МРНТИ 27.39.19

10.51889/2959-5894.2024.86.2.007

Б.С. Кошкарова[1*], С.К. Бургумбаева[1], О.М. Жолымбаев[2]

[1]Евразийский национальный университет имени Л.Н. Гумилева, г. Астана, Казахстан
[2]Университет им. Шакарима г. Семей, Казахстан
[*]*e-mail: b-koshkarova@yandex.kz*

СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ T_1 И $П_1$ В ВЕСОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ЛЕБЕГА

Аннотация

Исследование свойств различного рода интегральных операторов в функциональных пространствах представляет собой интерес как с практической точки зрения в связи с многочисленными приложениями в физике, механике, гидродинамике, акустики и т.д., так и с теоретической точки зрения в связи с развитием таких областей математики, как теория функций и функциональный анализ, теория обобщенных аналитических функций, теория интегральных уравнений. В данной работе мы исследуем свойства двух интегральных оператора $\mathrm{T}_1 f$ и $\Pi_1 f$, заданных в единичном круге комплексной плоскости $\mathbb{R}^2$, где $f(z)$ комплекснозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$, в весовом пространстве Лебега. Интегральный оператор $\mathrm{T}_1 f$ потенциальный, а $\Pi_1 f$ – сингулярный оператор. Подобного рода интегральные операторы возникают в различных задачах гидродинамики. Для доказательства использовались методы теории функций и функционального анализа. Полученные утверждения расширяют ранее известные результаты.

Ключевые слова: интегральные операторы, весовое пространство Лебега, потенциальный оператор, сингулярный оператор.

Б.С. Кошкарова[1], С.К. Бургумбаева[1], О.М. Жолымбаев[2]
[1]Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университет, Астана қ., Қазақстан
[2]Шәкәрім атындағы Семей университеті, Қазақстан

ЛЕБЕГ КЕҢІСТІГІНДЕ T_1 ЖӘНЕ $П_1$ ИНТЕГРАЛДЫҚ ОПЕРАТОРЛАРДЫҢ ҚАСИЕТТЕРІ

Аңдатпа

Функциялық кеңістіктердегі интегралдық операторлардың әртүрлі түрлерінің қасиеттерін зерттеу физика, механика, гидродинамика, акустика және тағы басқа көптеген қолданыстарымен байланысты практикалық тұрғыдан да, сонымен қатар, функциялар теориясы және функционалдық анализ, жалпыланған аналитикалық функциялар теориясы, интегралдық теңдеулер теориясы сияқты салаларының дамуымен байланысты теориялық тұрғыдан да қызығушылық тудырады. Бұл жұмыста біз $\mathbb{R}^2$ комплексті жазықтықтың бірлік шеңберінде анықталған $\mathrm{T}_1 f$ және $\Pi_1 f$ екі интегралдық оператордың қасиеттерін салмақты Лебег кеңістігінде зерттейміз, мұндағы $f(z)$ $z = x + iy$ комплексті айнымалыдан тәуелді комплексмәнді функция болып табылады. $\mathrm{T}_1 f$ интегралдық оператор потенциалды, ал $\Pi_1 f$ – сингулярлы оператор. Мұндай типті интегралдық операторлар гидродинамикадағы әртүрлі есептерде пайда болуы мүмкін. Дәлелдеу үшін функциялар теориясы және функционалдық анализ әдістері қолданылды. Алынған тұжырымдар бұрын белгілі нәтижелерді кеңейтеді.

Түйін сөздер: интегралдық операторлар, салмақты Лебег кеңістігі, потенциалдық оператор, сингулярлы оператор.

