

Н.Д. Заурбекова¹, Н.С. Заурбеков^{2*}, Е.Ж. Теңізбаев³, А.А. Аманбаев⁴, Н.А. Регинбаева⁵

¹Казахский Национальный женский педагогический университет, г. Алматы, Казахстан

²Казахский Национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан

³Центрально-Азиатский инновационный университет, г. Шымкент, Казахстан

⁴Алматинский университет энергетики и связи имени Г.Даукеева, г. Алматы, Казахстан

⁵Академия гражданской авиации, г. Алматы, Казахстан

*e-mail: agu_nurgali@mail.ru

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК МАССИВА ГОРНЫХ ПОРОД НА ОСНОВЕ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Аннотация

Изучены возможности применения численных методов исследования устойчивости бортов карьеров с учётом запредельной деформируемости горных пород, в том числе определение механические характеристики массива горных пород. Математические модели породного массива, отражающие полный комплекс прочностных и деформационных свойств горных пород, необходимо реализовать в виде численных процедур, обеспечивающих выполнение заданных законов состояния. В работе данная задача осуществлена с помощью метода конечных элементов. Разработаны метод и численные процедуры на основе деформационной теории пластичности и метода конечных элементов, реализующие линейно-упругий характер деформирования породного массива в допредельной области и разрыхляемость, разупрочняемость в запредельной стадии деформирования. Основной целью работы является разработка процедур, реализующие математическую модель определения механические характеристики массива горных пород на основе численного метода конечных элементов. Полученная новая эффективная численная процедура реализации предложенной модели на основе метода конечных элементов, позволяет в единой расчётной схеме учитывать технологическую последовательность отработки месторождения. Рассмотренные процедуры решения нелинейных задач применима к средам как упрочняющимся, так и разупрочняющимся с ассоциированным и неассоциированным законами состояния.

Ключевые слова: устойчивость бортов карьеров, математическая модель породного массива, метод конечных элементов, деформируемость горных пород, численные методы, деформационная теория пластичности.

Н.Д. Заурбекова¹, Н.С. Заурбеков², Е.Ж. Теңізбаев³, А.А. Аманбаев⁴, Н.А. Регинбаева⁵

¹Қазақ Ұлттық қыздар педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

²Абай атындағы Қазақ Ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

³Орталық Азия инновациялық университеті, Шымкент қ., Қазақстан

⁴Г.Даукеев атындағы Алматы энергетика және байланыс университеті, Алматы қ., Қазақстан

⁵Азаматтық авиация академиясы, Алматы қ., Қазақстан

ТАУ-КЕН ЖЫНЫСТАРЫНЫҢ ҚАСИЕТТЕРІН ШЕКТІ ЭЛЕМЕНТТЕР ӘДІСІ НЕГІЗІНДЕ АНЫҚТАУ

Аңдатпа

Тау жыныстарының шектен тыс деформациялануын ескере отырып, карьер жақтауларының орнықтылығын зерттеу үшін сандық әдістерді қолдану, оның ішінде кен жыныстарының механикалық қасиеттерін шекті элементтер негізінде анықтау мүмкіндіктері қарастырылды. Тау жыныстарының беріктік және деформациялық қасиеттерінің толық спектрін көрсететін тау жыныстары массаларының математикалық үлгілері күйдің көрсетілген заңдылықтарының сақталуын қамтамасыз етуі сандық процедуралар түрінде жүзеге асырылуы мүмкін. Жұмыста аталған мәселе ақырлы элементтер әдісі арқылы шешіледі. Икемділіктің деформациялық теориясы мен ақырлы элементтер әдісінің негізінде тау жыныстары массасының деформациялық сызықты-серпімді қасиетін шекке дейінгі аймақта және шектен тыс деформация кезеңінде қопсыту мен жұмсартуды жүзеге асыратын әдіс пен сандық

процедуралар әзірленді. Жұмыстың негізгі мақсаты сандық ақырлы элементтер әдісі негізінде тау массасының механикалық сипаттамаларын анықтаудың математикалық мөделін жүзеге асырушы процедуралар мен әдістемелер құрастыру болып табылады. Ақырлы элементтер әдісіне негізделген ұсынылған модельді іске асырудың нәтижелі жаңа тиімді сандық процедурасы біртекті есептеу сызбасында кен орнын игерудің технологиялық реттілігін есепке алуға мүмкіндік береді. Сызықты емес есептерді шешудің қарастырылған процедуралары күйдің байланысты және байланысты емес заңдары арқылы қатаятын немесе жұмсаратын ортада да қолдануға болады.

Түйін сөздер: карьер жақтауларының орнықтылығы, тау жыныстары массасының математикалық моделі, ақырлы элементтер әдісі, тау жыныстарының деформациялану қабілеті, сандық әдістер, пластиканың деформациялық теориясы.

N.D. Zaurbekova¹, N.S. Zaurbekov², Ye. Zh. Tenizbayev³, A.A. Amanbayev⁴, N.A. Reginbayeva⁵

¹ Kazakh National Women's Teacher Training University, Almaty, Kazakhstan

² Abai Kazakh National Pedagogical University Almaty, Kazakhstan

³ Central Asian Innovative University, Shymkent, Kazakhstan

⁴ University of Power Engineering and Telecommunications named after G. Daukeev, Almaty, Kazakhstan

⁵ Kazakhstan Academy of Civil Aviation, Almaty, Kazakhstan

DETERMINATION OF ROCK MASS CHARACTERISTICS BASED ON FINITE ELEMENT METHOD

Abstract

The possibilities of using numerical methods for studying the stability of quarry sides taking into account the extreme deformability of rocks, including determining the mechanical characteristics of a rock mass, have been studied. Mathematical models of rock masses, reflecting the full range of strength and deformation properties of rocks, must be implemented in the form of numerical procedures that ensure compliance with the specified laws of state. In this work, this task was accomplished using the finite element method. A method and numerical procedures have been developed based on the deformation theory of plasticity and the finite element method, which implement the linear-elastic nature of the deformation of the rock mass in the pre-limit region and loosening and softening in the beyond-limit stage of deformation. The main goal of the work is to develop procedures that implement a mathematical model for determining the mechanical characteristics of a rock mass based on the numerical finite element method. The resulting new effective numerical procedure for implementing the proposed model based on the finite element method allows one to take into account the technological sequence of field development in a single calculation scheme. The considered procedures for solving nonlinear problems are applicable to media both hardening and softening with associated and non-associated laws of state.

