МРНТИ 27.35.33

10.51889/2959-5894.2024.85.1.003

Ш.Д. Махмудова[1], А.Д. Махмудов[2], А. Н. Уразгалиева[1*]

[1] Западно-Казахстанский аграрно-технический университет имени Жангир хана, г. Уральск, Казахстан
[2] Западно-Казахстанский инновационно-технологический университет, г. Уральск, Казахстан
[*]e-mail: urazgalieva.akmaral@mail.ru

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОСВОБОЖДЕНИЯ ОТ СВЯЗЕЙ К ЧАСТНЫМ ПОСТАНОВКАМ ЗАДАЧ

Аннотация

Динамические системы, приводящие к задачам оптимального управления, протекающие в зависимости от времени представляют значительный интерес. Исследования различных процессов в сложных системах, в том числе информационных, характеризуются конфликтным характером принятия решения или условиями неопределенности. В качестве сложных систем можно рассматривать реальные системы: в экономике – это предприятия и отрасли, в социальной жизни – это различные коллективы, группы, сообщества. При исследовании сложных систем достаточно широко применяется теория игр. В условиях неопределенности, принимающий решение «игрок» располагает лишь информацией о множестве возможных стратегий (ситуаций), которые он может принять и о количественной мере «выигрыша», который он может получить, при выборе той ситуации, в которой он находится в данный момент. Данная статья дополняет и дает более полное представление о методе освобождения от связей на примере некоторых постановок задач. В частности, будет проведено исследование дифференциальных игр с фазовыми ограничениями.

Ключевые слова: дифференциальная игра; динамические системы; равновесная ситуация; оптимальное управление; принцип аналитической механики; дельта-функция Дирака; принцип максимума Понтрягина; тета-функция Хевисайда; функция Понтрягина.

Ш.Д. Махмудова[1], А.Д. Махмудов[2], А.Н. Уразгалиева[1]

[1]Жәңгір хан атындағы Батыс Қазақстан аграрлық-техникалық университеті, Орал қ., Қазақстан
[2]Батыс Қазақстан инновациялық-технологиялық университеті, Орал қ., Қазақстан

БАЙЛАНЫСТАРДАН ҚҰТЫЛУ ӘДІСІН ЕСЕПТЕРДІҢ ДЕРБЕС ҚОЙЫЛЫМДАРЫНА ҚОЛДАНУ

Аңдатпа

Уақыт функциясы ретінде пайда болатын оңтайлы басқару есептеріне әкелетін динамикалық жүйелер маңызды қызығушылық тудырады. Күрделі жүйелердегі, соның ішінде ақпараттық жүйелердегі әртүрлі процестерді зерттеу шешім қабылдаудың қақтығыс сипатымен немесе белгісіздік жағдайларымен сипатталады. Нақты жүйелерді күрделі жүйелер ретінде қарастыруға болады: экономикада бұл кәсіпорындар мен салалар, әлеуметтік өмірде бұл әртүрлі ұжымдар, топтар, қауымдастықтар. Ойын теориясы күрделі жүйелерді зерттеуде кеңінен қолданылады. Белгісіздік жағдайында шешім қабылдаушы «ойыншы» тек қана өзі қабылдай алатын ықтимал стратегиялар (жағдайлар) жиыны мен қазіргі уақытта орналасқан жағдайды таңдау кезінде ала алатын «жеңістің» сандық өлшемі туралы ақпаратқа ие болады. Бұл мақала кейбір есептердің қойылу мысалдарын пайдалана отырып, байланыстардан құтылу әдісін толықтырады және толық түсінік береді. Атап айтқанда, фазалық шектеулері бар дифференциалды ойындарды зерттеу жүргізіледі.

Түйін сөздер: дифференциалды ойын; динамикалық жүйелер; тепе-теңдік жағдайы; оңтайлы басқару; аналитикалық механика принципі; Дирактың дельта функциясы; Понтрягиннің максималды принципі; Хевисайдтің тета функциясы; Понтрягин функциясы.

Sh.D. Makhmudova[1], A.D. Makhmudov[2], A.N. Urazgalieva[1]
[1]Zhangir Khan West Kazakhstan agrarian-Technical university, Uralsk, Kazakhstan
[2]West Kazakhstan Innovation and Technological University, Uralsk, Kazakhstan

APPLICATION OF THE METHOD OF LIBERATION FROM CONNECTIONS TO PARTICULAR STATEMENTS OF PROBLEMS

Abstract

Dynamic systems leading to optimal control problems occurring as a function of time are of significant interest. Studies of various processes in complex systems, including information systems, are characterized by the conflict nature of decision-making or conditions of uncertainty. Real systems can be considered as complex systems: in economics these are enterprises and industries, in social life these are various teams, groups, communities. Game theory is widely used in the study of complex systems. Under conditions of uncertainty, the decision-making “player” only has information about the set of possible strategies (situations) that he can adopt and the quantitative measure of “winning” that he can receive when choosing the situation in which he is currently located. This article complements and gives a more complete understanding of the method of freeing from connections using the example of some problem statements. In particular, a study of differential games with phase constraints will be carried out.

