

6 Strachan Ian A.B, Stedman R. Generalized Legendre Transformations and Symmetries of The WDVV equations // Journal of Physics A: Math. Theor. 50 – 2017. – Volume 50 -№ 9

7 Mokhov O.I., Ferapontov Y.V. The associativity equations for two-dimensional topological field theory as integrable hamiltonian non-diagonalizable systems of hydrodynamic type // Functional analysis and its applications- 30 (3),1996. - P. 62-72

8 Mokhov O.I. Symplectic and poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Translations of the American Mathematical Society-Series 2 170 – 1995. - 121-152, arXiv:hep-th/9503076

9 Witten E. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // Surv. Diff. Geom. 1- 1991. - P. 243-310

10 Dubrovin B.A. Geometry of 2D topological field theories, Springer Lecture Notes in Math. 1620, 120-348, 1996. [arXiv:hep-th/9407018]

11 Zhadyranova A.A., Myrzakul Zh.R., Anuarbekova Y.Ye. Hierarchy of WDVV associativity equations for $n = 3$ case and $N = 2$ when $V_0 \neq 0$ // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University - 4(125) - 2018. – P. 79-85

12 Zhadyranova A.A., Anuarbekova Y.Ye. Hierarchy of WDVV associativity equations for $n = 3$ case and $N = 2$ when $V_0 = 0$ // Bulletin of L.N. Gumilyov Eurasian National University - 3(128) - 2019. – P. 60-66

13 Zhadyranova A.A. Hierarchy of WDVV associativity equations for $n=3$ and $N=2$ case when $V_0=0$ with new system a, b, c // News of the National Academy of Sciences of the Republic of Kazakhstan. Physical-mathematical series. <https://doi.org/10.32014/2019.2518-1726.39> – 4(326) – 2019 – P. 14–21

МРНТИ 29.05.23; 29.05.29; 29.05.41
УДК 539.1

DOI: <https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.35>

Д.М. Зазулин^{1,2}, С.Е. Кемелжанова¹, П.Д. Эзау³

¹ Казахский Национальный Университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан

² Институт Ядерной Физики, г. Алматы, Казахстан

³ Петербургский Институт Ядерной Физики, Россия

ПРИМЕНЕНИЕ ГЕОМЕТРОТЕРМОДИНАМИКИ К СИСТЕМЕ С НУЛЕВЫМ ЗВУКОМ ОПИСАННОЙ МЕТОДОМ ГОЛОГРАФИЧЕСКИХ ДУАЛЬНОСТЕЙ

Аннотация

В рамках метода геометротермодинамики в настоящей работе исследованы свойства равновесного многообразия системы с нулевым звуком, предсказанной методом голографических дуальностей. Получены результаты инвариантные относительно преобразований Лежандра, т.е. независимые от выбора термодинамического потенциала. Для рассматриваемой системы рассчитаны соответствующие метрики и скалярные кривизны, а также описаны их свойства. С помощью голографического подхода в работе был обнаружен новый тип квантовой жидкости. Теплоемкость, полученной в этой работе жидкости, при низких температурах зависит от температуры $\sim T^6$. В качестве термодинамического потенциала бралась энтропия, зависящая от температуры и барионной плотности. Получены 3-мерные графики, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно.

Показано, что оба варианта метрик в данном случае приводят к одному и тому же выводу относительно расположения линий возможных фазовых переходов в рассмотренной голографической системе с нулевым звуком.

Ключевые слова: геометротермодинамика, преобразования Лежандра, метрический тензор, скалярная кривизна, голографические дуальности, нулевой звук.

