ҒТАХР 27.27.17

10.51889/2959-5894.2024.86.2.006

Ұ.Р. Көшербаева[1*], С.А. Алтынбек [2]

[1]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2] Қ. Құлажанов атындағы Қазақ технология және бизнес университеті, Астана қ., Қазақстан
*e-mail: ulbyke1970@gmail.com

ШЕКТЕЛМЕГЕН ОБЛЫСТА ПОЛЯРЛЫҚ ЕРЕКШЕЛІГІ БАР БЕЛЬТРАМИ ТЕҢДЕУІ ҮШІН ҚОЙЫЛҒАН БАСТАПҚЫ- ШЕКАРАЛЫҚ ЕСЕП ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Сингулярлы коэффициенттері бар бірінші ретті дербес дифференциалдық теңдеулер жүйелеріне қойылған шекаралық есептерді зерттеу екі бағытта қарастырылады. Біреуінің коэффициенттерінде сингулярлық нүкте бар, ал екіншісінде сингулярлы сызықтар бар. Бұл жұмыста ақырсыз облыста берілген полярлық ерекше нүктесі бар Бельтрами теңдеуі үшін қойылған бастапқы-шекаралық есеп шешілген. Қарастырылған теңдеудің коэффициентерінің координаталар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар және олар $L_2(G)$ класында жатпайды. Сондықтан И.Н.Векуаның аналитикалық аппаратымен қамтылмаған және жеке зерттеуді қажет етеді. Есептің шешімін табу үшін функционалдық анализ және комплекс айнымалыға байланысты функциялар теориясының әдістерімен ұштастыра жасалған Ә.Б.Түнғатаровтың зерттеу әдістемесі пайдаланылды. Нәтижесінде полярлық ерекшелігі бар Бельтрами теңдеуіне қойылған бастапқы-шекаралық есептің шешімінің бар болу шарттары табылды және үзіліссіз шешімдері айқын түрде құрылды.

Түйін сөздер: Бельтрами теңдеуі, полярлық ерекшелігі бар теңдеу, бастапқы-шекаралық есеп.

У.Р. Кушербаева[1], С.А. Алтынбек[2]
[1]Казахский национальный университет им.аль - Фараби, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский университет технологии и бизнеса им.К.Кулажанова, г.Астана, Казахстан

О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ С ПОЛЯРНОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация

Исследования по краевым задачам для систем уравнений в частных производных первого порядка с сингулярными коэффициентами развивались в двух направлениях, водном из которых объектами изучения являлись коэффициенты с сингулярными точками, в другом – с сингулярными линиями. В данной работе решена начально-краевая задача для уравнения Бельтрами с полярной особенностью в неограниченной области. Коэффициенты рассматриваемого уравнения имеют полюс первого порядка в начальной точке координат и не принадлежат даже классу $L_2(G)$. По этой причине, несмотря на свой специфический вид это уравнение не охватывается аналитическим аппаратом И.Н. Векуа и нуждается в самостоятельном исследовании. Для нахождения решения задачи использована методика разработанная А.Б.Тунгатаровым в сочетании с методами теорий функций комплексного переменного и функционального анализа. Устранена зависимость условий малости коэффициентов уравнений от области G, уравнения изучались только в окрестности сингулярных точек. В результате данной работы найдено достаточное условие разрешимости начально-краевой задачи для системы Бельтрами с полярной особенностью.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, уравнение с полярной особенностью, начально-краевая задача.

U. Kusherbayeva[1], S. Altynbek[2]
[1]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan,
[2]K. Kulazhanov Kazakh University of Technology and Business, Astana, Kazakhstan

ON THE INITIAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE BELTRAMI EQUATION WITH POLAR SINGULARITY IN AN UNBOUNDED REGION

Abstract

Research on boundary value problems for systems of first-order partial differential equations with singular coefficients developed in two directions, in one of which the objects of study were coefficients with singular points, in the other - with singular lines. In this paper, the problem for the Beltrami equation with a polar singularity in an unbounded domain is solved. The coefficients of the equation have a first-order pole at z = 0 and do not even belong to the class $L_2(G)$. For this reason, despite its specific form, this equation is not covered by the analytical apparatus of I.N. Vekua and needs to be independently studied. To find a solution to the problem, the method developed by A.B.Tungatarov in combination with the methods of theories of functions of complex variable and functional analysis was used. The dependence of the conditions of smallness of the coefficients of the equations on the area G was eliminated; the equations were studied only in the neighborhood of singular points. As a result of this work, a sufficient condition for solvability of the initial boundary value problem for the Beltrami system with polar singularity is found.