Keywords: differential game; dynamic systems; equilibrium situation; optimal control; principle of analytical mechanics; Dirac's delta function; Pontryagin's maximum principle; Heaviside's theta function; Pontryagin's function.

Введение

По определению Н.Н. Воробьева «Теория игр – теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликтов и неопределенности» [1-3].

Об актуальности задач динамического программирования в экономических и технических задачах, где изменение моделирующего процесса проходит в зависимости от времени и о влиянии времени на критерий оптимальности, говорится в работе [4-5].

В игровых задачах ограничения (связи) можно включать в целевой функционал, тем самым релаксируя ограничения. Исследование подобных задач было приведено в работах [6-8].

Для полноты изложения и более полного представления о предлагаемом подходе (методе освобождения от связей) в этой статье рассмотрим различные частные постановки задач теории дифференциальных игр. Исследование этих задач будем проводить, опираясь на рассуждения двух статей [6,8]. Здесь будет проведено исследование дифференциальных игр с фазовыми ограничениями, дифференциальных игр с «расщепляющимися» [9] функциями, определяющих дифференциальную игру, дифференциальные игры двух игроков с противоположными интересами и в заключении статьи приведем примеры, иллюстрирующие предложенный метод исследования необходимых условий существования ситуации равновесия в бескоалиционных дифференциальных играх нескольких лиц.

Методология исследования

В дифференциальной игре N лиц, состояние которой характеризуется в каждый момент времени t фазовым вектором $x(t) = \left(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\right)$ пространства R^n (R^n – n-мерное евклидово пространство с нормой $\|x\|_{R^n} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$), изменяющимся в соответствии с дифференциальным уравнением (связями) в векторной форме:

$$\dot{x}(t) = f\left(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t)\right), t \in \left[t_0, t_f\right] \quad (1)$$

При заданных начальных условиях

$$x(t_0) = x_0 \quad (2)$$

Программная стратегия $u_i(t)$, $t \in [t_0, t_f]$ i-го участника называется допустимой, если $u_i(t)$ – кусочно-непрерывная функция, а значения стратегии $u_i(t)$ в каждый момент времени t принадлежит некоторому заданному компактному множеству $U_i(t)$ в евклидовом пространстве R^{r_i} (удовлетворяет «геометрическому» ограничению):

$$u_i(t) \in U_i(t), t \in [t_0, t_f], i = \overline{1, N}. \tag{3}$$

Определим множество

$$D = \{u_i(\cdot) \,/\, u_i\,(t) \in U\,_i(t), i = \overline{1, N}, t \in T, u(\cdot) \mapsto x(\cdot)\}, \tag{4}$$

На множестве D зададим функционал

$$I_i(u(\cdot)) = g_i\left(x(t_f)\right) + \int_{t_0}^{t_f} h_i(t, x(t), u_1(t), \dots, u_i(t), \dots, u_N(t))dt, \tag{5}$$

который примем за функцию выигрыша i-го игрока [6].

Здесь в качестве ограничений рассматривались ограничения только в стратегии $u_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ игроков (3). На возможные значения фазовых переменных $x(t)$ ограничения не накладывались (если не считать ограничений типа $g_0\left(x(t_f)\right) = 0$, т.е. область изменения фазовой переменной совпадала со всем пространством R^n.

В данной статье рассмотрим игру, в которой ограничены не только области возможных значений игроков, но и область возможных значений фазовый переменной $x(t)$ (траекторий дифференциальной игры [10].

Условия ограниченности фазовой переменной может интерпретироваться как ограничение на запасы механической прочности объекта, на его термическую прочность, нежелания попасть в «опасную» зону и т.д.

Итак, определим бескоалиционную дифференциальную игру N лиц с фазами ограничениями. Будем рассматривать случай автономной системы, т.е неявной зависимости всех функций, определяющих игру от переменной t (для упрощения преобразований). Пусть дифференциальная игра определяется следующей системой дифференциальных уравнений в векторной форме:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)), t \in T = [t_0, t_f] \tag{6}$$

с фиксированными начальным и конечным моментами времени $\mathrm{t_0}, \mathrm{t_f}$ и заданным начальным условием (2). И ограничениями на стратегии игроков (3).