Keywords: stability of quarry sides, mathematical model of rock mass, finite element method, deformability of rocks, numerical methods, deformation theory of plasticity.

Введение

Сложность конкретных задач горного производства и современных теоретических методов приводит к необходимости использования численных методов и компьютера. Ещё недавно считалось, что процессы, происходящие в массиве горных пород при проведении выработок случайны, и проектирование выработок осуществлялось на основе интуиции исполнителя и опыта прошлого строительства. Успехи геомеханики и вычислительной техники изменили представление о проектировании открытых и подземных горных выработок.

Во многих работах, в том числе в [1-5] разработаны различные математические модели изучения деформируемости породного массива. В основном, эти модели обоснованы и решены с помощью метода конечных элементов в условиях плоской деформации. Однако, до сих пор остаётся мало изученным проблемы численной реализации их. Эти модели необходимо реализовать в виде численных процедур, обеспечивающих выполнение заданных законов состояния. Самым распространённым методом решения задач исследования устойчивости бортов и карьеров является метод конечных элементов (МКЭ). Метод конечных элементов в последние 30 лет является одним из самых распространённых методов решения

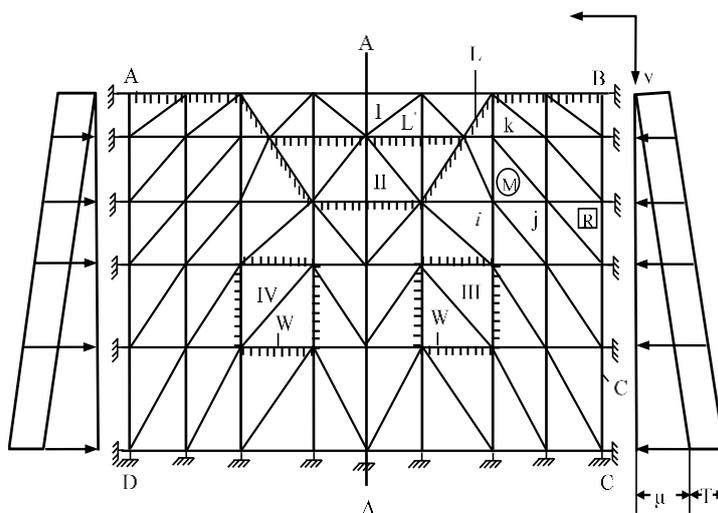
прикладных задач. Наглядность метода, сравнительная простота его применения в случае областей сложного рельефа, а также возможность учёта разнообразных и сложных свойства горных пород и грунтов сделали его весьма популярным среди широкого круга исследователей. Метод конечных элементов (МКЭ) представляет собой синтез новейших достижений механики сплошных сред и численных методов математики. Он получил исключительно широкое применение в различных областях физики и техники, главным образом, при анализе напряжённо-деформированного состояния. Принципиально новые возможности открывает в механике горных пород и грунтов применение МКЭ.

В настоящее время МКЭ является мощным средством приближенного решения дифференциальных уравнений, описывающих различные физические процессы. МКЭ является универсальным, достаточно простым и доступным средством решения сложных разнообразных задач геомеханики. Он позволяет легко учитывать произвольно задаваемые граничные условия - в виде заданных контурных или массовых сил, заданных перемещений границ или внутренних точек области. С одинаковой простотой решаются задачи в однородных и неоднородных средах, в односвязных или многосвязных областях. Лёгкость МКЭ в установлении для различных областей исследуемого массива своих законов, функций связывающих узловые силы и перемещения даёт возможность использовать различные элементы и значительно повышать эффективность метода.

Про суть и методологии метода широко обсуждены в [5, 6]. Чтобы гарантировать сходимость конечно-элементного процесса к точному решению, функции перемещения должны удовлетворять критериям, определённым в работе [2, 7, 8]. В предлагаемой работе разработана новая эффективная численная процедура реализации предложенной модели на основе метода конечных элементов, позволяющей в единой расчётной схеме учитывать технологическую последовательность отработки месторождения. Научное и практическое значение работы заключается в разработке методики оценки устойчивости бортов карьеров и откосов на стадиях проектирования, начала отработки карьеров и достижения бортов предельного положения.

Постановка задачи

Пусть имеется двумерная область R , ограниченная контуром C (рисунок 1). В области R на контуре C в виде граничных условий задаётся только часть параметров (напряжения или смещения, иногда их комбинация), а остальные параметры отыскиваются в ходе решения задачи.



R – полная область; C – контур R ; L – окончательный контур откоса; W_1, W_2 – контуры камер; A
Рисунок 1. Общая расчётная схема

Например, если в задаче геомеханики на границе заданы смещения, то напряжения на границе (как и напряжения и смещения в любой точке области R) можно найти как часть решения задачи и наоборот. Если на границе C задано достаточно условий, то решения задачи определяются этими условиями единственным образом.

Необходимо найти расчётные механические характеристики массива горных пород. В методе конечных элементов вся область R разбивается на сетку элементов (рисунок 1), т.е. строятся конечные элементы (КЭ) – модель области. На границах области C, когда не учитываются тектонические напряжения, ставятся следующие условия:

- на верхней $\sigma_y = \gamma H, \tau_{xy} = 0;$
- на нижней $\tau_{xy} = 0, v = 0;$
- на боковых $\tau_{xy} = 0, u = 0;$

где H – глубина от дневной поверхности, γ – объёмный вес.