Keywords: Beltrami equation, equation with polar singularity, initial boundary value problem.

Кіріспе және негіздері

Риман беттерін, Тейхма Мюллер кеңістіктерін, Клейн топтарын, мераморф функцияларды зерттегенде, Клиффорд талдауында, тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз иілетін беттер теориясында және тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды құрастыру үшін бірінші ретті сызықтық дифференциалдық теңдеуді

$$\partial_{\bar{z}} f = \mu(z)\partial_z f, \quad z \in U \subseteq \mathbb{C}$$

пайдаланады. Осы теңдеуді *Бельтрами теңдеуі (жүйесі)* деп атайды.

Егер $\mu(z)$ Гельдер бойынша үзіліссіз болса, онда U тұйық облысты өзіне көшіретін гомеоморфизм табылатынын И.Н.Векуа [1] дәлелдеді. Ал, Б.В.Боярский [2] бұл нәтижені кез келген өлшемді және шектелген $\mu(z)$ коэффициенті үшін кеңейтті. Осылайша, Бельтрами жүйесінің аналитикалық функциялар арқылы берілген шешімі табылған. Бұл нәтижелер төмендегідей формуламен берілген жалпы эллиптикалық теңдеулер үшін де орындалады:

$$\partial_{\bar{z}} f + \mu_1(z)\partial_z f + \mu_2(z)\overline{\partial_z f} + af + b\bar{f} = 0$$

Мұнда μ_1, μ_2 – өлшемді және шектелген функциялар

$$|\mu_1| + |\mu_2| \le \mu_0 = const < 1$$

теңсіздігін қанағаттандырады. Ал, $a, b \in L_p(U), p > 2$.

Теориялық пайымдаулар мен практикалық қажеттіліктер И.Н. Векуаның [3] жалпыланған аналитикалық функциялар теориясын $p < 2$ жағдайға кеңейту қажеттілігіне әкелді. Бұл мәселені Н.Қ. Блиев [4] $B^{\alpha}_{p,\theta}(U)$ Никольский – Бесов кеңістігі тұрғысынан шешті.

Мұнда $U -$ комплекс жазықтықтағы шекарасы жеткілікті тегіс, шектелген облыс, $1 < p < 2,\ 0 < \alpha < 1,\ \theta \ge 1$. Айта кету керек, $1 < p < 2,\ \alpha = 2p - 1$ болғанда $B^{\alpha}_{p,\theta}(U) \subset L_2(U)$ бірақ, $B^{\alpha}_{p,\theta}(U) \not\subset L_q(U),\ q > 2$. Ә.Б. Түнғатаров [5] теңдеуді зерттеу үшін жаңа аналитикалық аппаратты пайдаланды. Ол теңдеудегі коэффициенттерге қойылатын шартты облыстан аластады. Яғни, теңдеу тек сингулярлық нүктенің маңайында қаралады. [1] жұмыстың нәтижелеріне сүйене отырып, тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды тұрғызу Бельтрами теңдеуінің гомеоморфты шешімдерін табумен бірдей екенін З.Д.Усманов [6,7] дәлелдеді.

Д.Б. Кац [8] Бельтрами теңдеуінің дербес жағдайы үшін секіріс есебін қарастырды. Д.Қ. Ахмед-Заки [9] сингулярлы түзуі бар бірінші ретті дербес туындылы теңдеулер жүйесіне қойылған Дирихле, Нейман, Робин есептерінің үзіліссіз шешімдерін алды. Бұл жұмыстың мақсаты - полярлық ерекшелігі бар Бельтрами теңдеуіне қойылған бастапқы-шекаралық есептің шешімінің бар болу шарттарын табу және үзіліссіз шешімдерін айқын түрде құру.