Пусть траектория (фазовая переменная) $x(t) = \left(x^{(1)}(t), \dots, x^{(n)}(t)\right)$ системы (6), при начальных условиях (2) принадлежит некоторой замкнутой области B, определяемой условием:

$$b(x(t)) \leq 0. \tag{7}$$

Область B - ограничена с гладкой границей $b(x) = 0$. Скалярная функция $b(x)$ имеет частные производные по $x^{(j)}$, $j = \overline{1, n}$ до второго порядка и вектор:

$$grad\; b(x) = \frac{\partial b(x)}{\partial x} = \left(\frac{\partial b(x)}{\partial x^{(1)}}, \dots, \frac{\partial b(x)}{\partial x^{(n)}}\right)$$

нигде на границе области B не обращается в нуль. Если область совпадает со всем пространством R^n, то получим дифференциальную игру (1) – (5)

Функция $f\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right) = \left(f^{(1)}(*), \dots, f^{(n)}(*)\right)$, скалярные функций $f^{(j)}(*)$, $j = \overline{1, n}$ – непрерывны, непрерывно-дифференцируемы по координатам векторов $x(t)$ на $B \times U_1(t) \times \dots \times U_N(t)$. Определим множество

$$\widehat{D} = \left\{u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot) | u_i(t) \in U_i(t), i = \overline{1, N}, t \in T, u(\cdot) \xrightarrow{B} x(\cdot)\right\}.$$

Здесь и далее символ $u(\cdot) \xrightarrow{B} x(\cdot)$ означает, что стратегия $u(\cdot)$ порождает в соответствий с условиями (6), при начальных условиях (2) траекторию $x(\cdot)$, удовлетворяющую ограничению (7). На множестве $\widehat{D}$ введем функционал

$$I_i\left(u_1(\cdot), \dots, u_N(\cdot)\right) = g_i\left(x\left(t_f\right)\right) + \int_{t_0}^{t_f} h_i\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right) dt, \; i = \overline{1, N}, \tag{8}$$

который прием за функцию выигрыша i-го игрока. Здесь $g_i\left(x\left(t_f\right)\right)$, $h_i\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right)$ - скалярные функции, непрерывно-дифференцируемые по всем координатам векторов $x(t)$ и $u_1(t), \dots, u_N(t)$ на B и $B \times U_1(t) \times \dots \times U_N(t)$ соответственно.

Условия, наложение на функции $g_i\left(x\left(t_f\right)\right)$, $h_i\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right)$, $(i = \overline{1, N})$ обеспечивают существование, ограниченность функционала (8). Определим множество

$$\widehat{D}_i\left(u^p(\cdot) | u_i(\cdot)\right) = \left\{u_i(\cdot) | \left(u^p(\cdot) // u_i(\cdot)\right) \in \widehat{D}\right\}, \; i = \overline{1, N}.$$

Определение 1. Допустимую ситуацию назовем равновесной ситуаций и обозначим $u^p(\cdot) = u_1{}^p(\cdot), \dots, u_N{}^p(\cdot)$, если справедливо соотношение:

$$I_i\left(u^p(\cdot)\right) = \max_{u_i(\cdot) \in \widehat{D}_i\left(u^p(\cdot) | u_i(\cdot)\right)} I_i\left(u^p(\cdot) // u_i(\cdot)\right), \; i = \overline{1, N}. \tag{9}$$

Траекторию $\mathrm{x}^{\mathrm{p}}(\cdot)$ удовлетворяющую (7) и такую, что $u^p(\cdot) \xrightarrow{B} x^p(\cdot)$, назовем равновесной траекторией игры.

В оптимальном управлении [10], при исследовании задач с фазовыми ограничениями, обычно отдельно определяют условия существования участков оптимальной траекторий, лежащих внутри области допустимых значений фазовый переменной, отдельно – для участков траектории, целиком лежащих на границе области, затем производить их стыковку. При этом, естественно возникает необходимость задания определенной структуры траектории, что ограничивает круг задач.

Рассматриваемый подход лишен указанных недостатков: он не требует каких-либо дополнительных ограничений на структуру траектории. В работе получены условия – единые как для внутренних, так и для граничных участков траектории, но из которых можно выделить отдельно условия для различных отрезков траектории.

По предположению функция $b(x)$, определяющая область B, дифференцируема всюду, т.е. существует

$$\frac{d}{dt} b\left(x(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b\left(x(t)\right)}{\partial x^{(j)}} f^{(j)}\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right). \tag{10}$$

Введем обозначение

$$p\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial b\left(x(t)\right)}{\partial x^{(j)}} f^{(j)}\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right), \tag{11}$$

будем считать функцию $p\left(x(t), u_1(t), \dots, u_N(t)\right)$ – дифференцируемой по переменной x.

Очевидно, что функция $p\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)$, обращается в нуль для той части траектории $x(\cdot)$ системы (6), при условиях (2) , которая целиком лежит на границе $b\big(x(t)\big)=0$ области B.

