770>

[9] Zamolo R., Nobile E. *Numerical analysis of advection-diffusion problems on 2D general-shaped domains by means of a RBF Collocation Meshless Method* // *Journal of Physics: Conference Series*. – 2019. – Vol. 1224. DOI: 10.1088/1742-6596/1224/1/012013

[10] Ghia U., Ghia K.N., Shin C.T. *High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method* // *J. Comput. Phys*. – 1982. – Vol. 48. – P. 387-411. [https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)

[11] Huang T., Lim H.-C. *Simulation of Lid-Driven Cavity Flow with Internal Circular Obstacles* // *Applied Sciences*. – 2020. – Vol. 10, №13. – P. 4583. <https://doi.org/10.3390/app10134583>