Зерттеу әдіснамасы

Есептің қойылуы Айталық, $\nu > 1$ нақты сан, b_0 −комплекс сан, $k = [\nu]$ болсын. Мұнда $[a] - a$-ң бүтін бөлігін білдіреді. $R > 0$ және $G = \{z = re^{i\phi} : 0 \le r < R, 0 \le \phi \le 2\pi\}$ болсын.

$$\partial_{\bar{z}} V - \beta e^{2i\phi} \partial_z V + \frac{a(\phi)}{2\bar{z}} V + \frac{b(\phi)}{2\bar{z}} \bar{V} = 0, \tag{1}$$

Мұнда $0 \le \beta < 1$ – эллиптикалық шарт, $a(\phi), b(\phi) \in C[0,2\pi], a(\phi + 2\pi) = a(\phi)$, $b(\phi + 2\pi) = b(\phi)$.

G облысында (1) теңдеудің

$$C(G) \cap W_p^1(G), 1 < p < 2 \tag{2}$$

класта жататын және

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0, \phi) = 0 \quad \left(n = \overline{1, (k-1)}\right) \tag{3}$$

$$|V(r, \phi)| = O(r^k), \ r \to \infty \tag{4}$$

$$V(r, 0) = V(r, 2\pi) = b_0 r^{\frac{\nu}{1-\beta}}, \ \ 0 \le r < \infty \tag{5}$$

шарттарды қанағаттандыратын шешімін табу керек. Мұнда $k > 1$ бүтін сан.

Есептің шешуі [10] жұмыстың нәтижесінде (1) теңдеудің (2) кластағы шешімінің

$$V_\nu(r, \phi) = r^{\frac{\nu}{1-\beta}} \left(\overline{c_\nu} P_{\nu,1}(\phi) + c_\nu P_{\nu,2}(\phi)\right) \times exp\left(\frac{i}{1+\beta}\left(\nu\phi + B(\phi)\right)\right) \tag{6}$$

түрі алынған. Мұнда

$$B(\phi) = \int_0^\phi a(\gamma) d\gamma, \quad A_\nu(\phi) = \frac{i}{1+\beta} b(\phi)\, exp\left(-\frac{2i}{1+\beta}\left(\nu\phi + Re\, B\,(\phi)\right)\right),$$

$$P_{\nu,1}(\phi) = \sum_{k=1}^{\infty} I_{\nu,2k-1}(\phi), \qquad P_{\nu,2}(\phi) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} I_{\nu,2k}(\phi),$$

$$I_{\nu,1}(\phi) = \int_0^\phi A_\nu(\gamma)\, d\gamma, \qquad I_{\nu,k}(\phi) = \int_0^\phi A_\nu(\gamma)\, \overline{I_{\nu,k-1}(\gamma)} d\gamma, \left(k = \overline{2, \infty}\right),$$

$$c_\nu = \begin{cases} d, & \Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0, \\ \Delta_1(\nu) d - \overline{\Delta_2(\nu)} \cdot \overline{d}, & |\Delta_1(\nu)| = |\Delta_2(\nu)| \ne 0 \end{cases} \tag{7}$$

$\Delta_1(\nu) = P_{\nu,1}(2\pi)$, $\Delta_2(\nu) = P_{\nu,2}(2\pi) - exp\left(-\frac{2\pi i}{1+\beta}(\nu + a_1)\right)$, $a_1 = \frac{B(2\pi)}{2\pi}$, d −кез келген комплекс сан.

Кез келген бүтін k үшін

$$|\Delta_1(\nu)| = |\Delta_2(\nu)| \tag{8}$$

теңдігін қанағаттандыратын ν саны $[k, k+1]$ аралықтан әруақытта табылатыны [10] жұмыста дәлелденген. Сондықтан мұндай ν - лер үшін $V_\nu(r,0) = V_\nu(r,2\pi)$ теңдігі орындалады.

(6) формуламен анықталған $V(r,\phi)$ функция (1) теңдеудің (2) класта жататын және (3), (4) шарттарды және (5) шарттың $V(r,0) = V(r,2\pi)$ сол жақ бөлігін қанағаттандыратын шешімі болады.

Енді (7) формуладағы d коэффициентті (5) шарттың оң жақ бөлігін қанағаттандыратындай етіп таңдаймыз. Ол үшін (7) теңдікті (5)-ке апарып қоямыз. (8) теңдік орындалатын жағдайларды қарастырайық.