При учёте тектонических напряжений, на боковых границах имеем:

$$\sigma_x = \sigma_{xp} + \sigma_{xt}, v = 0,$$

где $\sigma_{xp} = \mu \sigma_y, \sigma_{xt} = t \gamma h$ – горизонтальные компоненты поля напряжений гравитации и тектоники; $\mu = \nu / (1 - \nu)$ – коэффициент бокового распора; t – коэффициент тектоники.

Основной целью работы является разработка процедур, реализующие математическую модель определения механических характеристик массива горных пород на основе численного метода конечных элементов.

Методология исследования

В плоской задаче теории упругости точки напряжённой области получают перемещения, характеризуемые компонентами u и v вдоль осей координат x и y. Аналитическое решение упругой задачи в перемещениях представляет собой отыскание двух функций u(x, y) и v(x, y), непрерывных в рассматриваемой области (рисунок 2). В МКЭ эти криволинейные поверхности аппроксимируются набором кусочков плоскостей, имеющих простое уравнение в виде полинома

$$\begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \end{aligned} \tag{1}$$

где x, y – координаты точки; α_{1-6} – параметры линеаризации, постоянные коэффициенты.

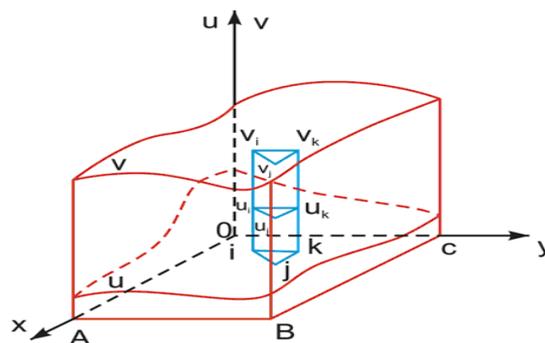


Рисунок 2. Графическое изображение упругого решения

Уравнение (1) для трёх узловых точек элемента могут быть записаны в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [A] \{\alpha\}, \tag{2}$$

Где

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \\ u_k \\ v_i \\ v_j \\ v_k \end{Bmatrix} \text{ – вектор узловых перемещений;}$$

$$A = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{vmatrix} \text{ – матрица координат узлов;}$$

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \text{ – вектор коэффициентов.}$$

Из формулы (2) можно найти постоянные коэффициенты:

$$\{\alpha\} = [A]^{-1} \{\mathbf{uv}\}, \quad (3)$$

Путём подстановки найденных значений α_{1-6} в уравнения (1) получим функции перемещений, выраженные через координаты и перемещения узлов:

$$u = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_k + b_k x + c_k y) u_k, \quad (4)$$

$$v = \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_k + b_k x + c_k y) v_k.$$

где $2\Delta = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$ – определитель, площадь треугольника;

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j,$$

$$b_i = y_j - y_k,$$

$$c_i = x_k - x_j$$

причём остальные коэффициенты можно получить циклической перестановкой нижних индексов в последовательности i, j, k .

Введя обозначения

$$\begin{aligned} L_i &= (a_i + b_i x + c_i y)/2\Delta, \\ L_j &= (a_j + b_j x + c_j y)/2\Delta, \\ L_k &= (a_k + b_k x + c_k y)/2\Delta. \end{aligned} \quad (5)$$

(4) запишем в виде

$$\begin{aligned} u &= L_i u_i + L_j u_j + L_k u_k, \\ v &= L_i v_i + L_j v_j + L_k v_k, \end{aligned} \quad (4')$$

где, L_i, L_j, L_k - функции формы.

В пределах рассматриваемого элемента относительные деформации горных пород в пределах элемента определяются по следующим формулам [9, 5, 7] :

$$\begin{aligned} u &= L_i u_i + L_j u_j + L_k u_k, \\ v &= L_i v_i + L_j v_j + L_k v_k, \\ \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = L'_{ix} u_i + L'_{jx} u_j + L'_{kx} u_k, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = L'_{iy} v_i + L'_{jy} v_j + L'_{ky} v_k, \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = L'_{iy} u_i + L'_{jy} u_j + L'_{ky} u_k + L'_{ix} v_i + L'_{jx} v_j + L'_{kx} v_k \end{aligned} \quad (6)$$

Так же можно представить в матричной форме [9]:

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\},$$

$$\text{где } \{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}, \quad [B] = \begin{bmatrix} L'_{ix} & L'_{jx} & L'_{kx} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L'_{iy} & L'_{jy} & L'_{ky} \\ L'_{ix} & L'_{jx} & L'_{kx} & L'_{iy} & L'_{jy} & L'_{ky} \end{bmatrix}$$

Дифференцируя (5) получим значения производных (6) [10].

В работе [11] обобщённый закон Гука для однородно-изотропного линейно-упругого тела приведён в виде:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_x + \nu(\varepsilon_y + \varepsilon_z)], \\ \sigma_y &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_y + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_z)], \\ \sigma_z &= \frac{2G}{1-2\nu} [(1-\nu)\varepsilon_z + \nu(\varepsilon_x + \varepsilon_y)], \\ \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}, \quad \tau_{xz} = G\gamma_{xz}, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}. \end{aligned} \quad (7)$$

где E – модуль Юнга, называемой также модулем упругости, ν – коэффициент Пуассона, $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль сдвига, подставляя формулу (7) в (6), получим напряжения

$$\{\sigma\} = [D][B]\{\delta\}. \quad (8)$$

Считается, что в МКЭ элементы действуют друг на друга только в узловых точках. Элемент деформируется за счёт того, что в его вершинах приложены шесть компонент узловых сил $\{F\}$ от соседних элементов или внешних воздействий. Если зададим виртуальное перемещение $d\delta$ по направлению оси x узлу 1, то внешнюю работу совершит только сила X_i :

$$A_{\text{внеш}} = X_i d\delta. \quad (9)$$

При перемещении узла деформацию рассматриваемого элемента определим:

$$\{d\varepsilon\} = [B]\{d\delta\}, \quad \text{где } \{d\delta\} = d\delta \{100 \ 000\}^T. \quad (10)$$

