МАТЕМАТИКА ЖӘНЕ МАТЕМАТИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕУ

МАТЕМАТИКА И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

MATHEMATICS AND MATHEMATICAL MODELING

МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2023.84.4.001

Н.Б. Алимбекова[1], А.К. Бакишев[1], А.С. Бердышев[2]*

[1]Восточно-Казахстанский университет имени С. Аманжолова, г.Усть-Каменогорск, Казахстан
[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г.Алматы, Казахстан
[*]e-mail: nurlana1101@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕШЕНИЯ ДРОБНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ФИЛЬТРАЦИИ С ПЕРЕМЕННЫМ ПОРЯДКОМ ДРОБНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

Аннотация

Проблема решения начально-краевых задач для нелинейных дробно-дифференциальных уравнений с переменными порядками дробных производных имеет большое прикладное значение в нефтедобывающей промышленности. Суть обобщения дробно-дифференциальной модели течения жидкости в гетерогенных пористых средах состоит в предположении, что порядки дробных производных не являются постоянными, а являются функциями временной и пространственной переменной, и, в частности, функциями искомого решения. Гипотеза обобщения состоит в изучении течения жидкости, когда порядок производной проявляет монотонный переход от начального порядка к конечному, либо когда режим диффузии сменяется в некоторый момент времени. В настоящей работе рассматривается дробно-дифференциальное уравнение фильтрации с переходным (нестационарным) законом фильтрации. Для численного решения построена аппроксимация с использованием метода конечных разностей для дробного временного производного и метода конечных элементов по пространственной переменной. Дробная производная переменного порядка в смысле Капуто аппроксимирована формулой второго порядка по времени. Получены априорные оценки устойчивости численного метода по начальным данным и по правой части уравнения.

Ключевые слова: дробно-дифференциальная задача, задача фильтрации, дробная производная, гетерогенная среда, переменный порядок дробной производной, устойчивость.

N.B. Alimbekova[1], A.K. Bakishev[1], A.S. Berdyshev[2]
[1]S. Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan

STABILITY OF SOLUTIONS TO THE FRACTIONAL DIFFERENTIAL FILTRATION PROBLEM WITH A VARIABLE ORDER OF THE FRACTIONAL DERIVATIVE

Abstract

In this paper, we consider a fractional differential filtration equation with a transient (non-stationary) filtration law. The essence of the generalization of the fractional differential model of fluid flow in heterogeneous porous media is the assumption that the orders of fractional derivatives are not constant, but are functions of a time and space variable, and, in particular, functions of the desired solution. The generalization hypothesis is to study the fluid flow when the order of the derivative exhibits a monotonic transition from the initial order to the final one, or when the diffusion regime changes at some point in time. In this paper, a fractional-differential generalization of the filtration equation with a transient (non-stationary) filtration law is considered. For the numerical solution, an approximation is constructed using the finite difference method for the fractional time derivative and the finite element method for a spatial variable. The fractional derivative of variable order in the sense of Caputo is approximated by a second-order formula in time. A priori estimates of the stability of the numerical method are obtained from the initial data and from the right side of the equation.

Keywords: fractional differential problem, filtration problem, fractional derivative, heterogeneous environment, variable order of fractional derivative, stability.

Н.Б. Алимбекова[1], А.К. Бакишев[1], А.С. Бердышев[2]

[1]С. Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен, Қазақстан

[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы, Қазақстан

БӨЛШЕК ТУЫНДЫЛАРЫ АЙНЫМАЛЫ РЕТТІ БӨЛШЕК-ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫ ФИЛЬТРАЦИЯ ЕСЕБІ ШЕШІМДЕРІНІҢ ОРНЫТЫЛЫҒЫ

Аңдатпа

Бөлшек туындылары айнымалы ретті сызықтық емес бөлшек-дифференциалды теңдеулер үшін бастапқы-шекаралық есептерді шешу мәселесі мұнай өнеркәсібінде үлкен қолданбалы мәнге ие. Гетерогенді кеуекті ортадағы сұйықтық ағынының бөлшек-дифференциалды моделін жалпылаудың мағынасы бөлшек туындылардың реті тұрақты емес, олардың уақыт пен кеңістіктік айнымалының функциялары болуында, соның ішінде, ізделінді шешімнің функциялары деп болжауында жатыр. Жалпылау гипотезасы туынды ретінің бастапқы реттен соңғы ретке монотонды ауысқанда немесе диффузия режимі белгілі бір уақытта өзгергенде сұйықтықтың гетерогенді кеуекті ортадағы ағынын зерттеуден тұрады. Бұл жұмыста өтпелі (стационарлық емес) фильтрация заңымен берілген бөлшек-дифференциалды фильтрация теңдеуі қарастырылады. Сандық шешім үшін уақыт бойынша бөлшек туынды үшін ақырлы айырымдар әдісін және кеңістіктік айнымалы бойынша ақырлы элементтер әдісін қолдана отырып жуықтау құрылды. Капуто мағынасындағы айнымалы ретті бөлшек туынды уақыт бойынша екінші ретті формуламен жуықталған. Бастапқы мәліметтер және теңдеудің оң жағы бойынша сандық әдістің орнықтылығының априорлық бағалары алынды.

