МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2024.85.1.005

Д.О. Тамабай[1,2*], Б.Т. Жумагулов[2]
[1]Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан
[2]Национальная инженерная академия Республики Казахстан, г.Алматы, Казахстан
[*]e-mail: dtamabay@gmail.com

УСТОЙЧИВОСТЬ ТРЕХШАГОВОЙ СХЕМЫ РАСЩЕПЛЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА В КОНТЕКСТЕ МЕТОДА КРУПНЫХ ЧАСТИЦ

Аннотация

В исследовании проанализированы вопросы устойчивости разностных методов типа "крупных частиц" для уравнений Навье-Стокса. Предложен модифицированный подход в виде трехшаговой схемы расщепления по физическим процессам, отличающийся от классической схемы использованием неявных разностных схем на первом и втором этапах. Показано, что этот подход эффективен для численной реализации и обеспечивает априорные оценки второй производной вектора скорости и градиента давления, что обеспечивает устойчивость схемы. Получены оценки устойчивости предложенной схемы, сформулирована соответствующая теорема. Результаты исследования подчеркивают важность предложенного подхода для более точного численного моделирования различных физических процессов. Рассмотреннная модифицированная схема расщепления по физическим процессам для уравнений Навье-Стокса может быть применена для различных вычислительных экспериментов и для моделирования физических процессов.

Ключевые слова: уравнение Навье-Стокса, метод конечных разностей, схема расщепления по физическим процессам, устойчивость, неявная схема.

Д.О. Тамабай[1,2], Б.Т. Жумагулов[2]
[1]Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, г. Алматы, Қазақстан
[2]Қазақстан Республикасының Ұлттық инженерлік академиясы, г. Алматы, Қазақстан

ІРІ БӨЛШЕКТЕР ӘДІСІ КОНТЕКСТІНДЕГІ НАВЬЕ-СТОКС ТЕҢДЕУЛЕРІ ҮШІН ҮШ САТЫЛЫ БӨЛІНУ СХЕМАСЫНЫҢ ОРНЫҚТЫЛЫҒЫ

Аңдатпа

Бұл зерттеуде Навье-Стокс теңдеулері үшін "ірі бөлшектер" типті айырымдық әдістерінің тұрақтылығы мәселесі талданады. Физикалық процестер бойынша үш сатылы бөлу схемасы түрінде өзгертілген тәсіл ұсынылды, ол бірінші және екінші кезеңдерде айқые емес айырымдық схемаларын қолданудың классикалық схемасынан ерекшеленеді. Бұл тәсіл сандық есептеу жағынан іске асырылу үшін тиімді және тізбектің тұрақтылығын қамтамасыз ететін жылдамдық векторы мен қысым градиентінің екінші туындысының априорлық бағалауын қамтамасыз етеді. Ұсынылған схеманың тұрақтылығынының бағалауы алынды, сәйкес теорема тұжырымдалды. Зерттеу нәтижелері әртүрлі физикалық процестерді дәлірек сандық модельдеу үшін ұсынылған тәсілдің маңыздылығын көрсетеді. Навье-Стокс теңдеулеріне арналған физикалық процестерді бөлудің қарастырылған модификацияланған схемасын әртүрлі есептеу эксперименттері үшін және физикалық процестерді модельдеу үшін қолдануға болады.

Түйін сөздер: Навье-Стокс теңдеуі, ақырлы айырымдық әдісі, физикалық процестердің бөліну схемасы, тұрақтылық, айқын емес схема.

D.O. Tamabay[1,2], B.T. Zhumagulov[2]
[1]Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[2]National Engineering Academy of Republic of Kazakhstan, Almaty, Kazakhstan

STABILITY OF THE THREE-STEP SPLITTING SCHEME FOR THE NAVIER-STOKES EQUATIONS IN THE CONTEXT OF THE LARGE PARTICLE METHOD

Abstract

In this study, the issues of stability of "large particle" type difference methods for the Navier-Stokes equations are analyzed. A modified approach is proposed in the form of a three-step splitting scheme for physical processes, which differs from the classical scheme by using implicit difference schemes at the first and second stages. It is shown that this approach is effective for numerical implementation and provides a priori estimates of the second derivative of the velocity vector and pressure gradient, which ensures the stability of the scheme. Estimates of the stability of the proposed scheme are obtained, and the corresponding theorem is formulated. The results of the study emphasize the importance of the proposed approach for more accurate numerical modeling of various physical processes. The considered modified splitting scheme for physical processes for the Navier-Stokes equations can be applied for various computational experiments and for modeling physical processes.

Keywords: Navier-Stokes equation, finite difference method, splitting scheme by physical processes, stability, the implicit scheme.

Введение

Для изучения двумерных задач гидродинамики вязкой несжимаемой жидкости широко используются уравнения Навье-Стокса в переменных скорость-давление.

На протяжении многих десятилетий для решения уравнений Навье-Стокса (N-S) разрабатывались различные численные методы, такие как методы конечных разностей [1,2], конечных элементов [3, 4] и конечных объемов [5, 6]. Один из наиболее распространенных и эффективных численных методов - метод конечных разностей (МКР) на разнесенных сетках, также известный как метод маркеров и ячеек (MAC) [7].