1) $\Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0$ орындалса, онда $c_\nu = d$ болғандықтан

$$V_\nu(r,\phi) = r^{\frac{\nu}{1-\beta}}\left(\overline{d}P_{\nu,1}(\phi) + dP_{\nu,2}(\phi)\right) \times exp\left(\frac{i}{1+\beta}\left(\nu\phi + B(\phi)\right)\right) \tag{9}$$

Демек, есептің (5) шартты қанағаттандыратын (9) формуламен табылатын жалғыз шешімі болады. Бұл шешім $\nu + \beta \geq 1$ орындалғанда $C^1(G)$ класта жатады, ал $\nu + \beta < 1$ орындалғанда $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ класта жатады, мұнда $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\nu-\beta}$.

2) $|\Delta_1(\nu)| = |\Delta_2(\nu)|$, $\Delta_1(\nu) \neq 0$ орындалатын бірнеше жағдай бар.

2а) $\Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu)$, $\quad \Delta_1(\nu) \neq 0$ болсын.

Онда $Re\left(b_0\overline{\Delta_1(\nu)}\right) = 0$ орындалғанда есептің (5) шартты қанағаттандыратын (9) формуламен табылатын жалғыз шешімі болады. Бұл шешім $\nu + \beta \geq 1$ орындалғанда $C^1(G)$ класта жатады, ал $\nu + \beta < 1$ орындалғанда $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ класта жатады, мұнда $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\nu-\beta}$.

2ә) $\Delta_1(\nu) = -\Delta_2(\nu)$, $\quad \Delta_1(\nu) \neq 0$ болсын.

Онда $Im\left(b_0\overline{\Delta_1(\nu)}\right) = 0$ орындалғанда есептің (5) шартты қанағаттандыратын (9) формуламен табылатын жалғыз шешімі болады. Бұл шешім $\nu + \beta \geq 1$ орындалғанда $C^1(G)$ класта жатады, ал $\nu + \beta < 1$ орындалғанда $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ класта жатады, мұнда $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\nu-\beta}$.

2б) $|\Delta_1(\nu)| = |\Delta_2(\nu)|$, $\Delta_1(\nu) \neq 0$, $\Delta_1(\nu) \neq \Delta_2(\nu)$, $\Delta_1(\nu) \neq -\Delta_2(\nu)$ болсын.

Онда $\overline{\Delta_1(\nu)}b_0 + \Delta_2(\nu)\overline{b_0} = 0$ орындалғанда есептің (5) шартты қанағаттандыратын (9) формуламен табылатын жалғыз шешімі болады. Бұл шешім $\nu + \beta \geq 1$ орындалғанда $C^1(G)$ класта жатады, ал $\nu + \beta < 1$ орындалғанда $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ класта жатады, мұнда $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\nu-\beta}$.

Нәтижесінде $\Delta_1(\nu) \neq 0$ болса, онда

$$Re(\Delta_1(\nu) - \Delta_2(\nu))Red - Im(\Delta_1(\nu) + \Delta_2(\nu))Imd = Reb_0,$$

$$Im(\Delta_1(\nu) - \Delta_2(\nu))Red + Re(\Delta_1(\nu) + \Delta_2(\nu))Red = Imb_0$$

теңдеулер жүйесін және $\Delta_1(\nu) \neq -\overline{\Delta_2(\nu)}$ болса, онда $d = b_0$ аламыз.

Теңдеулер жүйесінің анықтауышы нөлге тең болғандықтан $b_0 \neq 0$ болса, шешім болмайды. $b_0 = 0$ болғанда соңғы теңдеулер жүйесінің шешімін (6) –ға қойсақ, онда $c_\nu = 0$ аламыз.

Зерттеу нәтижелері

Теорема 1. Егер $\Delta_1(\nu) = \Delta_2(\nu) = 0$ орындалса, онда есептің (6) формуламен табылатын жалғыз шешімі болады, мұнда $c_\nu = b_0$.

Бұл шешім $\nu + \beta \geq 1$ орындалғанда $C^1(G)$ класта жатады, ал $\nu + \beta < 1$ орындалғанда $C(\overline{G}) \cap W_p^1(G)$ класта жатады, мұнда $1 < p < \frac{2(1-\beta)}{1-\nu-\beta}$.

Теорема 2. Айталық, $\Delta_1(\nu) \neq -\overline{\Delta_2(\nu)}$, $\Delta_1(\nu) \neq 0$, ν – (8) теңдеудің шешімі болсын. Онда $b_0 \neq 0$ болса, есептің шешімі жоқ, $b_0 = 0$ болса есептің шексіз көп шешімі бар.