Ограничение (7) можно представить в другом виде с использованием введенного обозначения (11), и через тета-функцию Хевисайда [11-13] следующим образом:

$$\theta\big(b(x)\big)_{p\left(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)}=0 \tag{12}$$

По принципам аналитической механики и условиям равновесия, составим для каждого игрока функционал типа

$$S_i^{u_i(\cdot)}\big(x(\cdot),u_1(\cdot),\dots,u_N(\cdot),\psi_i(\cdot)\big)=g_i\left(x\big(t_f\big)\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\{\psi_i(t)\big[f\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)-\dot{x}(t)\big]+h_i\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)+\}dt,\ i=\overline{1,N},$$

в который помимо ограничений (6), наложенных на фазовые переменные, включим и ограничение (12), т.е. применим метод освобождения от связей:

$$S_i^{u_i(\cdot)}\big(x(\cdot),u_1(\cdot),\dots,u_N(\cdot),\psi_i(\cdot)\big)=g_i\left(x\big(t_f\big)\right)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\Big\{\psi_i(t)\big[f\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)-\dot{x}(t)\big]+h_i\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)+$$
$$\lambda_i\theta\big(b(x)\big)_{p\left(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)}\Big\}dt,\ i=\overline{1,N}. \tag{13}$$

Здесь сопряженные переменные $\psi_i(t)=\left(\psi_i^{(1)}(t),\dots,\psi_i^{(n)}(t)\right)$ – кусочно-непрерывные вектор-функции, λ_i, $i=\overline{1,N}$ – ненулевые множители.

Преобразуем подинтегральное выражение в функционале (13), применив к нему правило интегрирования по частям, а затем поварьируем по фазовой переменной. Вариацию функционала $S_i^{u_i(\cdot)}(*)$ будем проводить на ситуаций равновесия $u^p(\cdot)$ и при этом используем правило дифференцирования функции Хевисайда [11-13]. Тогда получим:

$$\delta_x S_i^{u_i(\cdot)}\big(x(\cdot),u^p(\cdot),\psi_i(\cdot)\big)=\left[\frac{\partial g_i\left(x\big(t_f\big)\right)}{\partial x}-\psi_i\big(t_f\big)\right]\delta x\big(t_f\big)+$$
$$+\int_{t_0}^{t_f}\left\{\dot{\psi}_i(t)+\frac{\partial f(*)}{\partial x}\psi_i(t)+\frac{\partial h_i(x)}{\partial x}+\lambda_i\frac{\partial p\left(x(t),u_i^p(t),\dots,u_N^p(t)\right)}{\partial x}\theta\big(b(x)\big)+\right.$$
$$\left.\lambda_i p\left(x(t),u_i^p(t),\dots,u_N^p(t)\right)\frac{\partial b(x)}{\partial x}\tilde{\delta}\big(b(x)\big)\right\}\delta x dt,\ i=\overline{1,N}.$$

где $\tilde{\delta}(t)$ – дельта-функция Дирака[11-13].

Рассуждая, придем к тому, что вариация функционала по (13) по фазовой переменной на равновесной ситуации $u^p(\cdot)$, вдоль равновесной траекторий системы $x^p(\cdot)$ (6), (2), равна нулю, т.е.

$$\delta_x S_i^{u_i(\cdot)}\left(x^p(\cdot),u_i^p(\cdot),\dots,u_N^p(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)=0,\ i=\overline{1,N}$$

Из последнего равенства, в силу произвольности выбора сопряженных переменных $\psi_i(t)$, $(i=\overline{1,N})$, множителей λ_i $(i=\overline{1,N})$, вариаций (виртуальных смешений) δx, получим систему условий, которой удовлетворяют сопряженные:

$$\dot{\psi}_i(t) = -\frac{\partial f\big(x^p(t), u^p(t)\big)}{\partial x}\psi_i(t) - \frac{\partial h_i\big(x^p(t), u^p(t)\big)}{\partial x} + \lambda_i \frac{\partial p\big(x^p(t), u^p(t)\big)}{\partial x}\theta\big(b(x)\big) -$$
$$-\lambda_i p\big(x^p(t), u^p(t)\big)\tilde{\delta}\big(b(x)\big),\ t \in \big[t_0, t_f\big),$$
$$\psi_i\big(t_f\big) = \frac{\partial g_i\big(x(t_f)\big)}{\partial x},\ i = \overline{1, N} \qquad (14)$$

$\tilde{\delta}(x)$ – дельта-функция Дирака.