При этом, т.е. при возникновении деформаций $\{d\varepsilon\}$, происходит работа внутренних напряжений:

$$A_{\text{вн}} = \int_S (d\varepsilon_x \sigma_x + d\varepsilon_y \sigma_y + d\gamma_{xy} \tau_{xy}) dS = \int_S \{d\varepsilon\}^T \{\sigma\} dS. \quad (11)$$

Или же после подстановки в (11) формул (8), (10) получим

$$A_{\text{вн}} = d\delta \int_S \{100000\} [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS. \quad (12)$$

Приравнявая (9) к (12) получим

$$X_i = \int_S \{100000\} [B]^T [D] [B] \{\delta\} dS. \quad (13)$$

Придавая поочередно узлам виртуальное перемещение $d\delta$, получаем ещё пять выражений типа (13), отличающихся друг от друга только перемещающейся единицей вправо. Поэтому все шесть выражений для узловых сил могут быть объединены в одной матричной формуле:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = [k] \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}, \quad (14)$$

где $[k] = \int_S [B]^T [D] [B] dS$ – матрица жёсткости элемента (МЖЭ).

Поскольку производная функции формы постоянна в пределах элемента, то интеграл на площади можно заменить на площадь элемента Δ , тогда

$$[k] = \Delta [B]^T [D] [B], \quad (15)$$

МЖЭ (15) может быть представлена в виде функции формы

$$[k] = [A]^{-1T} [B']^T [D] [B'] [A]^{-1}, \quad (16)$$

$$\text{где } [B'] = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Легко показать, что $[B] = [B'] [A]^{-1}$.

МЖЭ имеет ранг 6 и симметрична относительно главной диагонали. Из соотношений (8), (14) и (15) можно получить

$$\begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix} = \Delta [B]^T \{ \sigma \}, \quad (17),$$

связывающее напряжения в элементе с узловыми силами.

Путем объединения матриц жёсткости всех элементов области в общую матрицу жесткости системы (МЖС) $[K]$ получим систему линейных уравнений, связывающих узловые силы и перемещения области, решение которой даёт возможность получить полный набор параметров напряжённо- деформированного состояния в упругой области.

Свойства объединение матриц жёсткости элементов описано в [10], поэтому пропустим их изложение.

МЖС связывает собой в систему линейных уравнений узловые силы перемещения:

$$[K] \{ \delta \} = F. \quad (18)$$

Алгоритм и программа решения упругой задачи на основе МКЭ по «ГЕОМЕХАНИКА» изложена в работе [12].

Вектор узловых сил формируется из реально заданных сосредоточенных нагрузок или сведённых к узловым силам распределённых по контуру или по площади области сил. Силы тяжести приводятся к узловым силам путём умножения объёмного веса на площадь элемента и распределяется поровну между тремя узлами. Если к свободному узлу не приложено никакой реальной внешней силы, то значит сумма сил от окружающих элементов в этом узле равна нулю.

Если постановка задачи такова, что в каком- то из узлов (или в группе узлов) задано перемещение по одному (или обоим) координатному направлению, например u_i , то в уравнении (18) столбец МЖС с номером $(2i-1)$ следует умножить на заданную величину u_i и почленно перенести в правую часть уравнения, добавив к заданным узловым силам. Количество неизвестных сокращается, строка МЖС с номером $(2i-1)$ превращается в линейную комбинацию остальных строк и может быть удалена.

Система связей (заданных перемещений) должна быть такова, чтобы исключалось свободное перемещение или вращение области в поле координат. Минимальное число связей, обеспечивающих это условие- две по одной оси и одна по другой.

При решении геомеханических задач в ряде случаев необходимо провести серию решений с последовательно изменяемыми контурами области, например, при послышной выемке котлована, по этапной проходке тоннеля, подработки борта карьера камерами и др. В этих случаях вся серия решений может быть приведена по одной сети КЭ- модели (рисунок 1) в автоматическом режиме с помощью следующей процедуры.

Пусть необходимо в массиве (R) образовать откос с окончательным контуром (L), затем подработать его камерами с контурами W1 и W2 .

Удаление той или иной группы элементов достигается путём присвоения им модуля упругости $E=0$ и объёмного веса $\gamma=0$ при одновременной фиксации узлов, окружённых только нулевыми E. Элементам последовательно вынимаемых слоёв присваиваются номера

типов, равные номеру этапа выемки I, II, III, IV и др. (рисунок 1), а всем этим типам присваиваются реальные характеристики пород. Организуется цикл по числу этапов выемки.

В каждом цикле:

1) всем элементам, номер типа которых совпадает с номером цикла, присваивается номер типа I;

2) просматриваются все узлы области, а в каждом цикле по узлам все элементы. Если узел окружён только элементом первого типа, то узлы присваиваются признаки фиксации по всем координатным направлениям;

3) для всех элементов области, имеющих тип I (т.е. извлекаемых в данном этапе выемки), вычисляются узловые силы по напряжениям, предшествующим выемки данного слоя. Из вычисленных узловых сил (с обратным знаком) формируется вектор нагрузки системы.

После выполнения всех перечисленных операций из области будет удалена очередная II группа элементов, а к вновь образованному участку контура будут приложены силы, эквивалентные напряжениям, снимаемым с контура при удалении слоя. Силы, вычисляемые и прикладываемые к внутренним узлам удалённой зоны, никакого участия в дальнейших решениях принимать не будут, так как этим узлам присвоены признаки фиксации, и при решении системы соответствующие уравнения игнорируются.

Таким образом, после удаления I – II групп элементов в массиве образуется откос контуром L. После этого последовательное удаление элементов III и IV группы позволяют образовать камеры с контурами W1 и W2. Отметим, что процедура может быть выполнена, по желанию, различными вариантами образования выработок. Для этого остаётся только поменять нумерации этапов выемки.