Аңдатпа

Д.М. Зазулин^{1,2}, С.Е. Кемелжанова¹, П.Д. Эзау³

¹ ал-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан

² Ядролық Физика институты, Алматы қ., Қазақстан

³ Петербург ядролық физика институты, Россия

ГОЛОГРАФИЯЛЫҚ ДУАЛЬДІК ӘДІСПЕН СИПАТТАЛҒАН НӨЛДІК ДЫБЫСЫ БАР ЖҮЙЕГЕ ГЕОМЕТРИЯЛЫҚ ТЕРМОДИНАМИКАНЫ ҚОЛДАНУ

Термодинамика геометриясы әдісі аясында бұл жұмыста голографиялық дуальдік әдіспен болжанған нөлдік дыбысы бар жүйенің тепе-теңдік күйдегі алуан түрлілігінің қасиеттері зерттелді. Лежандр түрлендірулеріне қатысты инвариантты нәтижелер термодинамиканың потенциалды таңдауға тәуелсіз есептелінді. Осы қарастырылып отырған жүйе үшін тиісті метрикалар мен скалярлы қысықтар есептелініп, қасиеттері сипатталды.

Голографиялық тәсіл көмегімен жұмыста кванттық сұйықтықтың жаңа түрі табылып, сұйықтықтың жылу сыйымдылығы төмен температурада қарастырылды. Термодинамикалық потенциал ретінде температура мен бариондық тығыздыққа байланысты энтропия алынып және де 3-өлшемді графиктер тұрғызылды. График арқылы ондаға термодинамикалық айнымалы скаляр қисықтары шексіздікке немесе нөлге ұмтылады, бұл дегеніміз мүмкін болатын фазалық ауысуларды және сәйкесінше кванттық әсермен өзара ірекеттесудің мүмкін болатындығын көрсетеді.

Бұл жағдайда метриканың екі нұсқасы да нөлдік дыбысы бар қаралған голографиялық жүйеде ықтимал фазалық ауысулар сызықтарының орналасуы туралы бірдей қорытындыға әкелетіндігі көрсетілген.

Түйін сөздер: геометротермодинамика, Лежандр түрлендірулері, метрикалық тензор, скалярлық қисық, голографиялық екі жақтылық, нөлдік дыбыс.

Abstract

APPLICATION OF GEOMETROTHERMODYNAMICS TO THE SYSTEM WITH ZERO SOUND DESCRIBED BY THE METHOD OF HOLOGRAPHIC DUALITY

Zazulin D.M.^{1,2}, Kemelzhanova S.E.¹, Ezau P.D.³

¹*Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

²*Institute of Nuclear Physics, Almaty, Kazakhstan*

³*Petersburg Institute of Nuclear Physics, Russia*

In the framework of the method of geometrothermodynamics, in present work, we studied the properties of equilibrium manifold of the system with zero-sound predicted by the holographic duality method. The results are invariant under the Legendre transformations, i.e. independent of the choice of thermodynamic potential. For the systems under consideration, the corresponding metrics, determinants of metrics and scalar curvatures are calculated, and their properties are also described. Using the holographic approach, a new type of quantum liquid was discovered. The heat capacity of the liquid obtained in this work at low temperatures depends on the temperature $\sim T^6$. Entropy, which depends on temperature and baryon density, was taken as the thermodynamic potential. 3-dimensional obtained that clearly show at which values of thermodynamic variables scalar curvatures tend to infinity or to zero, which indicates possible phase transitions and possible compensation of interactions by quantum effects, respectively.

It is shown that both variants of metrics in this case lead to the same conclusion regarding the location of possible phase transition lines in the considered holographic system with zero sound.

Keywords: geometrothermodynamics, Legendre transformations, metric tensor, scalar curvature, holographic duality, zero sound.

Введение

В методе голографических дуальностей описываются квантовые системы в режиме сильной связи [1]. Голографические модели приводят к ряду предсказаний, которые хорошо согласуются с экспериментальными данными. Более того с помощью голографического метода предсказываются новые типы квантовых систем. Например, в работе [2] обнаружена система, у которой при низких температурах имеется нулевая звуковая мода как у Ферми жидкости, но у этой системы совершенно иная температурная зависимость теплоемкости. Поэтому становится актуальной задача исследования термодинамических свойств новой квантовых систем предсказанным методом голографических дуальностей. Калибровочная / гравитационная двойственность [3,4] стала полезным инструментом для исследования сильно связанные теории поля. В классе моделей, где этот инструмент может быть применен, предел сильной связи теории поля сопоставляется со слабой связью, классическим пределом теории поля. Теория гравитации, которую можно изучать либо аналитически, либо с минимальными вычислительными мощностями. Нашего понимания квантовых жидкостей являются два феноменологических явления теории.