Бұл шешімдер (6) формуламен табылады, мұнда $c_\nu = i\alpha Im(\Delta_1(\nu) \cdot \Delta_2(\nu))$, α-кез келген нақты сан.

Дискуссия

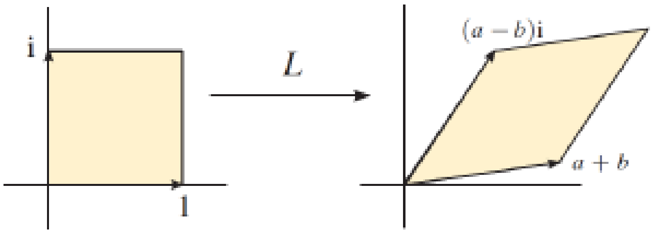
Айталық, $\mathbb{C}$ комплекс жазықтық болсын, әдеттегідей, оң бағытталған стандарт базис – $\{1; i\}$. Координат ретінде (x, y) немесе $(z, \bar{z})$ пайдаланамыз, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$.

Сызықтық карта $L: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ төмендегідей түрде

$$L(z) = az + b\bar{z}$$

жазылады, мұнда $a, b, z \in \mathbb{C}$.

1 және i арқылы тұрғызылған бірлік шаршыны L карта $a + b$ және $ai - bi$ арқылы тұрғызылған параллелограммға бейнелейді. (1-сурет)



Сурет 1. Бірлік шаршының $\{a + b; (a - b)i\}$ *параллелограммға бейнесі*

Параллелограмның ауданы L-ң анықтауышының абсолют шамасына тең, яғни $\det(L) = |a|^2 - |b|^2$.

Біз бағытты сақтайтын және инверсияланған карта қарастырамыз. Сондықтан $|a| > |b|$ болады.

L үшін *Бельтрами коэффициенті* етіп $\mu(L) := \frac{b}{a}$ санын аламыз және $\mu(L)$ санының аргументінің жартысын $\theta \in \mathbb{R} \backslash (\pi\mathbb{Z})$ деп белгілейік.

Сонда

$$\mu(L) = \left|\frac{b}{a}\right| e^{i2\theta}$$

Көңіл аударатын жағдай: L бағытты сақтаса, онда $\mu(L) \in D$, D – бірлік дөңгелек. Сондай-ақ, L голоморфты сонда, тек қана сонда егер $b = 0$ немесе $\mu(L) = 0$ болса.

Енді

$$E(L) := L^{-1}(D)$$

деп алайық. Егер $\mu(L)=0$ болса, онда $E(L)$ эллипс, дербес жағдайда дөңгелек болады. $E(L)$ эллипсті анықтау үшін $a=|a|e^{i\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}\backslash(2\pi\mathbb{Z})$, $\mu=\mu(L)$ деп алып, L- ң түрін қайта жазайық:

$$L(z)=|a|e^{i\alpha}z+|\mu a|e^{iarg(\mu\alpha)}\bar{z}=|a|e^{i\alpha}(z+|\mu|e^{i2\theta}\bar{z})$$

Осылайша, L – бұл

$$S(z)=|a|e^{i\alpha}(z+|\mu|e^{i2\theta}\bar{z})$$

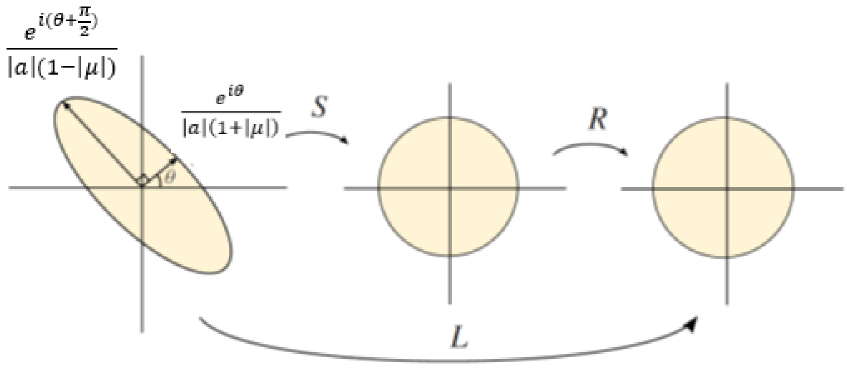
сызықтық картаның $R(z)=e^{i\alpha}z$ айналу көмегімен құрастырылған. $\{1; i\}$ базис бойынша S матрицаның түрі мынадай болады:

$$Mat_{\{1;i\}}(S)=\begin{pmatrix} |a|(1+|\mu|cos(2\theta)) & |a||\mu|sin(2\theta)) \\ |a||\mu|sin(2\theta)) & |a|(1-|\mu|cos(2\theta)) \end{pmatrix}$$