Метод конечных разностей на шахматных сетках был предложен Харлоу и Уэлш в 1960-х годах как устойчивая схема для несжимаемых потоков, активно применявшаяся в инженерных приложениях [8, 9]. Анализ сходимости МКР на разнесенных сетках был проведен для различных моделей несжимаемой жидкости, описываемых уравнениями N-S [10, 11].

В [12] работе представлена упрощенная техника MAC для расчетов потока несжимаемой жидкости. Авторы описывают метод, который использует маркеры и ячейки для эффективного моделирования поведения жидкости при сохранении массы и учете вязкости.

В [13] работе демонстрируется существование решения неявной схемы MAC для сжимаемых уравнений Навье-Стокса. Оценки погрешности для этой схемы выводятся на основе дискретной версии метода относительной энергии. Важно отметить, что оценка погрешности не требует предположений о стабильности численной схемы при ее реализации.

Николаидес и коллеги доказали сходимость порядка $O(h)$ для уравнений N-S как для завихренности, так и для давления [14]. Для скорости сходимость порядка $O(h^2)$ была доказана Самельсоном и соавторами [15], а для температуры - сходимость $O(h^4)$ [16]. Более того, оценка сходимости полностью дискретной схемы была получена для метода коррекции давления N-S, основанного на дискретизации по времени с чисто явным учетом нелинейных конвективных членов и МКР на шахматной сетке [17].

В обзорной статье рассмотрены три вида разностных схем, включая линейную неявную схему на разнесенной сетке по пространству, схему коррекции давления на разнесенной сетке и схему стабилизации давления [18]. Обзорная статья охватывает 157 источников литературы, посвященных весовым существенно неосцилирующим конечно-разностным схемам (WENO) [19]. Авторы разработали эффективный алгоритм реализации метода фиктивных областей для уравнений Навье-Стокса в областях со сложной геометрией [20, 21].

В работе [22] уравнение

$$\vec{u}^{n+1} + \tau\nabla_h P^{n+1} = \vec{u}^{n+1/2},$$

$$div_h \vec{u}^{n+1} = 0$$

путем введения новой переменной ψ-функция тока в узлах $(x_{1,i+1/2}, x_{2,j+1/2})$ приводится к уравнению для функции тока. Данный подход позволяет избежать решение задачи Неймана для давления.

В работе [23] рассматриваются итерационные методы с тремя параметрами, используемые для решения сеточных уравнений Навье-Стокса, описывающих течения вязкой несжимаемой жидкости. Основное внимание уделено анализу трехпараметрических итерационных методов, направленных на эффективное решение уравнений Навье-Стокса.

В ходе исследования были изучены вопросы устойчивости и сходимости разностных методов типа "крупных частиц" для уравнений Навье-Стокса. Предложен модифицированный подход – трехшаговая схема расщепления по физическим процессам. Основное отличие данной схемы от классической заключается в использовании на первом и втором шаге неявных разностных схем.

Этот подход является эффективным для численной реализации и обеспечивает априорные оценки второй производной вектора скорости и градиента давления, что обеспечивает устойчивость схемы. В работе получена оценка устойчивости предложенной трехшаговой разностной схемы расщепления по физическим процессам, сформулирована соответствующая теорема.

Методология исследования

Предположим, что область $\Omega \in R^2$ есть единичный квадрат. В области Ω рассмотрим систему уравнений Навье-Стокса

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V}\cdot\nabla)\vec{V} + \nabla p &= \nu\Delta\vec{V} + f, \\ div\ \vec{V} &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

со следующими начальными и краевыми условиями

$$\begin{gathered} \vec{V}(x_1, x_2, 0) = \vec{V}_0(x_1, x_2) \\ \vec{V}|_{\partial\Omega} = 0. \end{gathered} \tag{2}$$

Аппроксимация задачи

Аппроксимация задачи (1), (2) на шахматной сетке $\Omega_h = \Omega_{0h} \cup \Omega_{1h} \cup \Omega_{2h}$,

$$\begin{gathered} \Omega_{0h} = \{(x_{1i}, x_{2j}) | i = 1, \ldots, N_1, j = 1, \ldots, N_2; \\ x_{1i} = ih_1, x_{2j} = jh_2, h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2\}, \\ \Omega_{1h} = \{(x_{1i+1/2}, x_{2j}) | i = 0, \ldots, N_1, j = 1, \ldots, N_2; \\ x_{1i+1/2} = (i + 1/2)h_1, x_{2j} = jh_2, h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2\}, \\ \Omega_{2h} = \{(x_{1i}, x_{2j+\frac{1}{2}}) | i = 1, \ldots, N_1, j = 0, \ldots, N_2; \\ x_{1i} = ih_1, x_{2j+1/2} = (j + 1/2)h_2, h_1 = 1/N_1, h_2 = 1/N_2\}, \end{gathered} \tag{3}$$

Как и в монографии [8], компоненты вектора скорости $\overleftarrow{V}$ определены в узлах сетки Ω_{1h} и Ω_{2h} соответственно, т.е. $u_{i+1/2,j} \in \Omega_{1h}$,$v_{i,j+1/2} \in \Omega_{2h}$ давление определено в Ω_{0h}.