Рассмотрим выше изложенное в комплексе. Первоначально задача решается для рассматриваемой полной области ABCD (рисунок 1). Находим тензор напряжений σ_{ij}^0 и деформаций ε_{ij}^0 , перемещение u_{ij}^0 . Запоминаем их в памяти ЭВМ, если надо – печатаем. В зависимости от заданного закона состояния, а также граничных условий (19), (20) (приложение на границу внешних сил и перемещений) найденные значения могут быть упругими или же упруго – пластическими, соответствующими какому-то циклу итераций. Формирование откоса и камер будем имитировать серией шагов изменения контуров области. В первом шаге решения внимаем первый слой I на глубине H1. Элементам первого слоя задаём величины $E = 0$, $\gamma = 0$. Фиксируем жёстко те узлы, которые окружают элементы только с нулевым модулем упругости. При этом элементы первого слоя заменяются пустыми элементами, которые не нарушают основной сети КЭ – модели. Удаление элементов слоя I приводит к тому, что часть контура L освобождается от давления (усилия) вышележащей толщи:

$$F' = F'(\sigma_x^0, \sigma_y^0, \sigma_{xy}^0). \quad (19)$$

Расчёт нагрузки в (19) осуществляется по формуле (17). Освобождение L' от усилий означает, что к контуру L' нужно приложить распределённые нагрузки, противоположные (с обратным знаком) усилиям из (19).

Далее решается задача с заданными новыми граничными условиями и контурами L'/C для невесомой среды.

Найденное приращение напряжений, деформаций и смещений прибавляется к предыдущим решениям для полной области:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^1 &= \sigma_{ij}^0 + \Delta\sigma_{ij}^1, \\ \varepsilon_{ij}^1 &= \varepsilon_{ij}^0 + \Delta\varepsilon_{ij}^1, \\ u_{ij}^1 &= u_{ij}^0 + u_{ij}^1. \end{aligned} \quad (20)$$

Если же суммарное значение напряжений и деформаций удовлетворяет закону состояния, то (20) будет окончательным. Если же нет, тогда делаем итерации до достижения заданной точности и находим окончательное решение:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij0}^1 &= \sigma_{ij}^1 + \Delta\sigma_{ij}, \\ \varepsilon_{ij0}^1 &= \varepsilon_{ij}^1 + \Delta\varepsilon_{ij}, \\ u_{ij0}^1 &= u_{ij}^1 + u_{ij}.\end{aligned}\tag{21}$$

Во втором шаге вынимаем II слой, определим снимаемую нагрузки для L: $F^II = F^II(\sigma_x^1, \sigma_y^1, \tau_{xy}^1)$. Повторяем все выше сказанное и получим решение для второго шага $\sigma_{ij0}^2, \varepsilon_{ij0}^2, u_{ij0}^2$ и т.д.

Решение задачи в R-том шаге имеет следующий вид. Находим нагрузки $F^R = F^R(\sigma_x^{R-1}, \sigma_y^{R-1}, \tau_{xy}^{R-1})$ при выемке R-го слоя. После первой итерации имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^R &= \sigma_{ij}^{R-1} + \Delta\sigma_{ij}^R, \\ \varepsilon_{ij}^R &= \varepsilon_{ij}^{R-1} + \Delta\varepsilon_{ij}^R, \\ u_{ij}^R &= u_{ij}^{R-1} + \Delta u_{ij}^R.\end{aligned}\tag{22}$$

Если (22) удовлетворяет закону состояния, то является окончательным решением задачи при образовании выработок, если же нет, тогда делаем последующих итераций до удовлетворения заданной точности и получим окончательное решение

$$\begin{aligned}\sigma_{ij0}^R &= \sigma_{ij}^R + \Delta\sigma_{ij}, \\ \varepsilon_{ij0}^R &= \varepsilon_{ij}^R + \Delta\varepsilon_{ij}, \\ u_{ij0}^R &= u_{ij}^R + \Delta u_{ij}.\end{aligned}\tag{23}$$

Составлена подпрограмма, автоматически реализующая на ЭВМ выше сказанное. Решение (23) должно удовлетворять закону состояния заданной точности, уравнения равновесия и совместности деформаций. Так же отметим, что основной целью работы является разработка процедур, реализующие математическую модель определение механические характеристики массива горных пород на основе численного метода конечных элементов, которая подробно изложена в пункте реализация моделей сред на основе МКЭ.

Результаты исследования

Постановка граничных условия и основные особенности решения задач данного типа изложены в работах [5, 6]. Поэтому пропуская промежуточные преобразования и формулировки, окончательно получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij0}^R &= \sigma_{ij}^R + \Delta\sigma_{ij}, \\ \varepsilon_{ij0}^R &= \varepsilon_{ij}^R + \Delta\varepsilon_{ij}, \\ u_{ij0}^R &= u_{ij}^R + \Delta u_{ij}.\end{aligned}\tag{24}$$

Составлена подпрограмма, автоматически реализующая на компьютере выше сказанное. Решение (24) должно удовлетворять закону состояния заданной точности, уравнения

равновесия и совместности деформаций.

Дискуссия

Процедуры учёта запредельных диаграмм изложена в работах [3, 9, 10, 13-15].

Реализация моделей сред на основе метода конечных элементов. Простота разработанных моделей сред, а также тесная связь с традиционными аппаратами геомеханики и методом конечных элементов позволяет ее реализовать и довольно широко применять их при решении разнообразных задач. При использовании процедур получение нелинейных решений особенно важными являются определение значений теоретических напряжений (или приращение теоретических напряжений) и переменных упругих констант. Ниже запишем алгоритмы определения этих величин в зависимости от модели сред.

I. Реализация модели идеально-пластической среды с равнообъёмным характером течения. Запишем алгоритм определения теоретических напряжений σ_1^T и σ_3^T по заданным деформациям ε_1 и ε_3 для данной среды.