Түйін сөздер: бөлшек дифференциалды есеп, фильтрация есебі, бөлшек туынды, гетерогенді орта, бөлшек туындының айнымалы реті, орнықтылық.

Введение

В последние несколько десятилетий уравнения, содержащие производные дробного порядка, стали предметом всестороннего исследования не только с математической точки зрения, но также получили широкое применение при моделировании естественных и технологических процессов в сложных средах. Основное их применение связано с учетом важного свойства среды – памяти, которое позволяет учесть не только текущее состояние процесса, но также все ее предыдущие состояния. Например, основополагающей работой в дробно-дифференциальной теории фильтрации является работа [1], в которой предлагаются обобщения классических уравнений фильтрации для учета эффектов памяти пористой среды. Данная идея вызвала интерес среди исследователей и была продолжена в нескольких направлениях – в области исследования разрешимости задачи, дальнейшего обобщения модели, разработки эффективных численных методов, применения различных определений дробных производных. В следующих работах [2-5] дробно-дифференциальный подход применен к исследованию течения жидкости в трещиноватых пористых средах и построены эффективные конечно-элементные методы, проведено их строгое теоретическое обоснование. Особенностью и основной трудностью данной задачи является вхождение нескольких слагаемых с дробными производными различного порядка.

Исследования последних двух десятилетий показывают, что диффузия в сложных гетерогенных средах сопровождается частым изменением режима диффузии [6,7]. В частности, авторы [8] пришли к выводу, что существует еще один тип памяти, который проявляется при смене режима диффузии. Касательно моделей фильтрации известно, что порядок дробной производной относится с фрактальным измерением пористой среды, определяемой индексом Хёрста, который изменяется при изменении геометрической структуры среды [9]. Физически интересным является вопрос, когда порядок производной проявляет монотонный (линейный или нелинейный) переход от начального порядка к конечному, либо когда режим диффузии сменяется в некоторый момент времени. Это позволяет более точно выявить скрытые эффекты при течении жидкости в пористой среде, связанные с изменением свойств пористой среды. Таким образом, необходимость изучения данной темы непосредственно следует из практического применения модели для более глубокого изучения характера течения жидкости, а также перспективы проведенных исследований к исследованию широкого круга других моделей.

Во-вторых, несмотря на наличие ограниченного числа работ, посвященных теоретическому исследованию методов решения краевых задач для уравнений с дробными производными переменного порядка, существует множество концептуальных математических проблем, не позволяющих перенести известные результаты к исследованию указанных задач фильтрации. Это связано с сильной нелинейностью дробно-дифференциального обобщения закона Дарси [2], с вхождением в уравнения системы функций капиллярного давления [10], градиент которых неограниченно возрастает при приближении насыщенности воды к остаточной водонасыщенности, с вхождением вырождающегося коэффициента капиллярной диффузии. Кроме того, сложность в решение задачи, рассматриваемой в работе, вносит вхождение в уравнения системы нескольких слагаемых с дробными производными, что связано со свойствами дробных производных переменного порядка. Например, для ряда определений дробных производных переменного порядка не является обратным оператором для интеграла дробного порядка переменного порядка. Данные обстоятельства указывают на необходимость разработки и проведения тщательного исследования методов решения.

В-третьих, в силу чрезвычайной сложности получения аналитического решения данной задачи, возникает необходимость разработки приближенных методов. Однако наряду с вычислительными сложностями, присущими решению дробно-дифференциальных уравнений постоянного порядка (например, трудоемкость вычисления дискретных аналогов дробных производных [11]), решение уравнений с дробными производными переменного порядка порождает другие трудности. Например, коэффициентные матрицы численных схем лишаются структуры матрицы Тёплица [9], что не позволяет использовать быстрые алгоритмы вычисления дробных производных. Кроме того, известно, что достаточно сложно получить аппроксимационные формулы дробных производных переменного порядка выше второго порядка [12].