Дифференциальные уравнения (1) аппроксимируются следующей разностной схемой с использованием метода интегро-интерполяции. Первое уравнение интегрируется по x_1 от $x_{1,i}$ до $x_{1,i+1}$; по x_2 от $x_{2,j-1/2}$ до $x_{2,j+1/2}$, второе уравнение аналогично по x_1 от $x_{1,i-1/2}$ до $x_{1,i+1/2}$; по x_2 от $x_{2,j}$ до $x_{2,j+1}$, а третье уравнение по x_1 от $x_{1,i-1/2}$ до $x_{1,i+1/2}$; по x_2 от $x_{2,j-1/2}$ до $x_{2,j+1/2}$.

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1}-u_{i+1/2,j}^{n}}{\tau}+\frac{1}{4h_1}[(u_{i+3/2,j}^{n}+u_{i+1/2,j}^{n})^2-(u_{i+1/2,j}^{n}+u_{i-1/2,j}^{n})^2]+$$
$$+\frac{1}{4h_2}[(u_{i+1/2,j+1}^{n}+u_{i+1/2,j}^{n})(v_{i+1/2,j+1/2}^{n}+v_{i,j+1/2}^{n})-$$
$$-(u_{i+1/2,j}^{n}+u_{i+1/2,j-1}^{n})(v_{i+1,j-1/2}^{n}+v_{i,j-1/2}^{n})]+\frac{P_{i+1,j}^{n+1}-P_{i,j}^{n+1}}{h_1}=$$
$$=\nu(\frac{u_{i+3/2,j}^{n}-2u_{i+1/2,j}^{n}+u_{i-1/2,j}^{n}}{h_1^2}+\frac{u_{i+1/2,j+1}^{n}-2u_{i+1/2,j}^{n}+u_{i+1/2,j-1}^{n}}{h_2^2})+f_{ij}^{(1)}, \quad (4)$$

для $i=1,\dots,N_1-1, j=2,\dots,N_2-1$,

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1}-v_{i,j+1/2}^{n}}{\tau}+\frac{1}{4h_1}[(u_{i+1/2,j+1}^{n}+u_{i+1/2,j}^{n})(v_{i+1,j+1/2}^{n}+v_{i,j+1/2}^{n})-(u_{i-1/2,j+1}^{n}+$$
$$+u_{i-1/2,j}^{n})(v_{i,j+1/2}^{n}+v_{i-1,j+1/2}^{n})]+$$
$$+\frac{1}{4h_2}[(v_{i,j+3/2}^{n}+v_{i,j+1/2}^{n})^2-(v_{i,j+1/2}^{n}+v_{i,j-1/2}^{n})^2]+\frac{P_{i,j+1}^{n+1}-P_{i,j}^{n+1}}{h_2}=$$
$$=\nu(\frac{v_{i,j+3/2}^{n}-2v_{i,j+1/2}^{n}+v_{i,j-1/2}^{n}}{h_2^2}+\frac{v_{i+1,j+1/2}^{n}-2v_{i,j+1/2}^{n}+v_{i-1,j+1/2}^{n}}{h_1^2})+f_{ij}^{(2)}, \quad (5)$$

для $i=2,\dots,N_1-1, j=1,\dots,N_2-1$,

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1}-u_{i-1/2,j}^{n+1}}{h_1}+\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1}-v_{i,j-1/2}^{n+1}}{h_2}=0. \quad (6)$$

Для численной реализации разностной схемы (4)-(6) мы используем схему расщепления для физических процессов. Первая половина шага является неявной

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1/2}-u_{i+1/2,j}^{n}}{\tau}+L_{1h}(u^n,v^n)+(P_{ij}^{n})_{x_1}=\nu((u_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_1\bar{x}_1}+(u_{i+1/2,j}^{n})_{x_2\bar{x}_2})+f_{i+1/2,j}^{(1)},$$

для $i=1,\dots,N_1-1, j=2,\dots,N_2-1$,

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1/2}-v_{i,j+1/2}^{n}}{\tau}+L_{2h}(u^n,v^n)+(P_{ij}^{n})_{x_2}=\nu((v_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_1\bar{x}_1}+v_{i,j+1/2}^{n})_{x_2\bar{x}_2})+f_{i,j+1/2}^{(2)} \quad (7)$$

для $i=2,\dots,N_1-1, j=1,\dots,N_2-1$.

На втором полушаге решаются следующие уравнения

$$\frac{\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2}-u_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\tau}=\nu(\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}-\nu(u_{i+1/2,j}^{n})_{x_2,\overline{x}_2},$$

для $i=1,\dots,N_1-1, j=2,\dots,N_2-1,$

$$\frac{\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2}-v_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau}=\nu(\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}-\nu(v_{i,j+1/2}^{n})_{x_2,\overline{x}_2}, \qquad (8)$$

для $i=2,\dots,N_1-1, j=1,\dots,N_2-1.$

На третьем полушаге решаются следующие уравнения

$$\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1}-\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2}}{\tau}+(P_{ij}^{n+1}-P_{ij}^{n})_{x_1}=0$$

для $i=1,\dots,N_1-1, j=2,\dots,N_2-1,$

$$\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1}-\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2}}{\tau}+(P_{ij}^{n+1}-P_{ij}^{n})_{x_2}=0 \qquad (9)$$