Согласно принципу виртуальных перемещений на любых малых вариаций равновесной стратегии i-го игрока, согласованных с ограничениями (3), при фиксированных $u_j^p(\cdot)$, j$=\overline{1, N}$, $j \neq i$ на равновесной траектории, справедливо условие:

$$\delta_{u_i} S_i^{u_i(\cdot)}\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot), \psi_i(\cdot)\big) \leq 0,\ i = \overline{1, N}$$

которое равносильно следующему:

$$\max_{u_i(\cdot) \in U_i} S_i^{u_i(\cdot)}\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot)//u_i(\cdot), \psi_i(\cdot)\big) = S_i^{u_i(\cdot)}\big(x^p(\cdot), u^p(\cdot), \psi_i(\cdot)\big),\ i = \overline{1, N}.$$

Расписав функционал $S_i^{u_i(\cdot)}(*)$ по формуле (13) и применив (1), аналогично принципу максимума Понтрягина

$$\Pi_i\big(t, x^p(t), u^p(t), \psi_i(t)\big) = \max_{u_i(t) \in U_i(t)}\big\{\Pi_i\big(t, x^p(t), u^p(t)//u_i(t), \psi_i(t)\big),$$

получим условие:

$$\Pi_i\big(x^p(t), u^p(t), \psi_i(t)\big) + \lambda_i \theta\big(b(x)\big)\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b(x)}{\partial x^{(j)}} \cdot f^{(j)}\big(x^p(t), u^p(t), \psi_i(t)\big) =$$
$$= \max_{u_i(t) \in U_i(t)}\big\{\Pi_i\big(x^p(t), u^p(t)//u_i(t), \psi_i(t)\big) +$$
$$+\lambda_i \theta\big(b(x)\big)\textstyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b(x)}{\partial x^{(j)}} \cdot f^{(j)}\big(x^p(t), u^p(t)//u_i(t)\big)\big\},\ t \in T. \qquad (15)$$

Результаты исследования

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Для того чтобы ситуация $u^p(\cdot)$ и соответствующая траектория $x^p(\cdot)$ в дифференциальной игре (6) – (8) были равновесными, необходимо существования кусочно-непрерывных сопряженных функций $\psi_i(\cdot)$, $i = \overline{1, N}$, удовлетворяющих условиям (14) и в каждый момент времени отрезка $\big[t_0, t_f\big]$ выполнение соотношение (15).

Сформулированная теорема содержит условия, которым удовлетворяют сопряженные переменные, соответствующие равновесным траекториями и условия типа принципа максимума Понтрягина, выполнимые как на границе области B, так и в открытом ядре области B. Напомним, что ядром (открытым ядром) области (множества) называется совокупность всех внутренних точек области (множества) [14].

Теперь будем рассматривать траектории специальной структуры: траектории, которые можно разбить на конечное число участков, каждый из которых целиком лежит либо на границе $b(x) = 0$ области B, либо внутри ядра области B, за исключением, быть может, своих концов. Для траекторий с такой структурой, из полученных выше условий (14) и (15) можно выделить системы необходимых условий для участков траекторий, целиком лежащих на границе $b(x) = 0$ области B, для участков траекторий, целиком лежащих в открытом ядре области B и получить условия в точках стыка [10].

Определение 2. Под точкой стыка будем понимать такую точку $x(\tau)$ траектории $x(\cdot)$ системы (6), при начальных условиях (2), лежащую на границе $b(x)=0$ области B, если $t_0<\tau<t_f$ и существует бесконечно малая константа $\varepsilon>0$, такая, что один из участков траектории $x(t)$ при $\tau-\varepsilon<t<\tau$ или при $\tau<t<\tau+\varepsilon$ лежит в открытом ядре области B. Момент времени τ называют моментом стыка.

Из условий (12) можно выделить условия, определяющие ядро области B:

$$\begin{cases} b(x)<0 \\ p\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)=0 \end{cases} \tag{16}$$

и условия, определяющие границу области B:

$$\begin{cases} \theta\big(b(x)\big)=1 \\ p\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)=0 \end{cases} \tag{17}$$

Согласно (16) внутри области B $\theta\big(b(x)\big)$ – тета-функция Хевисайда, $\tilde{\delta}\big(b(x)\big)$ – дельта-функция Дирака равны нулю, функция $p\big(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)$ отлична от нуля. Тогда из системы (14) получим условия, которым удовлетворяют непрерывные вектор функции $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ внутри открытого ядра области B:

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial f\big(x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x}\psi_i(t)-\frac{\partial h_i\big(x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x},\ t\in\big[t_0,t_f\big),$$

$$\psi_i\big(t_f\big)=\frac{\partial g_i\big(x(t_f)\big)}{\partial x},\ i=\overline{1,N}$$

и которые совпадают с условиями

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial f\big(t,x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x}\psi_i(t)-\frac{\partial h_i\big(t,x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x}$$

и с граничным условием

$$\psi_i\big(t_f\big)=-\frac{\partial g_i\big(x(t_f)\big)}{\partial x},\ i=\overline{1,N}.$$

Из условий (15) следует, что на ситуации равновесия $u^p(\cdot)$ вдоль отрезка равновесной траектории $x^p(\cdot)$, целиком лежащей в открытом ядре области B, функция Понтрягина i-го игрока достигает своего максимума, т.е. справедливо условие

$$\Pi_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\big\{\Pi_i\big(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big).$$

Тем самым мы показали, что внутри ядра области B выполняется следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функции $f\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)$, $h\big(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\big)$ имеют производные по переменной x и непрерывны вместе с этими производными по совокупности аргументов $\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)\in T\times R^N\times U_1(t)\times\dots\times U_N(t)$; $g_i\left(x\big(t_f\big)\right)$; $i=\overline{1,N}$ - непрерывно-дифференцируемые функции x.