Многими авторами [1,13,14] предложено смоделировать движение жидкости в трещиноватой среде с использованием аппарата дробного исчисления, предполагая зависимость характера потока не только от текущего состояния процесса, но и от истории изменений этого процесса в прошлом. В результате классические уравнения фильтраций заменены их дробно-дифференциальными аналогами постоянного порядка. Экспериментальные результаты также показывают, что для описания фильтрационного течения жидкости через пористые среды могут быть эффективно использованы дробно-дифференциальные уравнения [15]. Литературный обзор по моделированию течения жидкости через пористые среды с использованием подхода памяти с использованием дробных производных представлен в работе [16]. Для учета эффекта памяти и пространственные корреляции в пористых средах предложены различные модели на основе методов дробного исчисления [17]. При этом порядок дробной производной определяет степень влияния памяти на течение жидкости через пористую среду.

Для дробно-дифференциальных уравнений, как в случае постоянного, так и переменного порядка нелегко найти аналитические решения, поэтому многими авторами были предложены численные аппроксимации дробных производных переменного порядка и вычислительные методы решения. Самыми распространенными численными методами решения дробно-дифференциальных уравнений с дробными производными переменного порядка являются методы конечных разностей, спектральные методы, матричные методы, методы сплайновой интерполяции и другие.

В настоящей работе выполнен углубленный сравнительный анализ основных подходов к моделированию процессов фильтрации с использованием дробных производных, анализ построения проекционных методов реализации дробно-дифференциальных моделей с переменными порядками дробных производных. Для решения дробно-дифференциальной задачи фильтрации с переходным законом фильтрации переменного порядка дробной производной были построены полудискретная и полностью дискретная постоновки задачи с помощью аппраксимационной формулы второго порядка. Кроме тог, была доказана теорема об устойчивости полностью дискретной дробной задачи фильтрации с переменным порядком дробной производной в смсле Капуто по начальным данным и по правой части уравнения.

Методология исследования

В классической теории переходной (нестационарный) закон фильтрации рассматривается как система дифференциальных уравнений в частных производных:

$$\frac{\mu}{k}\overleftarrow{\upsilon}+\nabla u = 0,$$

$$S\partial_t u+\nabla\overleftarrow{\upsilon}=q(x,t,u),$$

где k – абсолютная проницаемость пласта, μ – вязкость жидкости, S – коэффициент упругой ёмкости пласта, u – давление, $\overleftarrow{\upsilon}$ – скорость фильтрации.

Преобразуя данную систему получим следующую начально-краевую задачу дробно-дифференциального обобщения уравнении фильтрации с переходным (нестационарным) законом фильтрации переменного порядка дробной производной в смысле Капуто:

Задача 1. В области $\overline{Q}_T=\overline{\Omega}\times[0,T]$, где $\Omega=(0,1)$

$$\begin{cases}\partial_{0,t}^{\alpha(t)}u-\mu\nabla^2u=f, & x\in\Omega, t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\overline{\Omega},\\ u(0,t)=u(1,t)=0, & t>0,\end{cases}$$

где $\alpha(t)\in(0,1)$. Оператор дробного производного переменного порядка в смысле Капуто может быть определен в виде:

$${}_0^C\partial_t^{\alpha(t)}u(t)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha(t))}\int_0^t\frac{u'(s)}{(t-s)^{\alpha(t)}}ds,\ 0<\alpha(t)<1. \tag{1}$$

Определим смешанную вариационную постановку задачи 1.

Задача 2. Найти $u\in H^1(0,T;H_0^1(\Omega))$, такое что для любого $v\in H_0^1(\Omega)$:

$$\left(\partial_{0,t}^{\alpha(t)}u,v\right)+(\mu\nabla u,\nabla v)=(f,v), \tag{2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\ x\in\overline{\Omega}, \tag{3}$$

где $\alpha(t)\in(0,1)$.

Для построения полудискретной постановки задачи введем разбиение временного отрезка $[0,T]$ точками $t_n=n\tau$, $\tau>0$, $n=0,1,...,N$, так что $N\tau=T$. Обозначим через u^n полудискретную аппроксимацию функции u относительно времени в точке $t = t_n$. Введем следующие обозначения $t_{n+\sigma} = (n+\sigma)\tau$, $\alpha_{n-1+\sigma} = \alpha(t_{n-1+\sigma})$, $\sigma = 1 - \dfrac{\alpha(t_{n-1+\sigma})}{2}$, $n = 0,1,\ldots, N-1$.