для $i=2,\dots,N_1-1, j=1,\dots,N_2-1.$

$$div_h V^{n+1}=\frac{u_{i+1/2,j}^{n+1}-u_{i-1/2,j}^{n+1}}{h_1}+\frac{v_{i,j+1/2}^{n+1}-v_{i,j-1/2}^{n+1}}{h_2}=0. \qquad (10)$$

Схема расщепления (7)-(10) замыкается путем аппроксимации граничных условий (2). Граничные условия задаются на нижней границе

$$u_{i+1/2,1/2}^{n+1}=0, v_{i,1/2}^{n+1}=0, i=1,\dots,N_1. \qquad (11)$$

На левой границе дискретные граничные условия имеют вид

$$u_{1/2,j}^{n+1}=0, v_{1/2,j+1/2}^{n+1}=0, j=1,\dots,N_2. \qquad (12)$$

На верхней границе квадратной области

$$u_{i+1/2,N_2+1/2}^{n+1}=0, v_{i,N_2+1/2}^{n+1}=0, i=1,\dots,N_1. \qquad (13)$$

На правой границе граничные условия имеют вид

$$u_{N_1+1/2,j}^{n+1}=0, v_{N_1+1/2,j+1/2}^{n+1}=0, i=1,\dots,N_2. \qquad (14)$$

Априорная оценка решения разностной схемы

Априорная оценка решения разностной схемы (7)-(10) с граничными условиями (11)-(14). Из дробных шагов (7), (8) получаем соотношения, содержащие $\vec{V}^{n+1/2}$ и $\vec{V}^{n}$. Чтобы сделать это, мы суммируем первое уравнение (7) с первым уравнением (8), аналогично мы суммируем второе со вторым

$$\frac{\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2}-u_{i+1/2,j}^{n}}{\tau}+L_{1h}(u^n,v^n)+(P_{ij}^{n})_{x_1}=\nu[(u_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1}+(\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}]+f_{i+1/2,j}^{(1)} \qquad (15)$$

$$\frac{\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - v_{i,j+1/2}^{n}}{\tau} + L_{2h}(u^n, v^n) + (P_{ij}^n)_{x_2} = \nu[(v_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1} + (\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}] + f_{i,j+1/2}^{(2)}$$

Теперь из (8) мы находим

$$\begin{aligned} u_{i+1/2,j}^{n+1/2} &= \overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - \tau\nu(\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2} + \tau\nu(u_{i+1/2,j}^{n})_{x_2\overline{x}_2}, \\ v_{i,j+1/2}^{n+1/2} &= \overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - \tau\nu(\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2} + \tau\nu(v_{i,j+1/2}^{n})_{x_2\overline{x}_2}. \end{aligned} \tag{16}$$

В (15) вместо $u_{i+1/2,j}^{n+1/2}$ и $v_{i,j+1/2}^{n+1/2}$ подставим (16) и получим

$$\frac{\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2} - u_{i+1/2,j}^{n}}{\tau} + L_{1h}(u^n, v^n) + (P_{ij}^n)_{x_1} = \nu[(\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1} + (\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}] -$$

$$-\tau\nu^2((\overline{u}_{i+1/2,j}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1x_2\overline{x}_2}) - (u_{i+1/2,j}^{n})_{x_1\overline{x}_1x_2\overline{x}_2}) + f_{i+1/2,j}^{(1)}, \tag{17}$$

$$\frac{\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2} - v_{i,j+1/2}^{n}}{\tau} + L_{2h}(u^n, v^n) + (P_{ij}^n)_{x_2} = \nu[(\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1} + (\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_2\overline{x}_2}] -$$

$$-\tau\nu^2(\overline{v}_{i,j+1/2}^{n+1/2})_{x_1\overline{x}_1x_2\overline{x}_2}) - (v_{i,j+1/2}^{n})_{x_1\overline{x}_1x_2\overline{x}_2}) + +f_{i,j+1/2}^{(2)}. \tag{18}$$

Рассмотрим (17), (18) с начальными граничными условиями (11)-(14) и (2). В дальнейшем мы опускаем "линию" в (17), (18). Умножаем (17) на $2\tau u_{i+1/2,j}^{n+1/2}h_1$, (18) на $2\tau v_{i,j+1/2}^{n+1/2}h_1$ и суммируем на Ω_{1h} и Ω_{2h} соответственно, и в результате получаем

$$2 \parallel \vec{V}^{n+1/2} \parallel^2 - 2(\vec{V}^{n+1/2}, \overleftarrow{V}^n) + 2\tau(L_h\vec{V}^n, \vec{V}^{n+1/2}) +$$

$$+\tau(\nabla_h P^n, \vec{V}^{n+1/2}) + 2\nu\tau \parallel \delta_h \vec{V}^{n+1/2} \parallel^2 + \tau\nu^2(\parallel \vec{V}_{x\overline{x}}^{n+1/2} \parallel^2 - \parallel \vec{V}_{x\overline{x}}^{n} \parallel^2) + (f^n, \vec{V}^{n+1/2}). \tag{19}$$

В силу выражения

$$-2(\vec{V}^{n+1/2}, \vec{V}^n) = \parallel \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \parallel^2 - \parallel \vec{V}^{n+1/2} \parallel^2 - \parallel \vec{V}^n \parallel^2, \tag{20}$$