Если $\left(u_1^p(\cdot),\dots,u_N^p(\cdot),\psi_i(\cdot)\right)$ – ситуация равновесия в игре (1) – (5), $x^p(\cdot)$ – соответствующая равновесная траектория системы, тогда существуют непрерывные функции $\psi_i(\cdot)$, $i=\overline{1,N}$, соответствующие равновесной ситуации $u^p(\cdot)$ и равновесной траектории $x^p(\cdot)$, которые являются решениями сопряженной системы

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial f\left(t,x^p(t),u^p(t)\right)}{\partial x}\psi_i(t)-\frac{\partial h_i\left(t,x^p(t),u^p(t)\right)}{\partial x}$$

с граничным условием

$$\psi_i\left(t_f\right)=-\frac{\partial g_i\left(x(t_f)\right)}{\partial x},\ i=\overline{1,N},$$

и при каждом $t\in T$ имеет место условие

$$\Pi_i\left(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\right)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\left\{\Pi_i\left(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\right)\right..$$

Далее выделим из системы условий (14) и (15) необходимые условия существования ситуации равновесия $u^p(\cdot)$ и соответствующего отрезка равновесной траектории $x^p(\cdot)$, который целиком лежит на границе $b(x)=0$ области B. А также получим условия сопряжения равновесных отрезков траектории, т.е. условия, которым удовлетворяют участки равновесной траектории, один из которых лежит в открытом ядре области В, а другой – на ее границе. Такие условия называются условиями скачка в момент стыка [10].

В дальнейшем изложении, для упрощения рассуждений, будем предполагать, что на отрезке времени $\left[t_0,t_f\right]$, имеется конечное число точек, в которых происходит выход траектории $x(\cdot)$ системы (6), при начальных условиях (2) на границу $b(x)=0$ области В и сход с нее, т.е рассмотрим случай с конечным числом моментов стыка. Пусть отрезок времени $\left[t_0,t_f\right]$ содержит один момент $t^{/}$ выхода траектории $x(\cdot)$ на границу $b(x)=0$ области B и один момент $t^{//}$ схода траектории с нее.

Траектория $x(t)$, $t\in\left(t^{/},t^{//}\right)$ системы (6) удовлетворяет уравнению $b(x)=0$, т.е. целиком лежит на границе области B.

Для этого отрезка времени из условии (17) и по определению тета-функция $\theta\left(b(x)\right)$ Хевисайда отлична от нуля и принимает всюду значение равное единице. Функция $p\left(x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)$ из (11) обращается в нуль, для траектории $x(t)$, $t\in\left(t^{/},t^{//}\right)$. Используя определения

$$\Pi_{\mathrm{i}}\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t),\psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\right)=h_i\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right)+\\ \psi_{\mathrm{i}}(\mathrm{t})\mathrm{f}\left(t,x(t),u_1(t),\dots,u_N(t)\right),$$

$i=\overline{1,N}$ функции Понтрягина $\Pi_i(*)$ для i-го игрока из условия (16) получим систему

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial\Pi_i\left(x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\right)}{\partial x}\psi_i(t)-\lambda_i\frac{\partial p\left(x^p(t),u^p(t)\right)}{\partial x},\ t\in\left(t^{/},t^{//}\right),\ i=\overline{1,N} \qquad (18)$$

Из условия (15) следует, что на границе $b(x)=0$ области B выполняются условия аналогичные принципу максимума Понтрягина:

$$\Pi_i\big(x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)+\lambda_i\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b}{\partial x^{(j)}}\cdot f^{(j)}\big(x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=$$
$$=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\Big\{\Pi_i\big(x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big)+$$
$$+\lambda_i\textstyle\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial b}{\partial x^{(j)}}\cdot f^{(j)}\big(x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big)\Big\},.\ i=\overline{1,N} \qquad (19)$$

Теперь из системы (14) выделим условия скачка, т.е. условия, которые выполняются в момент времени t, совпадающего со значением $t^{/}$ либо с $t^{//}$. Для определённости, предположим, что t совпадает с моментом $t^{/}$ выхода траектории на границу области B.