Оценивая производную ${}_0^C\partial_t^{\alpha(t)}u(t)$ с переменным порядком $\alpha(t) \in (0,1)$ в точке сетки $t_{n-1+\sigma}, n = 0,1,\ldots, N-1,$ из (1) получим

$$ {}_0^C\partial_t^{\alpha_{n-1+\sigma}} u(t_{n-1+\sigma}) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{n-1+\sigma})} \int_0^{t_{n-1+\sigma}} \frac{u'(s)}{(t_{n-1+\sigma} - s)^{\alpha_{n-1+\sigma}}} ds. $$

Чтобы определить полудискретную постановку Задачи (1) мы используем следующую аппроксимационную формулу дробной производной переменного порядка в смысле Капуто.

Лемма 1. Дискретный аналог $\Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u^{n-1+\sigma}$ дробной производной в смысле Капуто $\partial_{0,t}^{\alpha(t)} u(t_n)$ порядка $0 < \alpha(t) < 1$ можно представить в виде [18]:

$$ \Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u^{n-1+\sigma} = \frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma(2-\alpha_{n-1+\sigma})} \sum_{s=1}^{n} d_{n-s}^{\alpha_{n-1+\sigma}} \left(u^s - u^{s-1}\right), \tag{4} $$

где

$$ a_0^{(\alpha_{n-1+\sigma})} = \sigma^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}, a_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})} = \frac{1}{2}\left[(k+\sigma)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}} - (k+\sigma-1)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}\right], 1 \le k \le n-1, $$

$$ b_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})} = \frac{1}{2-\alpha_{n-1+\sigma}}\left[(k+\sigma)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}} - (k+\sigma-1)^{2-\alpha_{n-1+\sigma}}\right] - (k+\sigma)^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}, 1 \le k \le n-1. $$

$$ d_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})} = \begin{cases} a_1^{(\alpha_{n-1+\sigma})} + a_0^{(\alpha_{n-1+\sigma})} + b_1^{(\alpha_{n-1+\sigma})}, & k = 0, \\ a_{k+1}^{(\alpha_{n-1+\sigma})} + a_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})} + b_{k+1}^{(\alpha_{n-1+\sigma})} - b_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})}, & 1 \le k \le n-2, \\ b_{k+1}^{(\alpha_{n-1+\sigma})} - b_k^{(\alpha_{n-1+\sigma})}, & k = n-1. \end{cases} $$

причем для величины $r_n^{\alpha_{n-1+\sigma}} = {}_0^C\partial_t^{\alpha_{n-1+\sigma}} u(t_{n-1+\sigma}) - \Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u^{n-1+\sigma}$ справедлива оценка

$$ \left|r_n^{\alpha_{n-1+\sigma}}\right| \le \frac{1}{\Gamma(1-\alpha_{n-1+\sigma})}\left[\chi_n \max_{t_0 \le t \le t_{n-1}} \left|f''(t)\right| + \frac{\sigma^{1-\alpha_{n-1+\sigma}} \tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{1-\alpha_{n-1+\sigma}} \max_{t_{n-1} \le t \le t_n} \left|f''(t)\right|\right]\tau^2, $$

где $\chi_1 = \dfrac{\tau^{-\alpha_\sigma}\sigma^{1-\alpha_\sigma}}{(1-\alpha_\sigma)}$, $\chi_n = \dfrac{c_1 t_{n-1+\sigma}^{1-\alpha_{n-1+\sigma}}}{(1-\alpha_{n-1+\sigma})}$, $n = 2,\ldots,N-1$, c_1 является положительной константой.

Определим полудискретную постановку задачи:

Задача 3. Пусть известно значение $u^{n-1} \in H_0^1(\Omega)$, $u^0 = u_0(x)$. Найти $u^n \in H_0^1(\Omega)$ такое, что для всех $v \in H_0^1(\Omega)$:

$$ \left(\Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u^{n-1+\sigma}, v\right) + \left(\mu\nabla u^n, \nabla v\right) = (f, v), \tag{5} $$

или

$$ \left(\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma(2-\alpha_{n-1+\sigma})} \sum_{s=1}^{n} d_{n-s}^{\alpha_{n-1+\sigma}} \left(u^s - u^{s-1}\right), v\right) + \left(\mu\nabla u^n, \nabla v\right) = (f, v), \tag{6} $$

$$u^0 = u_0(x),\ x \in \overline{\Omega}, \tag{7}$$

где $\alpha(t) \in (0,1)$.