и леммы для нелинейных членов, доказанные в работе Темирбекова А.Н. [24], мы имеем

$$(L_h\vec{V}^n, \vec{V}^n) = 0. \tag{21}$$

С учетом (20) и (21), имеем:

$$\parallel \vec{V}^{n+1/2} \parallel^2 - \parallel \vec{V}^n \parallel^2 + \parallel \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \parallel^2 + 2\tau^2(L_h\vec{V}^n, \frac{\vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n}{\tau}) +$$

$$+2\tau(P^n, div_h\vec{V}^{n+1/2}) + \tau\nu^2(\parallel \vec{V}_{x\overline{x}}^{n+1/2} \parallel^2 - | \vec{V}_{x\overline{x}}^{n} \parallel^2) + 2\tau\nu \parallel \nabla_h\vec{V}^{n+1/2} \parallel^2 =$$

$$(f^n, \vec{V}^{n+1/2}) \tag{22}$$

Аналогично, умножая первое уравнение (9) на $2\tau u_{i+1/2,j}^{n+1}h_1$, второе уравнение на $2\tau v_{i,j+1/2}^{n+1}h_2$ и суммируя на Ω_{1h} и Ω_{2h} соответственно, получаем

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 - \| \vec{V}^n \|^2 + \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + 2\tau(\nabla(P^{n+1} - P^n), \vec{V}^{n+1}) = 0. \quad (23)$$

Просуммируем интегральные тождества (22), (23)

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 - \| \vec{V}^n \|^2 + \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 +$$

$$+2\tau^2(L_h \vec{V}^n, \frac{\vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n}{\tau}) + 2\tau(\nabla_h P^n, \vec{V}^{n+1/2}) + 2\tau(\nabla_h(P^{n+1} - P^n), \vec{V}^{n+1}) +$$

$$+2\tau\nu \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \tau\nu^2(\| \vec{V}^{n+1/2}_{x\bar{x}} \|^2 - | \vec{V}^n_{x\bar{x}} \|^2) = (f^n, \vec{V}^{n+1/2}) \quad (24)$$

Отдельно рассмотрим слагаемые, содержащие градиент давления.

$$2\tau(\nabla_h P^n, \vec{V}^{n+1/2}) + 2\tau(\nabla_h(P^{n+1} - P^n), \vec{V}^{n+1})$$

$$= -2\tau(\nabla_h P^n, \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}) + 2\tau(\nabla_h P^{n+1}, \vec{V}^{n+1}). \quad (25)$$

Из-за уравнения непрерывности второй член в правой части (25) равен нулю. Далее мы преобразуем

$$2\tau(\nabla_h P^n, \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}) = 2\tau(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}, -\nabla_h(P^{n+1} - P^n) + \nabla_h P^{n+1}) =$$

$$= 2\tau(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}, \frac{\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}}{\tau} + \nabla_h P^{n+1}) =$$

$$= 2 \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + 2\tau(\vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2}, \nabla_h P^{n+1}) =$$

$$= 2 \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + 2\tau^2(-\nabla_h(P^{n+1} - P^n), \nabla_h P^{n+1}) =$$

$$= 2 \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 - 2\tau^2(\nabla_h P^{n+1})^2 + 2\tau^2(\nabla_h P^n, \nabla_h P^{n+1}) =$$

$$= 2 \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 - 2\tau^2(\nabla_h P^{n+1})^2 - \tau^2 \| \nabla_h(P^{n+1} - P^n) \|^2 +$$

$$+\tau^2 \| \nabla_h(P^{n+1}) \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h(P^n) \|^2 =$$

$$= 2 \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 - \tau^2(\| \nabla_h(P^{n+1}) \|^2 - \| \nabla_h(P^n) \|^2) - \tau^2 \| \nabla_h(P^{n+1} - P^n) \|^2 =$$

$$= \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 - \tau^2(\| \nabla_h(P^{n+1}) \|^2 - \| \nabla_h(P^n) \|^2). \quad (26)$$

Подставляя (26) в (25)

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 - \| \vec{V}^n \|^2 + \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 +$$

$$\| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + 2\tau^2(L_h \vec{V}^n, \frac{\vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n}{\tau}) -$$

$$- \| \vec{V}^{n+1} - \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \tau^2(\| \nabla_h P^{n+1} \|^2 - \| \nabla_h P^n \|^2) +$$

$$+2\tau\nu \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \tau\nu^2(\| \vec{V}^{n+1/2}_{x\bar{x}} \|^2 - \| \vec{V}^n_{x\bar{x}} \|^2) = (f^n, \vec{V}^{n+1/2}). \quad (27)$$

Сократив те же слагаемые, мы получим следующее неравенство

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 + \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + 2\tau\nu \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^{n+1} \|^2 + \tau\nu^2(\| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1/2} \|^2) +$$

$$+2\tau^2 |(L_h \vec{V}^n, \frac{\vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n}{\tau})| \leq \| \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^n \|^2 + \tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^n \|^2 + \| f^n \|^2. \quad (28)$$