Это теория жидкости Ферми Ландау [5-9] а также квантовая теория Бозе-жидкости [10,11]. Эти две теории описывают два различных поведения квантовой жидкости в точке низкие импульсы и температуры. В Бозе-жидкости единственное низкоэнергетическое элементарное возбуждение является ли сверткеучий фонон с линейной дисперсией. В Ферми-жидкостях нулевой звук – это коллективное возбуждение, включающее фермионы вблизи Ферми поверхность. Он был предсказан Ландау [6] и экспериментально наблюдался в жидком гелии-3.

В настоящей работе, было проведено исследование термодинамических свойств голографической системы с нулевым звуком. В качестве метода исследования использовалась геометротермодинамика [12], а в качестве термодинамического потенциала - энтропия, зависящая от температуры и плотности барионов.

Геометротермодинамика

В геометротермодинамике (ГТД), предложенной Э. Кеведо [12], взаимодействия в термодинамических системах описывается с помощью кривизны равновесного многообразия, инвариантной относительно преобразований Лежандра. В термодинамике тоже физические свойства системы не зависят от выбора термодинамических потенциалов, с помощью которых эта система описывается. Переход от одного набора термодинамических потенциалов к другому осуществляется при помощи преобразований Лежандра, и в этом смысле термодинамика инвариантна относительно преобразований Лежандра [13]. В ГТД, например, как это было показано в [12], идеальный газ, частицы которого не взаимодействуют друг с другом, соответствует многообразию с нулевой кривизной. В случае взаимодействующих систем с нетривиальной структурой фазовых переходов, ГТД воспроизводит поведение системы вблизи точек, где происходят фазовые переходы. Как было показано на примере газов Ван-дер-Ваальса, Бозе - Эйнштейна, термодинамик различных черных дыр и т.д. [14], вблизи фазовых переходов скалярная кривизна соответствующих равновесных многообразий стремится к бесконечности. Этот факт удобен для поисков неизвестных фазовых переходов в малоизученных термодинамических системах.

В настоящей работе для изучения термодинамических систем мы вычисляли метрические тензоры соответствующих равновесных многообразий, детерминанты метрических тензоров и соответствующие скалярные кривизны. В качестве формул для вычисления метрик [15] и соответствующих метрических тензоров мы использовали [12]:

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \delta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c \quad (1)$$

$$dl^2 = E_a \frac{\partial \Phi}{\partial E^a} \eta_{ab} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial E^b \partial E^c} dE^a E^c \quad (2)$$

де l^2 - квадрат термодинамической длины, $\Phi \equiv \Phi(E^a)$ – термодинамический потенциал, который явно зависит от других термодинамических потенциалов - E^a , ($a=1, \dots, n$), n – количество термодинамических потенциалов, от которых зависит Φ , $\delta_{ab} = \text{diag}(1, 1, \dots, 1)$ и $\eta_{a,b} = \text{diag}(1, -1, \dots, -1)$. Оба соотношения (1) и (2) инвариантны относительно преобразований Лежандра[12].

Выражение для тензора кривизны имеет обычный вид:

$$R_{abcd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g_{ad}}{\partial E^b \partial E^c} + \frac{\partial^2 g_{bc}}{\partial E^a \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{ac}}{\partial E^b \partial E^d} - \frac{\partial^2 g_{bd}}{\partial E^a \partial E^c} \right) + g_{np} (\Gamma_{bc}^n \Gamma_{ad}^p - \Gamma_{bd}^n \Gamma_{ac}^p) \quad (3)$$

где $g^{nm}(g_{ad})$ – метрический тензор, $\Gamma_{bc}^n = \frac{1}{2} g^{nm} \left(\frac{\partial g_{mb}}{\partial E^c} + \frac{\partial g_{mc}}{\partial E^b} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial E^m} \right)$ – символы Кристоффеля.

Далее, скалярная кривизна вычисляется по формуле $R = g^{ac} g^{bd} R_{abcd}$.