Пусть K_h – равномерное разбиение на $\overline{\Omega}$. Для $l \in \mathrm{N}$ обозначим через $P_l(e)$ пространство многочленов степени не выше l на $e \in \mathrm{K}_h$.

Определим дискретное пространство $V_h \subset H_0^1(\Omega)$:

$$V_h = \left\{ v_h \in H_0^1(\Omega) \cap C^0\left(\overline{\Omega}\right) \middle| v_h |_e \in P_1(e), \forall e \in \mathrm{K}_h \right\},$$

Задача 4. Пусть известно значение $u_h^{n-1} \in H_0^1(\Omega)$, $u_h^0 = u_0(x)$. Найти $u_h^n \in V_h$, $n = 1,2,...,N$, удовлетворяющее следующим тождествам для любого $v_h \in V_h$:

$$\left(\Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u_h^{n-1+\sigma}, v_h\right) + \left(\mu \nabla u_h^n, \nabla v_h\right) = \left(f, v_h\right) \tag{8}$$

или

$$\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \sum_{s=1}^{n} d_{n-s}^{\alpha_{n-1+\sigma}} \left(u_h^s - u_h^{s-1}, v_h\right) + \left(\mu \nabla u_h^n, \nabla v_h\right) = \left(f, v_h\right),$$

где $\alpha(t) \in (0,1)$.

Для доказательства основной теоремы используем известную лемму Гронуолла и лемму оценки слагаемого с дробной производной.

Лемма 2. Если $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ – две положительные последовательности, $\{c_n\}$ – монотонная положительная последовательность, и они удовлетворяют неравенствам

$$a_0 + b_0 \le c_0,\ a_n + b_n \le c_n + \mu \sum_{i=0}^{n-1} a_i,\ \mu > 0,$$

то справедлива оценка

$$a_n + b_n \le c_n e^{n\mu},\ n = 0,1,2,...$$

Лемма 3. Для любой функции $u \in L^2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\left(\Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}} u^{n-1+\sigma}, u^n\right) \ge \frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)} \left[\Theta_n^{\nu} - \Theta_{n-1}^{\nu} - \frac{1}{2} d_{n-1}^{\alpha_\sigma} \left\| u^0 \right\|_0^2\right],$$

где $\Theta_n^{\nu} = \dfrac{1}{2} \sum_{s=1}^{n} d_{n-s}^{\alpha_{n-1+\sigma}} \left\| u^s \right\|_0^2$.

Результаты исследования

Основным результатом данного исследования является теорема об устойчивости полностью дискретной задачи фильтрации с переходным (нестационарным) законом фильтрации переменного порядка дробной производной.

Для доказательства теоремы будут использованы следующие предположения:

(AI) Задача 1 имеет единственное решение имеющее количество производных, необходимое для проведения анализа.

(AII) Существуют конечное положительное действительное число μ_*, такое что для всех $x \in \mathrm{R}$ выполняются условия $0 < \mu_* \le \mu(x)$.

Теорема. Дискретная задача 4 при всех $\tau > 0$, устойчива по начальным данным и правой части и выполняется следующая оценка:

$$\Theta_n^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq C\left(\Theta_0^{\nu}+\|f\|^2\right).$$

Доказательство. В (8) выберем $v_h=u_h^n$:

$$\left(\Delta_{0,t}^{\alpha_{n-1+\sigma}}u_h^{n-1+\sigma},u_h^n\right)+\left(\mu\nabla u_h^n,\nabla u_h^n\right)=\left(f,u_h^n\right).$$

Используя Лемму 3 приходим к следующему неравенству:

$$\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\left[\Theta_n^{\nu}-\Theta_{n-1}^{\nu}-\frac{1}{2}d_{n-1}^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|u^0\right\|_0^2\right]+\mu\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\|f\|\left\|u_h^n\right\|.$$

Оттуда получим:

$$\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\Theta_n^{\nu}+\mu\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\Theta_{n-1}^{\nu}+\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\frac{1}{2}d_{n-1}^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|u^0\right\|_0^2+\|f\|\left\|u_h^n\right\|$$

Суммируем последнее неравенство по n от 1 до n

$$\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\Theta_n^{\nu}+\mu\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\Theta_0^{\nu}+\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}d_{i-1}^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|u^0\right\|_0^2+\|f\|\sum_{i=1}^{n}\left\|u_h^i\right\|.$$