Для оценки нелинейных членов мы используем неравенство Коши-Буняковского

$$2\tau^2 |(L_h \vec{V}^n, \vec{V}_t^{n+1/2})| \leq \frac{3\sqrt{2}\tau^2}{h} \{\sum_{\Omega_h} [(u_{i+1/2,j}^n)^2 + (v_{i,j+1/2}^n)^2] h_1 h_2\}^{1/2} \| \vec{V}_t^{n+1/2} \| =$$

$$= \frac{3\sqrt{2}\tau^2}{h} \| \, |\vec{V}^n|^2 \| \cdot \| \vec{V}_t^{n+1/2} \|.$$

Значение $\| \, |\overleftarrow{V}^n|^2 \|$ оценивается следующим образом [25]

$$\| \, |\vec{V}^n|^2 \| \leq \sqrt{2} \| \vec{V}^n \| \cdot \| \nabla_h \vec{V}^n \|$$

Тогда

$$2\tau^2 |(L_h \vec{V}^n, \vec{V}_t^{n+1/2})| \leq \frac{6\tau^2}{h} \| \vec{V}^n \| \cdot \| \nabla_h \vec{V}^n \| \cdot \| \vec{V}_t^{n+1/2} \| \leq \frac{\tau^2}{2} \| \vec{V}_t^{n+1/2} \|^2 +$$

$$+ \frac{C_1^2}{2} (\frac{\tau}{h})^2 \cdot \| \vec{V}^n \|^2 \| \nabla_h \vec{V}^n \|^2. \quad (29)$$

Далее, на третьем этапе схемы расщепления (9) мы имеем

$$\vec{V}^{n+1/2} = \vec{V}^{n+1} + \tau\nabla(P^{n+1} - P^n) \quad (30)$$

Возьмем вторую производную от (30), тогда

$$\vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1/2} = \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1} + \tau\nabla(P_{x\bar{x}}^{n+1} - P_{x\bar{x}}^n) \quad (31)$$

Возводя в квадрат (31) и используя неравенство Юнга, имеем

$$\| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1/2} \|^2 \leq (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1} \|^2 + \tau(1 + \frac{1}{2\varepsilon}) \| \nabla(P_{x\bar{x}}^{n+1} - P_{x\bar{x}}^n) \|^2 \quad (32)$$

для произвольного $\varepsilon > 0$. Тогда из (28), (29) и (32) получаем

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 + \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + 2\tau \cdot \nu \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 - \frac{1}{2} \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 -$$

$$- \frac{C_1^2}{2} (\frac{\tau}{h})^2 \| \vec{V}^n \|^2 \cdot \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^{n+1} \|^2 + \tau\nu^2 (1 + \frac{\varepsilon}{2}) \| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1} \|^2 +$$

$$+ \tau^2\nu^2 (1 + \frac{1}{2\varepsilon}) \| \nabla(P_{x\bar{x}}^{n+1} - P_{x\bar{x}}^n) \|^2 \leq \| \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^n \|^2 + \tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^n \|^2 + \| f^n \|^2 \quad (33)$$

Далее, группируя похожие элементы, мы имеем

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 + \frac{1}{2} \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + 2\tau(\nu - \frac{C_1^2}{4}\frac{\tau}{h^2} \| \vec{V}^n \|^2) \| \nabla_h \vec{V}^{n+1/2} \|^2 +$$

$$+\tau^2 \| \nabla_h P^{n+1} \|^2 + \tau\nu^2(1+\frac{\varepsilon}{2}) \| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1} \|^2 + \tau^2\nu^2(1+\frac{1}{2\varepsilon}) \| \nabla_h(P_{x\bar{x}}^{n+1} - P_{x\bar{x}}^n) \|^2 \leq$$

$$\leq \| \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^n \|^2 + \tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^n \|^2 + \| f^n \|^2. \quad (34)$$

Результаты исследования

Предположим, что

$$\nu - \frac{C_1^2}{4}\frac{\tau}{h^2} \| \vec{V}^n \|^2 \geq 0. \quad (35)$$

Тогда мы получаем

$$\| \vec{V}^{n+1} \|^2 + \frac{1}{2} \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^{n+1} \|^2 + \tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^{n+1} \|^2 \leq$$

$$\leq \| \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^n \|^2 + +\tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^n \|^2 + \| f^n \|^2. \quad (36)$$

Суммируя n от 0 до m, мы имеем

$$\| \vec{V}^{m+1} \|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{m+1} \| \vec{V}^{n+1/2} - \vec{V}^n \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^{m+1} \|^2 +$$

$$+\tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^{m+1} \|^2 \leq \| \vec{V}^0 \|^2 + \tau^2 \| \nabla_h P^0 \|^2 + \tau\nu^2 \| \vec{V}_{x\bar{x}}^0 \|^2 + \sum_{n=0}^{m} \| f^n \|^2. \quad (37)$$

Таким образом, доказана

Теорема 1. Если выполняется условие (35), то для трехэтапной разностной схемы (7)-(10) выполняется априорная оценка (37).

Дискуссия

При выборе координатной сетки в виде (3) уравнение непрерывности аппроксимируется со вторым порядком точности с помощью h везде в $\Omega_{1h} \cup \Omega_{2h}$, где $h = max(h_3, h_2)$.