1. Если $f_1(\varepsilon) > 0$ или $f_2(\varepsilon) > 0$, то иди к 4.

Комментарий: расчёт напряжений неупругих зон начнётся с оператора 4.

2. σ_1 и σ_3 определяется формулами:
$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3), \quad \sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_1)$$

Комментарий: напряжения определены уравнениями упругости. Задача выполнена, заканчиваем.

3. Иди к 100.

4. Если $\varepsilon_1 \leq 0$, то иди к 30.

Комментарий: напряжения, соответствующие деформациям зоны V, определяется с оператора 30.

5. Если $f_4(\varepsilon) \leq 0$, то иди к 20.

Комментарий: деформации зоны IV рассматриваются с оператора 20.

10. $\sigma_3 = \max$ из величин $(0, \sigma_3)$ где σ_3 вычисляется по формуле

$$\sigma_3 = [E(\varepsilon_1 + \varepsilon_3) + S(\nu - 1)] / (1 - \nu \operatorname{ctg} \psi + \operatorname{ctg} \psi - \nu) \quad (*)$$

Комментарий: рассматриваются зоны II и III. Расчёт по формуле (*) для зоны II даёт положительное значение, для зоны III отрицательное. Поэтому выбор максимальной из двух величин: 1) определённой по формуле (*) и 2) 0-даёт верный ответ; для зоны II будет определено по формуле (*), а для зоны III будет выбрано равным 0.

16. σ_1 определяется формулой

$$\sigma_1 = S + \sigma_3 \operatorname{ctg} \psi, \quad (**)$$

где $S = 2C \operatorname{ctg}(\pi/4 - \varphi/2)$ – прочность на одноосное сжатие.

Комментарий: по рассчитанному σ_3 вычисляется σ_1 . Задача выполнена, кончаем.

17. Иди к 100.

20. σ_1 определяется первым соотношением формулы $\sigma_1 = E\varepsilon_1 + \nu\sigma_3$, при $\sigma_3 = 0$

Комментарий: определили σ_1 для зоны IV.

21. Иди к 40.

30. $\sigma_1 = 0$.

Комментарий: определили σ_1 для зоны V.

40. $\sigma_3 = 0$.

Комментарий: определили σ_3 для зон V и IV.

100. Конец.

II. Реализация модели упруго-пластической среды с разрыхлением. Определим величины

теоретических напряжений σ_1^T и σ_3^T по заданным деформациям ε_1 и ε_3 для данной среды.

1. Если $f_1(\varepsilon) > 0$ или $f_2(\varepsilon) \geq 0$, то иди к 4.

Комментарий: расчёт напряжений неупругих зон начнётся с оператора 4.

2. σ_1 и σ_3 определяется формулами:
$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3), \quad \sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_1).$$

Комментарий: напряжения определены уравнениями упругости. Задача выполнена, кончаем.

3. Иди к 100.

4. Если $\varepsilon_1 \leq 0$, то иди к 30.

Комментарий: напряжения, соответствующие деформациям V зоны определяется с оператора 30.

5. Если $f_4(\varepsilon) \leq 0$, то иди к 20.

Комментарий: деформации IV зоны рассматриваются с оператора 20.

10. $\sigma_3 = \max(0, \sigma_3)$, где

$$\sigma_3 = \frac{[E(\varepsilon_3 - \lambda\varepsilon_1) + S(\nu - \lambda)]}{1 - \nu \operatorname{ctg} \psi + \lambda \operatorname{ctg} \psi - \lambda \nu}. \quad (***)$$

Комментарий: рассматриваются II и III зоны. Расчёт по данной формуле для II зоны даёт положительное значение σ_3 , а для III зоны - отрицательное. Поэтому выбор максимальной из двух величин:

1) определённая таким образом σ_3 делает верным ответ

2) для зоны II σ_3 будет определено по формуле (***), а также для зоны III σ_3 будет выбрано равным 0.

16. σ_1 определяется по формуле (**).

Комментарий: по рассчитанному σ_3 вычисляется σ_1 . Задача выполнена, кончаем.

17. Иди к 100.

20. σ_1 определяется формулой $\sigma_1 = E\varepsilon_1$.

Комментарий: определены σ_1 для IV зоны.

21. Иди к 40.

30. $\sigma_1 = 0$.

Комментарий: определили σ_1 для V зоны.

40. $\sigma_3 = 0$.

Комментарий: определили σ_3 для IV и V зон.

100. Конец.

III. Реализация модели среды с разупрочнением и разрыхлением. Алгоритм определения теоретических напряжений по заданным деформациям для разрыхляемой и разупрочняемой среды может быть записан так:

1. Если $f_1(\varepsilon) > 0$ или $f_2(\varepsilon) > 0$, то иди к 4.

Комментарий: расчёт напряжений неупругих зон начинается с оператора 4.

2. σ_1 и σ_3 определяются формулами:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_1 + \nu\varepsilon_3), \quad \sigma_3 = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_3 + \nu\varepsilon_1).$$

Комментарий: напряжения определены уравнениями упругости. Задача выполнена. Кончаем.

3. Иди к 100.

4. Если $\varepsilon_1 \leq 0$, то иди к 30.

Комментарий: напряжения, соответствующие деформациям зоны V, определяется с

оператора 30.

5. Если $f_4(\varepsilon) \leq 0$, то иди к 20

Комментарий: деформации V зоны рассматривается с оператора 20.

10. $\sigma_3 = \max(0, \text{формула } (*))$.

Комментарий: рассматриваются зоны II и III, если $f_5(\varepsilon) > 0$ то σ_3 определяются по (*), в противном случаи по (2.52).

Поэтому выбор максимальной из двух величин даёт верный ответ: для зоны II σ_3 будет определено по формуле (*), а для зоны III σ_3 будет выбрана равным 0.