Дербес жағдайда бұл матрица симметриялы болатыны анық. Сондықтан L –ді өзара түйіндес сызықтық түрлендіру және ортогональ түрлендіру деп екіге бөлуге болады. Осылайша, S −ң екі нақты меншікті мәндері бар және егер $b\neq 0$ болса, онда олардың сәйкес меншікті векторлары ортогональ болады.

Матрицаның анықтауышын есептеу арқылы $|a|(1+|\mu|)$, $|a|(1-|\mu|)$ меншікті мәндеріне сәйкес $e^{i\theta}$ және $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ меншікті векторларын аламыз.

Осылайша, $E(S)$ эллипс болады, оның үлкен жарты өсі $e^{i(\theta+\frac{\pi}{2})}$ бағыты бойынша $\frac{1}{|a|(1-|\mu|)}$ тең, кіші жарты өсі $e^{i\theta}$ бағыты бойынша $\frac{1}{|a|(1+|\mu|)}$ тең. $E(L)$ эллипсі $E(S)$ эллипсі болады, себебі $R(z)=e^{i\alpha}z$ айналдыруда бірлік шеңбер сақталады (2-сурет).



Сурет 2. $E(S)=\ E(L)$ *эллипс*

Үлкен өстің кіші өске қатынасын L *кеңею* деп атап, $K(L)$ деп белгілейік:

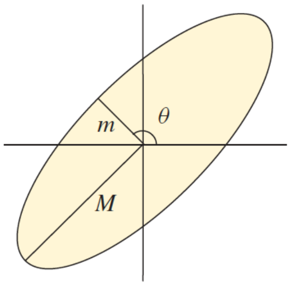
$$K(L)=\frac{1+|\mu|}{1-|\mu|}=\frac{|a|+|b|}{|a|-|b|}$$

L –дің күрделі кеңеюін $\mu(L)$ Бельтрами коэффициенті арқылы анықтаймыз. $K(L)$ кеңею эллипстің тек масштабын анықтайды, ал $\mu(L)$ эллипстің масштабы мен қоса өстердің бағытын да анықтайды.

Және керісінше, егер E эллипс берілсе, онда Бельтрами коэффициенті төмендегідей

$$\mu(E)=(M+m)/(M-m)e^{i2\theta}$$

формула арқылы табылады. Мұнда M, m - E эллипстің сәйкес үлкен және кіші жарты өстері, θ- кіші жарты өстің бағытының $[0;\pi)$ аралықтан алынған аргументі (3-сурет).



Сурет 3. E эллипс берілсе, онда Бельтрами коэффициенті M, m арқылы табылады; көңіл бөліңіз: θ аргументі $[0;\pi)$ аралықтан алынады

Айталық, $U \subset \mathbb{C}$ және $TU = \bigcup_{u\in U} T_u U$ - бұл $u \in U$ нүктелеріндегі жанама кеңістіктердің жиынтығы болсын. Олардың әрқайсысын $\mathbb{C}$ кеңістіктегі вектордың көшірмесі деп қарауға болады. Басқа сөзбен айтқанда әрбір $u \in U$ нүкте үшін белгілі масштабқа дейін анықталған $E_u \subset T_u U$ эллипс табылады, оның картасы

$$\mu: \quad \begin{aligned} U &\to D \\ u &\longmapsto \mu(u) \end{aligned}$$

Мұнда $\mu(u)$ арқылы E_u – дағы эллипстің Бельтрами коэффициенті белгіленген (E_u Лебег бойынша өлшемді болады). Әрбір шексіз аз эллипс $T_u U$ – да $\sigma(u)$ конформдық құрылымды анықтайды, яғни, $T_u U$ жанама кеңістікті $\mathbb{C}$ сызықты векторлық кеңістікке айналдырады. Егер комплекс құрылымды σ деп алсақ, онда

$$K(\sigma) = \operatorname*{ess\,sup}_{u\in U} K(u), \quad K(u) = \frac{1+|\mu(u)|}{1-|\mu(u)|}$$

E_u – ң кеңеюін береді. $K(\sigma) \in [1;\infty)$ екені анық.