Рассмотреннная модифицированная трехэтапная схема расщепления по физическим процессам для уравнений Навье-Стокса может быть применена для различных вычислительных экспериментов и для моделирования различных процессов. Благодаря внедрению дополнительного промежутого этапа, была доказана устойчивость разностной схемы с получением оценки для второй производной вектора скорости и для градиента давления.

Заключение

В настоящей статье были подробно рассмотрены проблемы устойчивости разностных методов, применяемых для решения уравнений Навье-Стокса в контексте метода "крупных частиц". Основной акцент был сделан на трехшаговой схеме расщепления по физическим процессам, представляющей собой модификацию классической схемы расщепления с использованием неявных разностных схем на первом и втором этапах. Показано, что данный подход является эффективным средством для численной реализации, а также для получения априорных оценок второй производной вектора скорости и градиента давления, обеспечивая при этом устойчивость трехэтапной разностной схемы.

Полученные результаты исследования подчеркивают значимость предложенного подхода для более точного численного моделирования различных физических процессов.

Благодарности

Данное исследование финансируется Комитетом науки Министерства высшего образования и науки Республики Казахстан (грант № BR18574148 "Развитие геоинформационных систем и мониторинга объектов окружающей среды").

Список использованных источников

[1] Fasel H. Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier – Stokes equations // Journal of Fluid Mechanics. – 1976, – Vol. 78, – № 2, pp. 355-383. https://doi.org/10.1017/S0022112076002486

[2] Li M., Tang T., Fornberg B. A compact fourth-order finite difference scheme for the steady incompressible Navier-Stokes equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1995, – Vol. 20, – № 10, – С. 1137-1151. https://doi.org/10.1002/fld.1650201003

[3] Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms // Springer Science & Business Media, - 2012. – Vol. 5. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5

[4] Glowinski R., Pironneau O. Finite element methods for Navier-Stokes equations // Annual review of fluid mechanics. – 1992, – Vol. 24, – № 1, – pp. 167-204. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.001123

[5] Dalal A., Eswaran V., Biswas G. A finite-volume method for Navier-Stokes equations on unstructured meshes //Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. – 2008, – Vol. 54, – № 3, – pp. 238-259. https://doi.org/10.1080/10407790802182653

[6] Boivin S., Cayré F., Herard J. M. A finite volume method to solve the Navier–Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes //International journal of thermal sciences. – 2000, – Vol. 39, – № 8, – pp. 806-825. https://doi.org/10.1016/S1290-0729(00)00276-3

[7] McKee S. et al. The MAC method // Computers & Fluids. – 2008, – Vol. 37, – № 8, – pp. 907-930. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.10.006

[8] Welch J. E. et al. The MAC method-a computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces // Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States), - 1965, – № LA-3425.

[9] Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids, - 1965, - Vol. 8, - pp. 2182-2189. https://doi.org/10.1063/1.1761178

[10] Kanschat G. Divergence-free discontinuous Galerkin schemes for the Stokes equations and the MAC scheme. // Int. J. Numer. Methods Fluids, -2008, -Vol. 56, - pp. 941-950. https://doi.org/10.1002/fld.1566

[11] Li J., Sun S. The superconvergence phenomenon and proof of the MAC scheme for the Stokes equations on non-uniform rectangular meshes // J. Sci. Comput. – 2015, - Vol. 65, - pp. 341-362. https://doi.org/10.1007/s10915-014-9963-5

[12] Amsden A. A., Harlow F. H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations // Journal of computational physics. – 1970, – Vol. 6, – № 2, – pp. 322-325. https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90029-X

[13] Gallouët T., Maltese D., Novotny A. Error estimates for the implicit MAC scheme for the compressible Navier–Stokes equations // Numerische Mathematik. – 2019, – Vol. 141, – pp. 495-567. https://doi.org/10.1007/s00211-018-1007-x

[14] Nicolaides R.A., Wu X. Analysis and convergence of the MAC scheme II. Navier-Stokes equations // Math. Comput. -1996, - Vol. 65, - pp. 29-44. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-96-00665-5

[15] Samelson R., Temam R., Wang C., Wang S. Surface pressure Poisson equation formulation of the primitive equations: numerical schemes. // SIAMJ. Numer. Anal. – 2003, - Vol. 41, - pp. 1163-1194. https://doi.org/10.1137/S0036142901396284

[16] Samelson R., Temam R., Wang C., Wang S. A fourth-order numerical method for the planetary geostrophic equations with inviscid geostrophic balance. // Numer.Math. – 2007, - Vol. 107, - pp. 669-705. https://doi.org/10.1007/s00211-007-0104-z

[17] Weinen E., Liu J.-G. Gauge method for viscous incompressible flows. // Commun. Math. Sci. -2003, - Vol. 1,- pp. 317-332. https://doi.org/10.4310/CMS.2003.v1.n2.a6

[18] Chen H., Sun Sh., Zhang T. Energy Stability Analysis of Some Fully Discrete Numerical Schemes for Incompressible Navier-Stokes Equations on Staggered Grids. // J. Sci. Comput. - 2017, – Vol. 75, – № 1, – pp. 427-456. https://doi.org/10.1007/s10915-017-0543-3

[19] Cheng J., Shu C.W. High order schemes for CFD a review. Chinese J.Comput. Phys. -2009, -Vol. 26.-

№ 5, -pp. 633-655. http://www.cjcp.org.cn/EN/Y2009/V26/I5/633

[20] Temirbekov A.N., Temirbekova L.N., Zhumagulov B.T. Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier- Stokes equations // Applied and Computational Mathematics, -2023, - Vol. 22(2), - pp. 172-188. https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172

[21] Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials and Continua. –2022, -Vol.73, - N.1.- pp.2035–2055. https://doi.org/10.32604/cmc.2022.027830

[22] Смагулов Ш., Данаев Н.Т., Темирбеков Н.М., Численное решение уравнений Навье-Стокса с разрывными коэффициентами // Препринт ВЦ СО АН СССР. Красноярск, -1989, - 21 с.