Поскольку в дальнейшем мы будем иметь дело с системами, зависящими только от двух термодинамических потенциалов, то выражение для скалярной кривизны упрощается до:

$$R = \frac{2P_{1212}}{\det(g)}, \quad (4)$$

где $\det(g)$ – детерминант двумерного метрического тензора.

Система с нулевым звуком из голографического описания

С помощью голографического подхода в работе [12] был обнаружен новый тип квантовой жидкости. Теплоемкость, полученной в этой работе жидкости, при низких температурах зависит от температуры $\sim T^6$. Несмотря на нехарактерное для Ферми-жидкостей поведение теплоемкости,

система имеет моду нулевого звука при низких температурах. В работе [12] приведено выражение для энтропии этой жидкости в приближении $Td^{\frac{1}{p}} \ll 1$:

$$S(T, d) = S_0 + N_q \left(\frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1} \left(\frac{T^{2p}}{2d} \right) \quad (5)$$

где T – температура, d – барионная плотность, p – размерность пространства (мы взяли 3), в котором рассматривается данная жидкость, S_0 – энтропия при нулевой температуре и N_q – некоторая константа.

На рисунке 1 представлен график (5) для $\frac{N_q}{2} \left(\frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1} \equiv 1$ и некоторого диапазона параметров T и d .

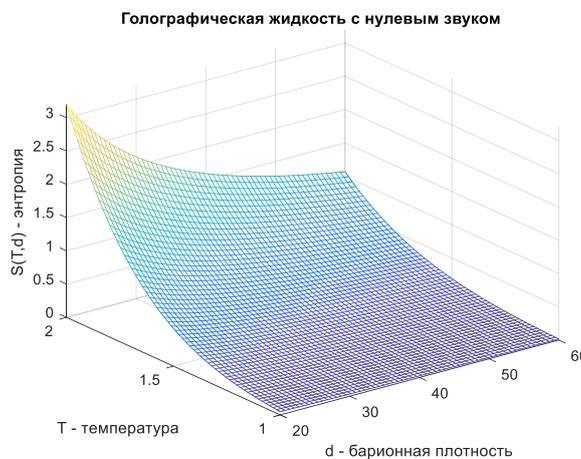


Рисунок 1. Энтропия (5) в зависимости от температуры и плотности барионов для голографической системы с нулевым звуком [12].

Применяя к выражению (5) формулу для метрики (1) и, для упрощения, принимая $\frac{N_q}{2} \left(\frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1}$ за единицу, получим метрический тензор:

$$g(T, d) = \begin{bmatrix} \frac{180T^{10}}{d^2} & -\frac{15T^{11}}{d^3} \\ -\frac{15T^{11}}{d^3} & -\frac{2T^{12}}{d^4} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Далее детерминант этого тензора:

$$\det(g) = -\frac{585T^{22}}{d^6} \quad (7)$$

И скалярная кривизна (4):

$$R = -\frac{985d^2}{135T^{12}} \quad (8)$$

Применяя же к выражению (5) формулу (2) и также принимая $\frac{N_q}{2} \left(\frac{4\pi}{p+1} \right)^{2p+1}$ за единицу, получим метрический тензор:

$$g(T, d) = \begin{bmatrix} \frac{180T^{10}}{d^2} & -\frac{21T^{11}}{d^3} \\ -\frac{21T^{11}}{d^3} & -\frac{2T^{12}}{d^4} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Детерминант этого тензора:

$$\det(g) = -\frac{81T^{22}}{d^6} \quad (10)$$

И скалярная кривизна:

$$R_1 = \frac{398d^2}{216T^{12}} \quad (11)$$

Из формул (8) и (11) видно, что скалярная кривизна стремится к минус и плюс бесконечностям при стремящейся к нулю температуре и при увеличении барионной плотности, что указывает на возможный фазовый переход в этой области. Также видно, что скалярные кривизны стремятся к нулю при стремящейся к нулю плотности барионного заряда и при увеличении температуры, что указывает на ослабление взаимодействия между частицами в системе. Полученные результаты для некоторого диапазона параметров T и d показаны на рисунках 2а и 2б. Для данной системы обе метрики (1) и (2) приводят к одному общему результату относительно расположения сингулярностей для соответствующих кривизн.