Енді белгілі бір шарттарды қанағаттандыратын карталар арқылы комплекс құрылымды қалай алуға болатынын қарастырайық. Ол үшін $U, V \subset \mathbb{C}$ және $f: U \to V$ бағыт сақтайтын, үзіліссіз функциялардың класын - $D^+(U,V)$ қарастырамыз. Бұл функциялар барлық жерде дерлік дифференциалданады, әрі сингулярлы емес дифференциал $D_u f: T_u U \to T_{f(u)} V$ барлық жерде дерлік өлшемді. Біз жанама кеңістікпен жұмыс жасайтын болғандықтан шексіз аз $dz, d\bar{z}$ координаттарды пайдаланамыз. Сонда дифференциалды былай жазуға болады:

$$D_u f = \partial_z f(u) dz + \partial_{\bar{z}} f(u) d\bar{z},$$

Мұнда

$$\partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \ \partial_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Дифференциалдық геометрияның, механиканың (беттер теориясы, квазиконформды бейнелеулер, қабықшалар теориясы, газ динамикасы) кейбір есептері осы дифференциалмен тығыз байланыста. Бұл жұмыста қарастырылған теңдеудің коэффициенттерінің координаттар бас нүктесінде бірінші ретті полюстері бар. Сондықтан $L_p(U), p > 2$ класында жатпайды. Бұл теңдеулердің дифференциалдық геометрияда маңызды қолданыстары бар болғандықтан өзектілігі күмәнсіз. Зерттеу нәтижелері дифференциалдық теңдеулер және математикалық физиканың заманауи бағыттары арнасында.

Қорытынды

Бұл жұмыста тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң ақырсыз аз иілетін беттер теориясында және тығыздық нүктесі бар қисықтығы оң беттерде изометриялы түйіндес координаттарды құрастыруда туындайтын Бельтрами теңдеуі үшін қойылған шекаралық есеп қарастырылды. Дәлірек айтқанда, $G = \{z = re^{i\phi}: 0 \leq r < R, 0 \leq \phi \leq 2\pi,\ R > 0\}$ облыста берілген

$$\partial_{\bar{z}}V - \beta e^{2i\phi}\partial_z V + \frac{a(\phi)}{2\bar{z}}V + \frac{b(\phi)}{2\bar{z}}\bar{V} = 0$$

теңдеудің $C(G) \cap W_p^1(G), 1 < p < 2$ класта жататын және

$$\frac{\partial^n V}{\partial r^n}(0,\phi) = 0 \quad \left(n = \overline{1,(k-1)}\right)$$

$$|V(r,\phi)| = O(r^k), \qquad r \to \infty$$

$$V(r,0) = V(r,2\pi) = b_0 r^{\frac{\nu}{1-\beta}},\ \ 0 \leq r < \infty$$

шарттарды қанағаттандыратын үзіліссіз шешімі Ә.Б. Түнғатаровтың зерттеу әдісіне сүйеніп табылды.

Пайдаланылған дереккөздердің тізімі

[1] Векуа И. Н. Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988, 512c. https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=275914

[2] Боярский Б. В. // Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами", Матем. сб., 43(85) (1957), с.451–503. https://www.mathnet.ru/rus/sm5093

[3] Векуа И. Н. Системы дифференциальых уравнений эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек // Матем. сб.- 1952. –Т.31(73), № 2, с.234-314. https://www.mathnet.ru/rus/sm5531

[4] Блиев Н.К. Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах, –Алма-Ата. Наука, 1985, С.159 https://books.google.com/books/about/Obobshchennye_analiticheskie_funktsii_ v.html?id =LsWzzgEACAAJ

[5] Тунгатаров А.Б. Об одном способе построения непрерывных решений уравнения Карлемана-Векуа с сингулярной точкой //Дифференциальные уравнения. -1992. Т.28, №8, с.1427–1434. https://www.mathnet.ru/rus/de7889