B.S. Koshkarova[1], S.K. Burgumbaeva[1], O.M.Zholymbayev[2]
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2]Shakarim University, Semei, Kazakhstan

PROPERTIES OF INTEGRAL OPERATORS T_1 AND Π_1 IN WEIGHTED LEBEGUE SPACE

Abstract

The study of the properties of various kinds of integral operators in function spaces is the interest both from a practical point of view in connection with numerous applications in physics, mechanics, hydrodynamics, acoustics, etc., and from a theoretical point of view in connection with the development of such areas of mathematics as as theory of functions and functional analysis, theory of generalized analytic functions, theory of integral equations. In this work we study the properties of two integral operators $\mathrm{T}_1 f$ and $\Pi_1 f$, defined in the unit disk of the complex plane $\mathbb{R}^2$, where $f(z)$ is a complex-valued function of the complex variable $z = x + iy$, in the weighted Lebesgue space. The integral operator $\mathrm{T}_1 f$ is potential, and $\Pi_1 f$ is a singular operator. Integral operators of this kind arise in various problems of hydrodynamics. For the proof, methods of function theory and functional analysis were used. The obtained statements extend previously known results.

Keywords: integral operators, weighted Lebegue space, potential operator, singular operator.

Введение и основные положения

В данной работе мы рассматриваем интегральные операторы вида:

$$\mathrm{T}_1 f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}\, d\xi d\eta, \tag{1}$$

$$\Pi_1 f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^2}\, d\xi d\eta, \tag{2}$$

где $f(z)$ комплекснозначная функция комплексной переменной $z = x + iy$, G - круг единичного радиуса с центром в начале координат комплексной плоскости $E = R^2$.

Интегральные операторы типа (1) и (2) могут возникнуть в различных задачах гидродинамики. К примеру, в результате применения методов конформных отображений и теории обобщенных аналитических функций краевая задача со свободной границей, описывающая соударение двух струй идеальной несжимаемой жидкости различных радиусов и общей осью симметрии, приводит к эквивалентному интегральному уравнению вида

$$\rho(w) = \frac{\overline{\Pi\rho - \Pi_1\rho}}{D\rho + \sqrt{(D\rho)^2 + |\Pi\rho - \Pi_1\rho|^2}}(\Pi\rho - \Pi_1\rho) + \mathrm{T}_1\rho - 2\overline{\mathrm{T}_1\rho} - \overline{\Phi_0'(w)},$$

правая часть которого содержит интегральные операторы $\mathrm{T}_1 f$ и $\Pi_1 f$ [1].

Цель нашего исследования: изучить свойства интегральных операторов $\mathrm{T}_1 f$ и $\Pi_1 f$ в пространствах Лебега $L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$ с весом при различных соотношениях между параметрами p и α.

Исследование свойств различных интегральных операторов в функциональных пространствах представляет собой интерес, во-первых, с необходимостью использования их в многочисленных приложениях в механике, гидродинамике, физике и т.д., а во-вторых, с теоретической точки зрения для развития многих областей математики, таких как, теория функций и функциональный анализ, теория обобщенных аналитических функций, теория интегральных уравнений [2-6].

Как известно, интегральные операторы вида

$$\mathrm{T}f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, d\xi d\eta,$$

$$\Pi f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f(\zeta)d\xi d\eta}{(\zeta - z)^2},$$

заданные в некоторой области G комплексной плоскости, хорошо изучены. Оператор $\mathrm{T}f$ является потенциальным оператором, а Πf – сингулярным оператором, они играют основополагающую роль в теории обобщенных аналитических функций и ее приложениях.

Основные свойства данных операторов в обычных классах $L_p(\bar{G})$, $C^\alpha(\bar{G})$ были установлены И.Н. Векуа [7]. Н.К. Блиев обобщил результаты И.Н. Векуа на функции дробного пространства О.В. Бесова $B^\alpha_{p,\theta}$ при определенных соотношениях между параметрами p, α, θ, причем $1 < p \leq 2$ [8].

А. Игликов в работе [1] исследовал данные операторы в весовых пространствах Лебега $L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$ и Гельдера $C^{m,\mu}_{k,\lambda}(\bar{G})$ и получил теоремы, также обобщающие результаты И.Н. Векуа.

М. Отелбаев в работе [9] показал, что самым широким пространством, на которое может быть распространена теория И.Н. Векуа, является $\mathbb{P}_1(.)$, а среди всех симметричных пространств – пространство $\mathcal{L}(2,1)$ Лоренца.

Свойства интегральных операторов (1), (2) были ранее изучены Б.С. Кошкаровой в весовых пространствах Гельдера и в дробных пространствах О.В. Бесова [10].

Методология исследования

Для доказательства основных результатов мы используем методы теории функций и функционального анализа.