В силу наличия в первом равенстве системы (14) слагаемого с дельта-функции Дирака, переменные $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ терпят разрыв (имеют скачок). Функцию $b(x)$ в момент $t^{/}$ представим через функцию $p\big(x(t),u_1(t),\ldots,u_N(t)\big)$, используя правило разложения в ряд Маклорена [15] в виде:

$$b\big(x(t)\big)=p\big(x(t),u_1(t),\ldots,u_N(t)\big)(t-t^{/})+0(t-t^{/}).$$

Тогда с учетом свойств дельта-функции Дирака $\tilde{\delta}\big(b(x)\big)$ выражение

$$\lambda_i p\big(x(t),u_1(t),\ldots,u_N(t)\big)\frac{\partial b(x)}{\partial x}\tilde{\delta}\big(b(x)\big)$$

преобразуем к виду $\lambda_i\frac{\partial b(x)}{\partial x}\tilde{\delta}\big(t-t^{/}\big)$, поэтому скачок функции $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ в момент времени $t^{/}$ будет равен $\lambda_i\frac{\partial b(x)}{\partial x}$. Отсюда получим условие скачка для сопряженной переменной в виде:

$$\psi_i(t^{/}+0)-\psi_i(t^{/}-0)=\lambda_i\tfrac{\partial b(x)}{\partial x},\ i=\overline{1,N} \qquad (20)$$

Заключение

Сформулируем результат данной статьи, объединив полученные выше результаты.

Теорема 3. Если $u^p(\cdot)$ – равновесная ситуация, $x^p(\cdot)$ – соответствующая равновесная траектория в дифференциальной игре (6) – (8), то существует сопряженные вектор-функции $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ такие, что: $\forall t\in\big[t_0,t_f\big)\cup\big(t^{/},t^{//}\big)$ функции $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ – непрерывно-дифференцируемые функции удовлетворяющие условиям

$$\dot{\psi}_i(t)=-\frac{\partial f\big(t,x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x}\psi_i(t)-\frac{\partial h_i\big(t,x^p(t),u^p(t)\big)}{\partial x}$$

с граничным условием

$$\psi_i\big(t_f\big)=-\tfrac{\partial g_i\left(x(t_f)\right)}{\partial x},\ i=\overline{1,N},$$

и выполняются условия

$$\Pi_i\big(t,x^p(t),u^p(t),\psi_i(t)\big)=\max_{u_i(t)\in U_i(t)}\Big\{\Pi_i\big(t,x^p(t),u^p(t)//u_i(t),\psi_i(t)\big);$$

$\forall t \in (t^{/}, t^{//})$ функции $\psi_i(t)$, $i = \overline{1, N}$ – непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяют условиям (18) и выполняются соотношения (19).

В точке $t^{/}$ (или $t^{//}$) справедливо условие (20).

Отметим, что исследованию необходимых условий существования ситуации равновесия в дифференциальных играх с фазовыми ограничениями типа (7) практически не уделено внимания в литературе.

Список использованных источников

[1] Воробьев, Н. Н. Основы теории игр. Бескоалиционные игры / Н. Н. Воробьев. - М.: Наука, 1984. – 496 с.

[2]Воробьев, Н. Н. Современное состояние теории игр / Н. Н. Воробьев // Успехи мат. наук. - 1970. - Т. 25, № 2. - С. 81-140.

[3]Сорокин В. А. Сравнение принципов оптимальности для кооперативных игр на графах / Сорокин В. А., Сизов Н. А., Дурандин Д. П., Боган М. В. // Молодой ученый. - 2019. - №26(264). - С. 14-16.

[4]Нуралин, Б.Н. Методы математического моделирования и параметрической оптимизации технологических процессов в инженерных расчетах. Учебное пособие / Б.Н. Нуралин, В.С. Кухта // Алматы: Альманахъ. – 2019. - 286 с.

[5]Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения. Какие явления они описывают и как их решить / В. А.Гордин. - М.: Учебники Высшей школы экономики. - 2016. – 235 с.

[6]Махмудова Ш.Д. Главная функция Гамильтона и необходимые условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби / Ш.Д.Махмудова, А.Н.Уразгалиева // Вестник КазНПУ им.Абая. - 2021. - №1. - С. 31.

[7]Махмудова Ш.Д. Достаточные условия существования ситуации равновесия в форме уравнений Гамильтона-Якоби / Ш.Д. Махмудова, А.Д. Махмудов, А.Н. Уразгалиева // Вестник Национальной инженерной академии Республики Казахстан. -2022. - № 2(84). - С. 183-194.

[8]Махмудова Ш.Д. Принцип Кротова и равновесные ситуации в дифференциальных играх / Ш.Д. Махмудова, А.Д. Махмудов, Уразгалиева А.Н. // Вестник КазНПУ имени Абая - серия «физико-математические науки». - №4 – 2022 - С. 26-33

[9]Вайсборд Э.И. Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения / Вайсборд Э.И., Жуковский В.И. - М.: Советское радио. - 1980. - 304 с.

[10] Понтрягин Л.С. К теории дифференциальных игр / Понтрягин Л.С. // Успехи математических наук. - 1966. - Т.21. №4. - С.219-274

[11] Владимиров В.С. Обобщенные функции в математической физике / Владимиров В.С. – М.: Наука. - 1976. – 280 с.