Используя элементарное неравенство $ab\leq\frac{1}{2}\left(a^2+b^2\right)$ приходим к неравенству:

$$\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{\sigma}\right)}\Theta_n^{\nu}+\mu\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\Theta_0^{\nu}+\frac{\tau^{-\alpha_{n-1+\sigma}}}{\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}d_{i-1}^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|u^0\right\|_0^2+\frac{1}{2}\|f\|^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\|u_h^i\right\|^2.$$

Умножим обе части тождества на $\Gamma\left(2-\alpha_{n-1+\sigma}\right)\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}$:

$$\Theta_n^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\Theta_0^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\|f\|^2+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\sum_{i=1}^{n}\left\|u_h^i\right\|^2.$$

Применим лемму Гронуолла в предположении $a_n=\Theta_n^{\nu}$, $b_n=C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|\nabla u_h^n\right\|^2$, $c_n=\Theta_0^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\|f\|^2$. Тогда

$$\Theta_n^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\left\|\nabla u_h^n\right\|^2\leq\Theta_0^{\nu}+C\tau^{\alpha_{n-1+\sigma}}\|f\|^2.$$

Используя, что $\tau\leq T$ приходим к утверждению теоремы.

Дискуссия

Обзор основополагающих работ по теории фильтрации и численных методов решения задач фильтрации, по теории дробного исчисления не выявил работы по исследованию проекционных методов решения нелинейных дробно-дифференциальных уравнений фильтрации с дробными производными переменного порядка. Поэтому данное исследование является достаточно новым и актуальным направлением в современной теории дробной производной и вычислительной гидродинамике.

Заключение

Обзор основополагающих работ по теории фильтрации и численных методов решения задач фильтрации, по теории дробного исчисления не выявил работы по исследованию проекционных методов решения нелинейных дробно-дифференциальных уравнений фильтрации с дробными производными переменного порядка. Поэтому данное исследование является достаточно новым и актуальным направлением в современной теории дробной производной и вычислительной гидродинамике.

Следует отметить, что большинство известных подходов решения задач данного класса основано на применении более простых конечно-разностных методов и методов коллокации с предварительным применением преобразования Лапласа. Недостаточно внимание уделено более универсальным конечно-элементным методам (например, разрывным методам Галеркина), которые снимают ограничения на область интегрирования, позволяют без особых трудностей использовать разрывные коэффициенты, возникающие в случае фильтрации в гетерогенных средах. Обзор основополагающих работ по теории фильтрации и численных методов решения задач фильтрации, по теории дробного исчисления не выявил работ по исследованию проекционных методов решения нелинейных дробно-дифференциальных уравнений фильтрации с дробными производными переменного порядка.

Литературный обзор показал, что работы, посвященные решению дробно-дифференциальных уравнений с дробными производными переменного порядка проекционными методами (например, методом конечных элементов) были изданы только в последние годы, а их количество ограничено [9]. Отметим, что их непосредственное применение к рассматриваемым задачам фильтрации не представляется возможным и требует дополнительных исследований.

Благодарность

Работа выполнена при поддержке грантового финансирования научно-технических программ и проектов Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, ИРН AP14972807, 2022-2024 годы.

Список использованной литературы:

1 Caputo M. Models of Flux in Porous Media with Memory // Water Resources Research. - 2000. - Vol. 36, № 3. - pp. 693–705. https://doi.org/10.1029/1999WR900299

2 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. Convergence Analysisof a Numerical Method for aFractional Model of Fluid Flow in Fractured Porous Media // Mathematics. - 2021. - Vol. 9, № 2179. - pp. 1–24. https://doi.org/10.3390/math9182179

3 Alimbekova N.B., Baigereyev D.R., Berdyshev A.S. Finite Element Method for Solving a Fractional Flow Model in Porous Media // Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki". - 2022. - № 1 (77). - pp. 7–14. https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.01

4 Учайкин В. В. Дробно-дифференциальные модели в гидромеханике // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика. - 2019. - Том 27, № 1. - С. 5-40. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40

5 Газизов Р. К., Лукащук С. Ю. Дробно-дифференциальный подход к моделированию процессов фильтрации в сложных неоднородных пористых средах // Вестник УГАТУ. - 2017. - том. 21, №. 4. - с. 104-112.