В данном разделе мы введем определение весового пространства $L_p(\overline{G};\rho^\alpha)$, введем весовую функцию и необходимые оценки и утверждения.

Определение [1]. Обозначим через $L_p(\overline{G};\rho^\alpha)$ *банахово пространство комплекснозначных функций* $f(z)$*, в котором норма элемента определяется равенством*

$$\|f\|_{L_p(\overline{G};\rho^\alpha)} \equiv \|f\|_{p,\rho} = \left(\iint_G \rho^\alpha |f(\zeta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \tag{3}$$

где весовая функция $\rho(\zeta, D)$ *есть неотрицательная непрерывная функция, обращающаяся в нуль на некотором множестве* D *точек области* $\overline{G}$.

Поскольку норма (3) для различных весов ρ эквивалентны между собой, то, без потери общности, можно в качестве весовой функции взять, например,

$$\rho(\zeta) \equiv \rho_t(\zeta) \equiv \rho(\zeta, t) = \inf|\zeta - t|, \zeta \in \overline{G}, t \in D. \tag{4}$$

Если $D = \emptyset$ – пустое множество, то будем считать, что $\rho(\zeta) \equiv 1$. В (3) α – некоторое постоянное действительное число. Для нас важен случай $0 < \alpha \leq 1$, что и будем предполагать.

Отметим, что если $f(\zeta) \in L_p(\overline{G};\rho^\alpha)$, то $\varphi(\zeta) = \rho^{\frac{a}{p}} f(\zeta)$, $f(\zeta) \in L_p(\overline{G})$ т.е. $f(\zeta)$ можно представить в виде

$$f(\zeta) = \rho^{-\frac{\alpha}{p}}\varphi(\zeta), \varphi(\zeta) \in L_p(\overline{G}). \tag{5}$$

причем

$$\|f\|_{p,\rho} = \|\varphi\|_p. \tag{6}$$

В процессе доказательства основных результатов мы будем опираться на различные оценки тех или иных интегралов по двумерной области.

Лемма 1 [7]. *Если* $\alpha < 2$, $\beta < 2$, *то справедлива оценка*

$$J(\alpha,\beta) = \frac{1}{\pi}\iint_G |\zeta - z|^{-\alpha}|\zeta - z_1|^{-\beta} dG_\zeta \le \begin{cases} M'_{\alpha,\beta}|z-z_1|^{2-\alpha-\beta}, \alpha+\beta>2 \\ M''_{\alpha,\beta}(G) + 8|\ln|z-z_1||, \alpha+\beta=2 \\ M'''_{\alpha,\beta}d^{2-\alpha-\beta}, \alpha+\beta<2 \end{cases} \quad (7)$$

Лемма 2 [7]. *Пусть неотрицательные числа* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ *удовлетворяют неравенствам* $\lambda_j < 2, f = 1,2,3$ *и* $\lambda_1 + \lambda_3 < 2, \lambda_2 + \lambda_3 < 2$. *Тогда справедлива оценка (G – ограниченная область)*

$$I(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3) = \iint_G |\zeta - z_1|^{-\lambda_1}|\zeta - z_2|^{-\lambda_2}|\zeta - z_3|^{-\lambda_3} dG_\zeta \le$$

$$\le \begin{cases} M'(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)|z_1 - z_2|^{2-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}, & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3>2, \\ M''(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,C)|\ln|z_1-z_2||, & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=2, \\ M'''(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,G), & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3<2. \end{cases} \quad (8)$$

где z_1, z_2, z_3, $z_1 \pm z_2$, *– произвольные точки конечной части плоскости, постоянная M' зависит только от* λ_j, $j = 1,2,3$, *а* M'' *– еще от области* G.