11. σ_3^F определяется формулой

$$\sigma_3^F = \frac{S - S^{\text{ост}}}{\text{ctg}\psi^{\text{ост}} - \text{ctg}\psi}.$$

12. σ_1^y определяется формулой

$$\varepsilon_1^y = \frac{1}{E} [S + \sigma(\text{ctg}\psi - \nu)].$$

13. $\sigma_1^{\text{ост}}$ определяется следующим образом

Если $\sigma_3 \leq \sigma_3^F$, то $\sigma_1^{\text{ост}} = S^{\text{ост}} + \sigma_3 \text{ctg}\psi^{\text{ост}}$

$$\text{Если } \sigma_3 > \sigma_3^F, \text{ то } \sigma_1^{\text{ост}} = S^{\text{ост}} + \sigma_3 \text{ctg}\psi^{\text{ост}} + S$$

14. Если $(\varepsilon_1 - m\varepsilon_1^y) \geq 0$, то иди к 18.

Комментарий: если деформация ε_1 превышает $m\varepsilon_1^y$, то сопротивляемость σ_1 снизилась до остаточной прочности.

15. σ_1 определяется формулой $\sigma_3 = \frac{1}{m-1} \left[\sigma_1^* m - \sigma_1^{\text{ост}} - \frac{E\varepsilon_1(\sigma_1^* - \sigma_1^{\text{ост}})}{\sigma_1^* - \nu\sigma_3} \right]$.

Комментарий: поскольку ε_1 находится в пределах участка D"K", то σ_1 определяется по данной интерполяционной формуле.

17. Иди к 100.

18. $\sigma_1 = \sigma_1^{\text{ост}}$.

19. Иди к 100.

20. $\sigma_1 = E\varepsilon_1$.

21. Иди к 40.

30. $\sigma_1 = 0$.

Комментарий: определили σ_1 для зоны V.

40. $\sigma_3 = 0$.

Комментарий: определили σ_3 для зон IV и V.

100. Конец.

Алгоритм изложенный выше подходит и для случая, если в этой модели зависимость $\sigma_3 = M(\varepsilon_1, \varepsilon_3)$ и $\sigma_1 = N(\varepsilon_1, \sigma_3)$ задаётся в виде таблиц. При этом промежуточные значения σ_3^T и σ_1^T находятся по формулам

$$\begin{aligned} Z(\varepsilon_1^j, \varepsilon_3^j) &= \alpha_{\sigma_3} + \beta_{\sigma_3} \varepsilon_1^j + \gamma_{\sigma_3} \varepsilon_3^j + \delta_{\sigma_3} \varepsilon_1^j \varepsilon_3^j \\ Z(\varepsilon_1^j, \sigma_3^j) &= \alpha_{\sigma_1} + \beta_{\sigma_1} \varepsilon_1^j + \gamma_{\sigma_1} \sigma_3^j + \delta_{\sigma_1} \varepsilon_1^j \sigma_3^j, \end{aligned}$$

а другие по таблице.

Выводы

Разработана новая эффективная численная процедура реализации предложенной модели на основе метода конечных элементов, позволяющей в единой расчётной схеме учитывать технологическую последовательность отработки месторождения. Научное и практическое значение работы заключается в разработке методики оценки устойчивости бортов карьеров и откосов на стадиях проектирования, начала отработки карьеров и достижения бортов в предельного положения.

Анализ результатов исследований позволяют сделать следующие основные выводы:

Определена оптимальная математическая модель оценки устойчивости бортов карьеров и откосов, учитывающая неоднородную структуру массива и неупругую деформации горных пород. В предложенной модели описание границ прочности и текучести осуществляется в плоскости деформации, являющейся наиболее удобной для численной реализации и проведения сложных расчётов. Разработанная методика расчёта отличается от предыдущих исследований тем, что учитывает неоднородностное строение массива и неупругую деформацию горных пород. В предложенном методе описание границ прочности и текучести производится в плоскости деформации, что наиболее удобно для численной реализации и сложных расчётов. Разработанные методы и численные процедуры, основанные на теории пластической деформации и методе конечных элементов, позволяющие реализовать линейно-упругий характер деформирования горных пород в предпереходной зоне, а также разрыхление и разупрочнение на предельных стадиях деформирования. Так же разработана новая эффективная численная процедура реализации предложенной модели на основе метода конечных элементов, позволяющая рассмотреть техническую последовательность разработки месторождения в рамках одной расчётной схемы. Разработаны алгоритмы и программы, реализующие модели на компьютере.

Список использованной литературы:

- 1 Yuan, WH., Liu, K., Zhang, W. et al. *Dynamic modeling of large deformation slope failure using smoothed particle finite element method* // *Landslides* 17, 1591–1603 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10346-020-01375-w>
- 2 Заурбекова Н.Д. *Метод конечных элементов при моделировании процесса деформирования откосов* // *Известия НАН Кыргызской Республики. № 4. Бишкек, Илим, Кыргызская Республика, 2007. - С. 42-45.*
- 3 Абдылдаев Э.К., Заурбекова Н.Д. *Математические модели породного массива* // *Комплексное использование минерального сырья. №1. Алматы, 2007. - С. 3-6.*
- 4 Абдылдаев Э.К., Сандибеков М.Н., Заурбекова Н.Д. *Моделирование процесса деформирования откосов* // *Вестник Казахского национального технического университета имени К.И.Сатпаева. № 2 (59). Алматы, 2007. - С. 17-19.*
- 5 Абдылдаев Э.К. *Метод конечных элементов при решении прикладных задач. – Алматы.: Полиграфия-сервис, 2011, - 111 с.*
- 6 Махамбаева И.У. *Особенности решения задач геомеханики с учетом влияния выработок – Материалы международной научно-практической конференции конференции "Актуальные научные разработки", Бял ГРАД-БГ (г.София, Болгария), 2012*
- 7 Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z. *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals – Book Seventh Edition 2013.* <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>
- 8 Y. K. Dem'yanovich, "Smoothness of Spaces in Finite Element Methods," 2018 5th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI), Corfu, Greece, 2018, pp. 24-28, doi: 10.1109/MCSI.2018.00015.
- 9 Зыков Д.Б. *Геомеханическое обоснование устойчивости выработок в рыхлых рудах: Специальность 25.00.20 - Геомеханика, разрушение горных пород, рудничная аэрогазодинамика и горная теплофизика: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург, 2006.*
- 10 Волохов Е.М. *Прогноз сдвижений и деформаций массива горных пород и земной поверхности при сооружении городских тоннелей глубокого залегания: Специальность 25.00.16 - Горнопромышленная и нефтегазопромысловая геология, геофизика, маркшейдерское дело и геометрия недр: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. Санкт-Петербург, 2004.*