[6] Усманов З. Д. О бесконечно малых изгибаниях поверхностей положительной кривизны с изолированной точкой уплощения // Матем.сб.- 1970. –Т.83(125):4(12), с.596-615. https://www.mathnet.ru/sm 3531

[7] Усманов З.Д. Бесконечно малые изгибания поверхностей положительной кривизны с точкой уплощения https://bibliotekanauki.pl/articles/719678.pdf

[8] Кац Д.Б. Показатели Марцинкевича и задача о скачке для уравнения Бельтрами // Известия вузов. Математика 2017, № 6, с. 44–51 http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm

[9] Akhmed-Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A. Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. –Azerbaijan. – 2012. –Vol. 3. –№ 1. – P. 3 - 10. https://www.naturalspublishing.com/download.asp?ArtcID=17372

[10] Kusherbayeva, U., Abduakhitova, G. On continuous solutions of the homogeneous Beltrami equation with a polar singularity // Complex Variables and Elliptic Equations, Pub Date: 2023-01-16 , https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17476933.2023.2164886

References

[1] Vekua İ. N. (1988) Obobщennye analiticheskie funktsii [Generalized Analytic Functions]. M.: Nauka, 512. (In Russian) https://urss.ru/cgi-bin/db.pl?lang=Ru&blang=ru&page=Book&id=275914

[2] Boyarskii B. V. (1957) Obobshhennye resheniya sistemy differentsialnyh uravnenii pervogo poryadka ellipticheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami [Generalized solutions of a system of first-order differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients], Matem. sb., 43(85) (1957), 451–503. (In Russian) https://www.mathnet.ru/rus/sm5093

[3] Vekua İ. N. (1952) Sistemy differentsialyh uravnenii ellipticheskogo tipa i granichnye zadachi s primeneniem k teorii obolochek [Systems of differential equations of elliptic type and boundary value problems with application to shell theory]. Matem. sb.- 1952. T.31(73), № 2, 234-314. (In Russian) https://www.mathnet.ru/rus/sm5531

[4] Bliev N.K. (1985) Obobщennye analiticheskie funktsii v drobnyh prostranstvah [Generalized analytic functions in fractional spaces], Alma-Ata. Nauka, 159 (In Russian) https://books.google.com/books/about/Obobshchennye_analiticheskie_funktsii_ v.html?id=LsWzzgEACAAJ

[5] Tungatarov A.B. (1992) Ob odnom sposobe postroeniya nepreryvnyh reshenii uravneniya Karlemana-Vekua s singulyarnoi tochkoi [On a method for constructing continuous solutions of the Carleman-Vekua equation with a singular point]. Differentsialnye uravneniya. 28, №8, 1427–1434. (In Russian) https://www.mathnet.ru/rus/de7889

[6] Usmanov Z.D. (1970) O beskonechno malyh izgibaniyah poverhnostei polojitelnoi krivizny s izolirovannoi tochkoi uploshheniya [On infinitesimal bendings of surfaces of positive curvature with an isolated point of flattening]. Matem.sb. T.83(125):4(12), 596-615. (In Russian) https://www.mathnet.ru/sm3531

[7] Usmanov Z.D. Beskonechno malye izgibaniya poverhnostei polojitelnoi krivizny s tochkoi uploshheniya [Infinitely small bendings of surfaces of positive curvature with a flattening point]. (In Russian) https://bibliotekanauki.pl/articles/719678.pdf

[8] Kats D.B. (2017) Pokazateli Martsinkevicha i zadacha o skachke dlya uravneniya Beltrami [Marcinkiewicz exponents and the jump problem for the Beltrami equation]. İzvestiya vuzov. Matematika, № 6, 44–51 (In Russian) http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm

[9] Akhmed-Zaki D.K., Danaev N.T., Tungatarov A. (2012) Elliptic systems in the plane with singular coefficients along lines // TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics. –Azerbaijan. – 2012. –Vol. 3. –№ 1. – P. 3 - 10. https://www.naturalspublishing.com/download.asp?ArtcID=17372

[10] Kusherbayeva, U., Abduakhitova, G. (2023) On continuous solutions of the homogeneous Beltrami equation with a polar singularity // Complex Variables and Elliptic Equations, Pub Date: 2023-01-16, https://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/17476933.2023.2164886