Пусть $f(z) \in L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$, $1 < p < \infty$, $0 \le \alpha < 1$, G – ограниченная область комплексной плоскости. Тогда с помощью неравенства Гельдера имеем

$$\iint_G |f(z)|^{p_1} dG_z = \iint_G (\rho^\alpha(z)|f(z)|^p)^{\frac{p_1}{p}} (\rho(z))^{-\frac{\alpha p_1}{p}} dG_z \le$$

$$\le \left[\iint_G \rho^\alpha(z)|f(z)|^p dG_z\right]^{\frac{p_1}{p}} \left[\iint_G (\rho(z))^{-\frac{\alpha p_1}{p-p_1}} dG_z\right]^{\frac{p-p_1}{p}} \le$$

$$\le M(p, p_1, \alpha, G)\|f\|^{p_1}_{p,\rho^\alpha}.$$

Отсюда видно, что $f(z) \in L_{p_1}(\bar{G})$, если числа p, α, p_1 связаны соотношением

$$0 \le \frac{\alpha p_1}{p - p_1} < 2 \text{ или } p_1 < \frac{2p}{2+\alpha}.$$

Если $p > 1 + \frac{\alpha}{2}$, то всегда можно взять $p_1 > 1$.

Имеют место следующие утверждения.

Теорема A [1]. Если $f(z) \in L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$ *и* $p > 1 + \frac{\alpha}{2}$, $0 \le \alpha < 1$, G *– ограниченная область, то функция* $T(f/z)$ *имеет обобщенные производные по* z *и* $\bar{z}$, *причем*

$$\frac{\partial \mathrm{T}f}{\partial \bar{z}} = f(z), \frac{\partial \mathrm{T}f}{\partial z} = \Pi f.$$

Теорема B [1]. Пусть $f(z) \in L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$ *и* $p > 1 + \frac{\alpha}{2}$, $0 \le \alpha < 1$, G *– ограниченная область. Тогда* Πf *является линейным ограниченным оператором в пространстве* $L_p(\bar{G}, \rho^\alpha)$ *и отображает это пространство в себя.*

Результаты исследования

Теорема 1. Пусть функция $f(z)\in L_p\left(\overline{G},\rho^{\alpha}\right)$, $1<p<\infty$ *и* $0\le\alpha<1$. *Тогда*

а) *если* $2+\alpha>p$, *то оператор* $\mathrm{T}_1 f\in L_{p_1}\left(\overline{G},\rho^{\beta}\right)$, *где* $1\le p_1<\infty$, *а параметр* β *удовлетворяют соотношению*

$$\frac{\beta+2}{p_1}>\frac{2+\alpha}{p}-1;$$

б) *если* $2+\alpha=p$, *то оператор* $\mathrm{T}_1 f\in L_{p_1}(G)$, *где* $1\le p_1<\infty$;

в) *если* $2+\alpha<p$, *то* $\mathrm{T}_1 f\in L_{p_1}(G)$.

Теорема 2. Пусть $f(z)\in L_p\left(\overline{G},\rho^{\alpha}\right)$, *и* $p>1+\dfrac{\alpha}{2}$, $0\le\alpha<1$. *Тогда* $\Pi_1 f$ *является линейным ограниченным оператором в пространстве* $L_p(\overline{G},\rho)$ *и отображает это пространство в себя.*

Дискуссия

Доказательство теорем. Доказательство теоремы 1.

В качестве весовой функции возьмем

$$\rho(\zeta,t)=|\zeta-t|. \tag{9}$$

Оператор $\mathrm{T}_1 f$ представляет собой аналитическую в G и непрерывную в $\bar{G}$ функцию, поэтому применяя принцип максимума модуля для аналитических функций, а также используя равенства (5), (6) и неравенство Гельдера, находим

$$\left|\mathrm{T}_1 f\right|=\frac{1}{\pi}\left|\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}}{1-\bar{\zeta}z}d\xi d\eta\right|\le\frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\iint_G\frac{\overline{f(\zeta)}}{z\left(\dfrac{1}{z}-\bar{\zeta}\right)}d\xi d\eta\right|=\frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\iint_G\frac{\overline{zf(\zeta)}}{\bar{z}-\bar{\zeta}}d\xi d\eta\right|\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\iint_G\frac{\rho^{-\frac{\alpha}{p}}|\varphi(\zeta)|}{|z-\zeta|}d\xi d\eta\le\frac{1}{\pi}\left(\iint_G|\varphi(\zeta)|^p d\xi d\eta\right)^{\frac{1}{p}}\left(\iint_G\frac{d\xi d\eta}{|\zeta-t|^{\frac{\alpha q}{p}}|\zeta-z|^q}\right)^{\frac{1}{q}}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\|\varphi\|_{L_p}\left(J\left(\frac{\alpha q}{p},q\right)\right)^{\frac{1}{q}}=\frac{1}{\pi}\|f\|_{L_{p,\rho}}\left(J\left(\frac{\alpha q}{p},q\right)\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{10}$$