6 Umarov S., Steinberg S. Variable Order Differential Equations with Piecewise Constant Order-Function and Diffusion with Changing Modes // Journal of Analysis and Its Applications. - 2009. - Vol. 28. - pp. 431–450. https://doi.org/10.48550/arXiv.0903.2524

7 Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications // Fract. Calc. Appl. Anal. - Springer Science; Business Media LLC, - 2019. - Vol. 22, № 1. - pp. 27–59. https://doi.org/10.1515/fca-2019-0003

8 Lorenzo C.F., Hartley T.T. Variable Order and Distributed Order Fractional Operators // Nonlinear Dynamics. - Springer Science; Business Media LLC, - 2002. - Vol. 29, № 1/4. - pp. 57–98.

https://doi.org/10.1023/A:1016586905654

9 Jia J., Wang H., Zheng X. A Preconditioned Fast Finite Element Approximation to Variable-Order Time-Fractional Diffusion Equations in Multiple Space Dimensions // Appl. Numer. Math. - Elsevier BV, - 2021. - Vol. 163. - pp. 15–29. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.001

10 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. Convergence Analysis of a Numerical Method for a Fractional Model of Fluid Flow in Fractured Porous Media // Mathematics. - MDPI AG, - 2021. - Vol. 9, № 18. - p. 2179. https://doi.org/10.3390/math9182179

11 Ke R., Ng M.K., Sun H.-W. A Fast Direct Method for Block Triangular Toeplitz-Like with Tri-Diagonal Block Systems from Time-Fractional Partial Differential Equations // J. Comput. Phys. - Elsevier BV, - 2015. - Vol. 303. - pp. 203–211. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.09.042

12 Xu T., Lu S., Chen W., Chen H. Finite Difference Scheme for Multi-Term Variable-Order Fractional Diffusion Equation // Adv. Differ. Equ. - Springer Science; Business Media LLC, - 2018. - Vol. 2018, № 1. https://doi.org/10.1186/s13662-018-1544-8

13 Zhong W., Li C., Kou J. Numerical Fractional-Calculus Model for Two-Phase Flow in Fractured Media // Advances in Mathematical Physics. - Hindawi Limited, - 2013. - Vol. 2013. - pp. 1–7. https://doi.org/10.1155/2013/429835

14 Hossain M.E. Numerical Investigation of Memory-Based Diffusivity Equation: The Integro-Differential Equation // Arabian Journal for Science and Engineering. - Springer Science; Business Media LLC, - 2016. - Vol. 41, № 7. - pp. 2715–2729. https://doi.org/10.1007/s13369-016-2170-y

15 He J.-H. Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - Elsevier BV, - 1998. - Vol. 167, № 1-2. - pp. 57–68. http://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00108-X

16 Hashan M., Jahana T.U. L. N. Zaman, Imtiaz S., Hossain M.E. Modelling of Fluid Flow Through Porous Media Using Memory Approach: A Review // Mathematics and Computers in Simulation. - 2020. - Vol. 177. - pp. 643–673. http://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.05.026

17 Caffarelli L., Vazquez J.L. Nonlinear Porous Medium Flow with Fractional Potential Pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. - 2011. - Vol. 202, № 2. - pp. 537–565. https://doi.org/10.1007/s00205-011-0420-4

18 Du Ruilian and Liang Zongqi. Two New Approximations for Variable-Order Fractional Derivatives // Discrete Dynamics in Nature and Society. - 2017. - Vol. 2017. - P. 1–10. https://doi.org/10.1155/2017/1586249

References:

1 Caputo M. Models of Flux in Porous Media with Memory // Water Resources Research. - 2000. - Vol. 36, № 3. - pp. 693–705. https://doi.org/10.1029/1999WR900299

2 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. Convergence Analysisof a Numerical Method for aFractional Model of Fluid Flow inFractured Porous Media // Mathematics. - 2021. - Vol. 9, № 2179. - pp. 1–24. https://doi.org/10.3390/math9182179

3 Alimbekova N.B., Baigereyev D.R., Berdyshev A.S. Finite Element Method for Solving a Fractional Flow Model in Porous Media // Vestnik KazNPU. Seriya "Fiziko-matematicheskie nauki". - 2022. - № 1 (77). - pp. 7–14. https://doi.org/10.51889/2022-1.1728-7901.01

4 Uchajkin V. V. (2019) Drobno-differencial'nye modeli v gidromekhanike [Fractional differential models in fluid mechanic]. Izvestiya vuzov. Prikladnaya nelinejnaya dinamika. Tom 27, № 1. 5-40.. https://doi.org/10.18500/0869-6632-2019-27-1-5-40 (in Russian)