11 Liu GR, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, Lam KY (2009) A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems //Comput Struct 87(1–2):14–26

12 Фадеев А.Б. Репина П.И. Абдылдаев Э.К. Метод конечных элементов при решении геотехнических задач и программа Геомеханика – Л.: ЛИСИ, 1982. - 82 с.

13 Monforte L, Carbonell JM, Arroyo M, Gens A (2017) Performance of mixed formulations for the particle finite element method in soil mechanics problems. //Computational Particle Mechanics. 4(3):269-284

14 Monforte L, Arroyo M, Carbonell JM, Gens A (2018) Coupled effective stress analysis of insertion problems in geotechnics with the particle finite element method. //Comput Geotech 101:114–129

15 Zhang X, Wang L, Krabbenhoft K, Tinti S (2019b) A case study and implication: particle finite element modelling of the 2010 Saint-Jude sensitive clay landslide. Landslides.

References:

1 Yuan, WH., Liu, K., Zhang, W. et al. Dynamic modeling of large deformation slope failure using smoothed particle finite element method //Landslides 17, 1591–1603 (2020). <https://doi.org/10.1007/s10346-020-01375-w>

2 Zaurbekova N.D. (2007) Metod konechnyh jelementov pri modelirovanii processa deformirovanija otkosov [Finite element method for modeling the deformation process of slopes] Izvestija NAN Kirgizskoj Respubliki. № 4. Bishkek, Ilim, Kyrgyzskaja Respublika, S. 42-45. (In Russian)

3 Abdylдаev Je.K., Zaurbekova N.D. (2007) Matematicheskie modeli porodnogo massiva [Mathematical models of rock mass] Kompleksnoe ispol'zovanie mineral'nogo syr'ja. №1. Almaty, S. 3-6. (In Russian)

4 Abdylдаev Je.K., Sandibekov M.N., Zaurbekova N.D. (2007) Modelirovanie processa deformirovanija otkosov [Modeling the process of slope deformation] Vestnik Kazahskogo nacional'nogo tehničeskogo universiteta imeni K.I.Satpaeva. № 2 (59). Almaty, S. 17-19. (In Russian)

5 Abdylдаev Je.K. (2011) Metod konechnyh jelementov pri reshenii prikladnyh zadach. [Finite element method for solving applied problems] Almaty.: Poligrafija-servis, , 111 s. (In Russian)

6 Mahambaeva I.U. (2012) Osobennosti reshenija zadach geomehaniki s uchetom vlijanija vyrabotok [Features of solving geomechanics problems taking into account the influence of workings] Materialy mezhdunarodnoj nauchno-praktičeskoj konferencii konferencii "Aktual'nye nauchnye razrabotki", Bjal GRAD-BG (g.Sofija, Bolgarija)

7 Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. and Zhu J.Z. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals - Book Seventh Edition 2013. <https://doi.org/10.1016/C2009-0-24909-9>

8 Y. K. Dem'yanovich, "Smoothness of Spaces in Finite Element Methods," 2018 5th International Conference on Mathematics and Computers in Sciences and Industry (MCSI), Corfu, Greece, 2018, pp. 24-28, doi: 10.1109/MCSI.2018.00015.

9 Zыkov D.B. (2006). Geomechanicheskoe obosnovanie ustojchivosti vyrabotok v ryhlyh rudah: [Geomechanical substantiation of the stability of workings in loose ores] Special'nost' 25.00.20 - Geomehanika, razrushenie gornyh porod, rudnichnaja ajerogazodinamika i gornaja teplofizika: dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata tehničeskih nauk. Sankt-Peterburg, (In Russian)

10 Volohov E.M. (2004).Prognoz sdvizhenij i deformacij massiva gornyh porod i zemnoj poverhnosti pri sooruzhenii gorodskih tonnelej glubokogo zalezhenija [Forecast of displacements and deformations of the rock mass and the earth's surface during the construction of deep urban tunnels] Special'nost' 25.00.16 - Gornopromyshlennaja i neftegazopromyslovaja geologija, geofizika, markshejderskoe delo i geometrija nedr: dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni kandidata tehničeskih nauk. Sankt-Peterburg, (In Russian)

11 Liu GR, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H, Lam KY (2009) A node-based smoothed finite element method (NS-FEM) for upper bound solutions to solid mechanics problems //Comput Struct 87(1–2):14–26

12 Fadeev A.B. Repina P.I. Abdylдаev Je.K. Metod konechnyh jelementov pri reshenii geotehnicheskikh zadach i programma Geomehanika – Л.: LISI, 1982. - 82 с.

13 Monforte L, Carbonell JM, Arroyo M, Gens A (2017) Performance of mixed formulations for the particle finite element method in soil mechanics problems. //Computational Particle Mechanics. 4(3):269-284

14 Monforte L, Arroyo M, Carbonell JM, Gens A (2018) Coupled effective stress analysis of insertion problems in geotechnics with the particle finite element method. //Comput Geotech 101:114–129

15 Zhang X, Wang L, Krabbenhoft K, Tinti S (2019b) A case study and implication: particle finite element modelling of the 2010 Saint-Jude sensitive clay landslide. Landslides.