где $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$, а интеграл J оценивается на основании (7) следующим образом [3]

$$J(\mu,\nu)\le M\begin{cases}|z-t|^{2-\mu-\nu} & при\quad \mu+\nu>2,\\ \left|\ln|z-t|\right| & при\quad \mu+\nu=2,\\ 1 & при\quad \mu+\nu<2.\end{cases} \tag{11}$$

Положим $\mu = \dfrac{\alpha q}{p}$, $\nu = q$, тогда

$$2-\mu-\nu = 2-\frac{\alpha q}{p} - q = 2-\frac{\alpha p}{p(p-1)} - \frac{p}{p-1} = \frac{p-2-\alpha}{p-1} \quad \text{и} \quad \left(2-\frac{\alpha q}{p} - q\right)/q = \frac{p-2}{p}.$$

Подставляя в (10) оценку (11), получим

$$|T_1 f| \le \frac{M}{\pi}\|f\|_{L_{p,\rho}} \begin{cases} |z-t|^{\frac{p-2-\alpha}{p}} & при \quad 2+\alpha > p, \\ \big|\ln|z-t|\big| & при \quad 2+\alpha = p, \\ 1 & при \quad 2+\alpha < p, \end{cases} \tag{12}$$

где постоянная M зависит от p и α только в первом случае. Отсюда при $2+\alpha > p$ имеем

$$\left(\iint_G \rho^{\beta} |\mathrm{T}_1 f|^{p_1} dxdy\right)^{\frac{1}{p_1}} \le C_1 \|f\|_{L_{p,\rho}} \left(\iint_G |z-t|^{\beta} |z-t|^{\frac{p_1(p-2-\alpha)}{p}} dxdy\right)^{\frac{1}{p_1}}. \tag{13}$$

Здесь интеграл будет конечен, если

$$\beta + \frac{p_1(p-2-\alpha)}{p} < -2,$$

$$\beta p + p_1(p-2-\alpha) + 2p < 0,$$

$$p(\beta+2) < p_1(p-2-\alpha),$$

$$\frac{\beta+2}{p_1} < \frac{p-2-\alpha}{p},$$

$$\frac{\beta+2}{p_1} < 1 - \frac{2+\alpha}{p},$$

т.е. при выполнении соотношения между параметрами

$$\frac{\beta+2}{p_1} > \frac{2+\alpha}{p} - 1, \tag{14}$$

тогда

$$\|\mathrm{T}_1 f\|_{L_{p_1,\rho}} \le C_1 \|f\|_{L_{p,\rho}}, \tag{15}$$

где C_1 по-прежнему зависит только от p и α.

Пусть теперь $2+\alpha = p$, тогда, учитывая оценку (12), получим

$$\left(\iint_G |\mathrm{T}_1 f|^{p_1} dxdy\right)^{\frac{1}{p_1}} \le \frac{M}{\pi}\|f\|_{L_{p,\rho}}\left(\iint_G \left(\ln|z-t|\right)^{p_1} dxdy\right)^{\frac{1}{p_1}} \le$$

$$\le \frac{M}{\pi}\ln 2\,\|f\|_{L_{p,\rho}}\left(\iint_G dxdy\right)^{\frac{1}{p_1}} = C_1\|f\|_{L_{p,\rho}}. \qquad (16)$$

т.е. оператор $T_1 f \in L_{p_1}\left(\overline{G}\right)$.

При $2+\alpha < p,$ выполнение оценки (16) очевидно.

Таким образом, теорема 1 доказана полностью.

Доказательство теоремы 2.