5 Gazizov R. K., Lukashchuk S. YU. (2017) Drobno-differencial'nyj podhod k modelirovaniyu processov fil'tracii v slozhnyh neodnorodnyh poristyh sredah [Fractional differential approach to modeling filtration processes in complex inhomogeneous porous media]. Vestnik UGATU.tom. 21, №. 4. 104-112. (in Russian)

6 Umarov S., Steinberg S. Variable Order Differential Equations with Piecewise Constant Order-Function and Diffusion with Changing Modes // Journal of Analysis and Its Applications. - 2009. - Vol. 28. - pp. 431–450. https://doi.org/10.48550/arXiv.0903.2524

7 Sun H., Chang A., Zhang Y., Chen W. A Review on Variable-Order Fractional Differential Equations: Mathematical Foundations, Physical Models, Numerical Methods and Applications // Fract. Calc. Appl. Anal. - Springer Science; Business Media LLC, - 2019. - Vol. 22, № 1. - pp. 27–59. https://doi.org/10.1515/fca-2019-0003

8 Lorenzo C.F., Hartley T.T. Variable Order and Distributed Order Fractional Operators // Nonlinear Dynamics. - Springer Science; Business Media LLC, - 2002. - Vol. 29, № 1/4. - pp. 57–98.

https://doi.org/10.1023/A:1016586905654

9 Jia J., Wang H., Zheng X. A Preconditioned Fast Finite Element Approximation to Variable-Order Time-Fractional Diffusion Equations in Multiple Space Dimensions // Appl. Numer. Math. - Elsevier BV, - 2021. - Vol. 163. - pp. 15–29. https://doi.org/10.1016/j.apnum.2021.01.001

10 Baigereyev D., Alimbekova N., Berdyshev A., Madiyarov M. Convergence Analysis of a Numerical Method for a Fractional Model of Fluid Flow in Fractured Porous Media // Mathematics. - MDPI AG, - 2021. - Vol. 9, № 18. - p. 2179. https://doi.org/10.3390/math9182179

11 Ke R., Ng M.K., Sun H.-W. A Fast Direct Method for Block Triangular Toeplitz-Like with Tri-Diagonal Block Systems from Time-Fractional Partial Differential Equations // J. Comput. Phys. - Elsevier BV, - 2015. - Vol. 303. - pp. 203–211. https://doi.org/10.1016/j.jcp.2015.09.042

12 Xu T., Lu S., Chen W., Chen H. Finite Difference Scheme for Multi-Term Variable-Order Fractional Diffusion Equation // Adv. Differ. Equ. - Springer Science; Business Media LLC, - 2018. - Vol. 2018, № 1. https://doi.org/10.1186/s13662-018-1544-8

13 Zhong W., Li C., Kou J. Numerical Fractional-Calculus Model for Two-Phase Flow in Fractured Media // Advances in Mathematical Physics. - Hindawi Limited, - 2013. - Vol. 2013. - pp. 1–7. https://doi.org/10.1155/2013/429835

14 Hossain M.E. Numerical Investigation of Memory-Based Diffusivity Equation: The Integro-Differential Equation // Arabian Journal for Science and Engineering. - Springer Science; Business Media LLC, - 2016. - Vol. 41, № 7. - pp. 2715–2729. https://doi.org/10.1007/s13369-016-2170-y

15 He J.-H. Approximate Analytical Solution for Seepage Flow with Fractional Derivatives in Porous Media // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. - Elsevier BV, - 1998. - Vol. 167, № 1-2. - pp. 57–68. http://doi.org/10.1016/S0045-7825(98)00108-X

16 Hashan M., Jahana T.U. L. N. Zaman, Imtiaz S., Hossain M.E. Modelling of Fluid Flow Through Porous Media Using Memory Approach: A Review // Mathematics and Computers in Simulation. - 2020. - Vol. 177. - pp. 643–673. http://doi.org/10.1016/j.matcom.2020.05.026

17 Caffarelli L., Vazquez J.L. Nonlinear Porous Medium Flow with Fractional Potential Pressure // Archive for Rational Mechanics and Analysis. - 2011. - Vol. 202, № 2. - pp. 537–565. https://doi.org/10.1007/s00205-011-0420-4

18 Du Ruilian and Liang Zongqi. Two New Approximations for Variable-Order Fractional Derivatives // Discrete Dynamics in Nature and Society. - 2017. - Vol. 2017. - P. 1–10. https://doi.org/10.1155/2017/1586249