[12] Ландау Л.Д. Теоретическая физика в 10 томах. т.1. Механика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лившиц. // М.: Физматлит. - 2018. - 224 с.

[13] Бертяев В.Д. Теоретическая и аналитическая механика. Учебно-исследовательская работа студентов: Учебное пособие / В.Д. Бертяев, В.С. Ручинский. // СПб.: Лань. - 2019. - 424 с.

[14] Малафеев О.А. Достаточные условия равновесности в дифференциальных играх со многими участниками / Малафеев О.А. // Математические методы оптимизации. – Калинин. - 1985. - С. 37-45

[15] Никольский М.С. Нестационарные линейные дифференциальные игры / Никольский М.С. // Кибернетика. - 1970. - №6. С. 98-101.

References

[1] Vorob'ev, N. N. (1984) Osnovy teorii igr. Beskoalicionnye igry [Fundamentals of game theory. Non-cooperative games] M.: Nauka (in Russian).

[2] Vorob'ev, N. N. (1970) Sovremennoe sostojanie teorii igr [Current state of game theory] Uspehi mat. Nauk, 2, 81-140 (in Russian).

[3] Sorokin, V. A., Sizov, N. A., Durandin, D. & P.,Bogan, M. V. (2019) Sravneniye printsipov optimal'nosti dlya kooperativnykh igr na grafakh [Comparison of the principles of optimality for cooperative games on graphs] Young scientist, 26, 14-16 (in Russian).

[4] Nuralin, B.N., & Kuhta, V.S. (2019) Metody matematicheskogo modelirovanija i parametricheskoj optimizacii tehnologicheskih processov v inzhenernyh raschetah. Uchebnoe posobie [Methods of mathematical

modeling and parametric optimization of technological processes in engineering calculations. Tutorial] Almaty. Al'manah (in Russian).

[5] Gordin, V. A. (2016). Differencial'nye i raznostnye uravnenija. Kakie javlenija oni opisyvajut i kak ih reshit [Differential and difference equations. What phenomena do they describe and how to solve them]. M.: Uchebniki Vysshej shkoly jekonomiki (in Russian).

[6] Makhmudova, Sh.D. & Urazgalieva, A.N. (2021). Osnovnaya funktsiya Gamil'tona i neobkhodimyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v vide uravneniy Gamil'tona-Yakobi [Hamilton's principal function. Necessary conditions for the existence of equilibrium in the form of hamilton-jacobi equations] Vestnik KazNPU imeni Abaya, 1, 31 (in Russian).

[7] Makhmudova Sh.D. & Urazgalieva, A.N. (2022) Dostatochnyye usloviya sushchestvovaniya situatsii ravnovesiya v forme uravneniy Gamil'tona-Yakobi [Sufficient conditions for the existence of an equilibrium situation in the form of the Hamilton-Jacobi equations] Bulletin of the National Engineering Academy of the Republic of Kazakhstan, 2, 183-194 (in Russian).

[8] Makhmudova Sh.D. & Urazgalieva, A.N. (2022) Princip Krotova i ravnovesnye situacii v differencial'nyh igrah [Krotov's principle and equilibrium situations in differential games] Vestnik KazNPU imeni Abaya, 4, 26-33 (in Russian).

[9] Vajsbord, Je.I. & Zhukovskij, V.I. (1980). Vvedenie v differencial'nye igry neskol'kih lic i ih prilozhenija [Introduction to Multiple Person Differential Games and Their Applications] M.: Sovetskoe radio (in Russian).

[10] Pontrjagin, L.S. (1966). K teorii differencial'nyh igr [On the theory of differential games] Uspehi matematicheskih nauk, Vol. 21, 4, 219-274 (in Russian).

[11] Vladimirov V.S. (1976). Obobshhennye funkcii v matematicheskoj fizike [Generalized functions in mathematical physics] M.: Nauka (in Russian).

[12] Landau, L.D. & Livshic E.M. (2018). Teoreticheskaja fizika v 10 tomah. t.1. Mehanika[Theoretical physics in 10 volumes] Vol.I. M.: Fizmatlit. (in Russian).

[13] Bertjaev, V.D. & Ruchinskij V.S. (2019). Teoreticheskaja i analiticheskaja mehanika. Uchebno-issledovatel'skaja rabota studentov: Uchebnoe posobie [Theoretical and analytical mechanics. Educational and research work of students: Textbook]. SPb.: Lan. (in Russian).

[14] Malafeev, O.A. (1985). Dostatochnye uslovija ravnovesnosti v differencial'nyh igrah so mnogimi uchastnikami [Sufficient conditions for equilibrium in differential games with many participants] Matematicheskie metody optimizacii. – Kalinin (in Russian).

[15] Nikol'skij, M.S. (1970). Nestacionarnye linejnye differencial'nye igry [Nonstationary linear differential games] Kibernetika, 6, 98-101 (in Russian).