Здесь, как и при доказательстве теоремы 1, воспользуемся принципом максимума модуля для аналитических функций, а также равенством (6).

$$|\Pi_1 f| = \frac{1}{\pi}\left|\iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{\left(1-\overline{\zeta}z\right)^2} d\xi d\eta\right| \le \frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\iint_G \frac{\overline{f(\zeta)}}{z^2\left(\frac{1}{z^2}-2\frac{\overline{\zeta}}{z}+\overline{\zeta}^2\right)} d\xi d\eta\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\overline{\iint_G \frac{z^2 f(\zeta)}{(z-\zeta)^2} d\xi d\eta}\right| = \frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\iint_G \frac{z^2\varphi(\zeta)}{|\zeta-t|^{\frac{\alpha}{p}}(z-\zeta)^2} d\xi d\eta\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\frac{z^2}{|z-t|^{\frac{\alpha}{p}}}\left[\iint_G \frac{\varphi(\zeta)\left(|z-t|^{\frac{\alpha}{p}}-|\zeta-t|^{\frac{\alpha}{p}}\right)}{|\zeta-t|^{\frac{\alpha}{p}}(\zeta-z)^2} d\zeta d\eta + \iint_G \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\zeta d\eta\right]\right| =$$

$$= \frac{1}{\pi}\max_{z\in\Gamma}\left|\frac{z^2}{|z-t|^{\frac{\alpha}{p}}}\left[S\varphi+\Pi\varphi\right]\right|, \qquad (17)$$

где

$$S\varphi = \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(\zeta)\left(|z-t|^{\frac{\alpha}{p}}-|\zeta-t|^{\frac{\alpha}{p}}\right)}{|\zeta-t|^{\frac{\alpha}{p}}(\zeta-z)^2} d\xi d\eta\,,$$

$$\Pi\varphi = \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{\varphi(\zeta)}{(\zeta-z)^2} d\xi d\eta\,.$$

Оценка $S\varphi$ была получена в [4]

$$\iint_G |S\varphi|^p dK_z \le M_1 \iint_G |\varphi(\zeta)|^p |\zeta - t|^{\gamma} \left(|z-t|^{\frac{a}{q}-(a+\gamma)} |\zeta - z|^{-2+\frac{a}{p}} dK_z \right) dK_\zeta$$

выбирая γ так, чтобы $0<\gamma<2(p-1)$ и с помощью неравенства (2.6)

$$\iint_G |S\varphi|^p dK_z \le M_1^2 \iint_G |\varphi(\zeta)|^p dK_\zeta = M_1^2 \|\varphi\|_p^p$$

где постоянная $M_1 = M_1(a,p,\gamma)$ и не зависит от G и f.

Вернемся к (17)

$$\left(\iint_G |\Pi_1 f|^p |z-t|^{\alpha} d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{1}{\pi} \left(\iint_G \left(|S\varphi| + |\Pi\varphi|\right)^p d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Далее воспользуемся неравенством Минковского и (6)

$$\|\Pi_1 f\|_{L_p(K,\rho^\alpha)} \le \frac{1}{\pi} \left(\iint_G \left(|S\varphi| + |\Pi\varphi|\right)^p d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \left(\iint_G |S\varphi|^p d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} + \frac{1}{\pi} \left(\iint_G |\Pi\varphi|^p d\xi d\eta \right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \frac{1}{\pi} \|S\varphi\|_{L_p} + \frac{1}{\pi} \|\Pi\varphi\|_{L_p} \le$$

$$\le M_1 \|\varphi\|_{L_p} + M_2 \|\varphi\|_{L_p} = (M_1 + M_2) \|\varphi\|_{L_p} = M_3 \|f\|_{L_p(\overline{G},\rho^\alpha)},$$

т.е. $\Pi_1 f$ - линейный ограниченный оператор, отображающий $L_p(\overline{G},\rho^\alpha)$ в себя, что и требовалось доказать.

Заключение

Доказанные утверждения расширяют результаты А. Игликова, полученные им при исследовании операторов Tf и Πf , и могут быть использованы в теории интегральных уравнений, например, при исследовании разрешимости интегральных уравнений в весовых пространствах суммируемых функций, содержащих подобного рода интегральные операторы, а также в различных приложениях краевых задач для уравнений гидродинамики, акустики и т.д.