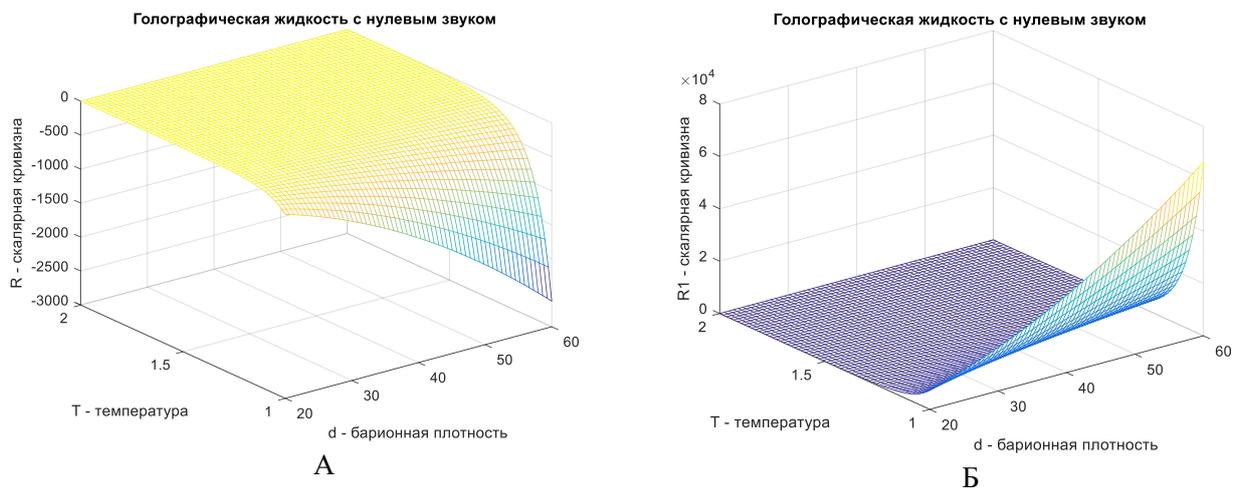


Рисунок 2. Зависимость скалярной кривизны от температуры и плотности барионов: а) - метрика вычислялась по формуле (1), б) - метрика вычислялась по формуле (2).

Закключение

В настоящей работе в рамках ГТД рассмотрено равновесное многообразие сильновзаимодействующей квантовой системы с нулевым звуком, предсказанной методом голографических дуальностей [16], для двух возможных вариантов метрик вычислены метрические тензоры и скалярные кривизны. В качестве термодинамического потенциала бралась энтропия, зависящая от температуры и барионной плотности.

Получены 3-мерные графики, на которых хорошо видно, при каких значениях термодинамических переменных скалярные кривизны стремятся к бесконечности или к нулю, что указывает на возможные фазовые переходы и на возможную компенсацию взаимодействий квантовыми эффектами соответственно.

Показано, что оба варианта метрик (1) и (2) в данном случае приводят к одному и тому же выводу относительно расположения линий возможных фазовых переходов в рассмотренной голографической системе с нулевым звуком.

Список использованной литературы:

- 1 Maldacena J. *The large N limit of super conformal field theories and supergravity* // *Adv. Theor. Math. Phys.* – 1998. – Vol.38. – P. 231–252.
- 2 Karch A., Son D.T., and Starinets A.O. *Zero sound from holography* // *Phys. Rev. Lett.* – 2009. – Vol.102. – P. 1103-1125. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.102.051602>
- 3 Gubser S. S., Klebanov I. R. and Polyakov A. M. *Gauge theory correlators from non-critical string theory* // *Phys. Lett. B.* - 1998. – Vol. 428. – P. 105. [arXiv:hep-th/9802109]
- 4 Witten E. *Anti-de Sitter space and holography* // *Adv. Theor. Math. Phys.* - 1998. – Vol.2. - P. 253 [arXiv:hep-th/9802150]
- 5 Landau L. D. *The theory of a Fermi liquid* // *JETP Theoretical Physics.* - 1956. – Vol. 30. - P. 1058.
- 6 Landau L. D. *Oscillations in a Fermi liquid* // *JETP Theoretical Physics.* - 1959. – Vol. 32. - P. 59.
- 7 Lifshitz E. M. and Pitaevskii L. P., *Statistical Physics Part 2* // Pergamon Press, Oxford, 1980. ISBN 0-08-0230-73-5
- 8 Abrikosov A. A., Gor'kov L. P., and Dzyaloshinskii I. E. *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* // Prentice Hall Englewood Cliffs, NJ. -1963. – Vol.17. – P.1-78.
- 9 Pines D. and Nozières P. *The Theory of Quantum Liquids*, Benjamin // New York. -1966. ISSN 978-020147747
- 10 Quevedo H., Sasha A., Zaldivar. *A geometrothermodynamic approach to ideal quantum gases and Bose-Einstein condensates* // *J. General Relativity and Quantum Cosmology.* - 2015. – Vol. 1. – P. 1512-1535. arXiv:1512.08755v3
- 11 Harry L. Morrison, James V. Lindesay, Uwe K. Albertin *Quantum theory of the two-dimensional Bose liquid* // *Physics Letters A.* – 1985. – Vol. 8. – P.397-400.
- 12 Karch A., O'Bannon A. *Holographic thermodynamics at finite baryon density: some exact results* // *JHEP* 0711. - 2007. – Vol. 074. – P. 256. <https://doi.org/10.1088/1126-6708/2007/11/074>
- 13 Quevedo H., Sanchez A., Taj S., Vazquez A., *Phase transitions in Geometrothermodynamics* // *Gen.Relativistic Gravity.* - 2011. - Vol. 43. – P. 1153. <https://doi.org/10.1007/s10714-010-0996-2>
- 14 Quevedo H. *Geometrothermodynamics* // *J. Math. Phys.* – 2007. – Vol. 48. - P.013506. Pineda V., Quevedo H., Maria N. Quevedo, Sanchez A., Valdes E. *The physical significance of geometrothermodynamic metrics* // *J. of Geometric Methods in Modern Physics.* - 2019. – Vol.16. – No. 11. – P.1950168. <https://doi.org/10.1142/S0219887819501688>
- 15 Engelhardt N and Horowitz G.T. *Recovering the spacetime metric from a holographic dual* // *Adv. Theoretical Math. Phys.* - 2017. – Vol. 21. No.7. – P.1635-1653.

МРНТИ 29.01.01.
УДК 621.391

DOI: <https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.36>

А. Заурбек¹, Д.З. Джурунтаев¹

¹Satpaev University, г. Алматы, Казахстан

СХЕМА ЦИФРОВОГО ГЕНЕРАТОРА С УВЕЛИЧЕННЫМ ПЕРИОДОМ ПОВТОРЕНИЯ ПСЕВДОСЛУЧАЙНОЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ИМПУЛЬСОВ

Аннотация

В данной работе рассматривается вопрос модернизации схемы цифрового генератора псевдослучайной последовательности импульсов, который может быть использован для создания криптографических алгоритмов шифрования. Необходимость модернизации схемы цифрового генератора связана с увеличением количества формируемых на его выходе последовательности импульсов псевдослучайной длительности и с псевдослучайными интервалами между ними. Для достижения этой цели в схему цифрового генератора псевдослучайной последовательности импульсов, построенного на основе пятиразрядного регистра сдвига с линейной обратной связью, включены небольшое количество дополнительных элементов.

На основе модернизированной схемы цифрового генератора псевдослучайной последовательности импульсов и активного RC фильтра нижних частот второго порядка Саллена-Ки построен цифровой генератор акустического шума, который в отличие от прототипа имеет истинно случайный характер выходного сигнала в пределах периода $\sim 4 \cdot (2^N - 1)$ при соблюдении схемотехнической простоты.

Ключевые слова: цифровой генератор псевдослучайной последовательности импульсов, регистр сдвига с линейной обратной связью, логический элемент XOR, фильтр нижних частот второго порядка.