Список использованной литературы

[1] Игликов А., Кошкарова Б.С. Краевые задачи со свободной границей для систем уравнений движения несжимаемой идеальной жидкости. Вихревые кольца. – LAP LAMBERT Academic Publishing, 2022. – 270 с.

[2] Сетуха А.В. Метод интегральных уравнений в математической физике: учебное пособие. – Москва : Издательство Московского университета, 2023. – 316 с. – ISBN 978-5-19-011915-2 (e-book).

[3] Astala K. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane / K. Astala, G. Iwaniec, T. Martin. – Princeton University press, 2009. – 696 p. DOI: 10.1515/9781400830114

[4] Bliev N.K. Generalized analytic functions in fractional Spaces. – CRC Press, 1997. – 160 p.

[5] Bojarski B. General Beltrami equations and BMO / B. Bojarski, V. Gutlyanski, V. Ryazanov // Ukrainian Math. Bull. – 2008. – Vol. 5, No. 3. – P. 305-326. DOI: 10.1080/17476930903030069

[6] Monakhov V.N., Gubkina E.V. Solvability of nonlinear boundary value problems in fluid dynamics // Doklady Mathematics. – 2007. – Vol. 76 (1). – P. 611-613. https://doi.org/10.1134/S1064562407040333

[7] Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функции. – М: Наука, 1988. – 512 с.

[8] Блиев А.К. Обобщенные аналитические функции в дробных пространствах. – Алматы: Наука, 1985. – 160 с.

[9] Отелбаев М.О. К теории обобщенных аналитических функций Векуа. – В сб. «Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики». – Новосибирск, 1979. – С. 80-99.

[10] Кошкарова Б.С. Краевая задача со свободной границей для вырождающейся эллиптической системы уравнений гидродинамики / Дисс. на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук. – Караганда: КарГУ им. Е.А. Букетова, 2004. – 96 с.

References

[1] Iglikov A., Koshkarova B.S. (2022) Boundary value problems with a free boundary for systems of equations of motion of an incompressible ideal fluid. Vortex rings. [Boundary value problems with a free boundary for a system of equations of motion of an incompressible ideal fluid. Vortex rings LAP LAMBERT Academic Publishing, 270 c. (In Russian)

[2] Setukha A.V. (2023) The method of integral equations in mathematical physics: a textbook. [Method of integral equations in mathematical physics: textbook]. Moscow: Moscow University Press, 316 p. (In Russian)

[3] Astala K. Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane / K. Astala, G. Iwaniec, T. Martin. – Princeton University press, 2009. – 696 p. DOI: 10.1515/9781400830114

[4] Bliev N.K. Generalized analytic functions in fractional Spaces. CRC Press, 1997. 160 p.

[5] Bojarski B. General Beltrami equations and BMO / B. Bojarski, V. Gutlyanski, V. Ryazanov // Ukrainian Math. Bull. – 2008. – Vol. 5, No. 3. – P. 305-326. DOI: 10.1080/17476930903030069

[6] Monakhov V.N., Gubkina E.V. Solvability of nonlinear boundary value problems in fluid dynamics // Doklady Mathematics. – 2007. – Vol. 76 (1). – P. 611-613. https://doi.org/10.1134/S1064562407040333

[7] Vekua I.N. (1988). Generalized analytical functions [Generalized analytical functions]. Moscow: Nauka, 512. (In Russian)

[8] Bliev A.K. (1985) Generalized analytical functions in fractional spaces. [Generalized analytical functions in small spaces]. Almaty: Nauka, 160. (In Russian)

[9] Otelbaev M.O. (1979) On the theory of generalized analytical functions of Vecua. [K theory of generalized analytic functions Vequa]. In the collection "Application of functional analysis methods to problems of mathematical physics and computational mathematics". Novosibirsk, 80-99. (In Russian)

[10] Koshkarova B.S. (2004) Kraevaja zadacha so svobodnoj granicej dlja vyrozhdajushhejsja jellipticheskoj sistemy uravnenij gidrodinamiki [Boundary value problem with a free boundary for a degenerate elliptic system of equations of hydrodynamics}. Diss. on the job. learned. step. Candidate of Physical and Mathematical Sciences. Karaganda: E.A. Buketov KarSU, 96. (In Russian)