[23] Данаев Н.Т., Урмашев Б.А. Трехпараметрические итерационные схемы для решения сеточных уравнений Навье-Стокса // Proceedings of International Conference RDAMM -2001, - Vol. 6, - Pt. 2, Special Issue, - pp. 253-257.

[24] Temirbekov A.N., Danaev N.T.,Malgazhdarov E.A. Modeling of Polutants in the Atmosphere Based on Photochemical Reactions // Eurasian chemico-technological journal. The International Higher Education Academy of Sciences, - 2014, - Vol. 16,- № 1, - pp. 61-71. https://doi.org/10.18321/ectj170

[25] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. - М.: Наука, - 1970.

References

[1] Fasel H. Investigation of the stability of boundary layers by a finite-difference model of the Navier—Stokes equations // Journal of Fluid Mechanics. – 1976, – Vol. 78, – № 2, – pp. 355-383. https://doi.org/10.1017/S0022112076002486

[2] Li M., Tang T., Fornberg B. A compact fourth-order finite difference scheme for the steady incompressible Navier-Stokes equations // International Journal for Numerical Methods in Fluids. – 1995, – Vol. 20, – No. 10, – pp. 1137-1151. https://doi.org/10.1002/fld.1650201003

[3] Girault V., Raviart P. A. Finite element methods for Navier-Stokes equations: theory and algorithms // Springer Science & Business Media, - 2012. – Vol. 5. https://doi.org/10.1007/978-3-642-61623-5

[4] Glowinski R., Pironneau O. Finite element methods for Navier-Stokes equations // Annual review of fluid mechanics. – 1992, – Vol. 24, – № 1, – pp. 167-204. https://doi.org/10.1146/annurev.fl.24.010192.001123

[5] Dalal A., Eswaran V., Biswas G. A finite-volume method for Navier-Stokes equations on unstructured meshes //Numerical Heat Transfer, Part B: Fundamentals. – 2008, – Vol. 54, – № 3, – pp. 238-259. https://doi.org/10.1080/10407790802182653

[6] Boivin S., Cayré F., Herard J. M. A finite volume method to solve the Navier–Stokes equations for incompressible flows on unstructured meshes //International journal of thermal sciences. – 2000, – Vol. 39, – № 8, – pp. 806-825. https://doi.org/10.1016/S1290-0729(00)00276-3

[7] McKee S. et al. The MAC method // Computers & Fluids. – 2008, – Vol. 37, – № 8, – pp. 907-930. https://doi.org/10.1016/j.compfluid.2007.10.006

[8] Welch J. E. et al. The MAC method-a computing technique for solving viscous, incompressible, transient fluid-flow problems involving free surfaces // Los Alamos National Lab.(LANL), Los Alamos, NM (United States), - 1965, – № LA-3425.

[9] Harlow F.H., Welch J.E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface // Phys. Fluids, - 1965, - Vol. 8, - pp. 2182-2189. https://doi.org/10.1063/1.1761178

[10] Kanschat G. Divergence-free discontinuous Galerkin schemes for the Stokes equations and the MAC scheme. // Int. J. Numer. Methods Fluids, -2008, -Vol. 56, - pp. 941-950. https://doi.org/10.1002/fld.1566

[11] Li J., Sun S. The superconvergence phenomenon and proof of the MAC scheme for the Stokes equations on non-uniform rectangular meshes // J. Sci. Comput. – 2015, - Vol. 65, - pp. 341-362. https://doi.org/10.1007/s10915-014-9963-5

[12] Amsden A. A., Harlow F. H. A simplified MAC technique for incompressible fluid flow calculations // Journal of computational physics. – 1970, – Vol. 6, – № 2, – pp. 322-325. https://doi.org/10.1016/0021-9991(70)90029-X

[13] Gallouët T., Maltese D., Novotny A. Error estimates for the implicit MAC scheme for the compressible Navier–Stokes equations // Numerische Mathematik. – 2019, – Vol. 141, – pp. 495-567. https://doi.org/10.1007/s00211-018-1007-x

[14] Nicolaides R.A., Wu X. Analysis and convergence of the MAC scheme II. Navier-Stokes equations // Math. Comput. -1996, - Vol. 65, - pp. 29-44. https://doi.org/10.1090/S0025-5718-96-00665-5

[15] Samelson R., Temam R., Wang C., Wang S. Surface pressure Poisson equation formulation of the primitive equations: numerical schemes. // SIAMJ. Numer. Anal. – 2003, - Vol. 41, - pp. 1163-1194. https://doi.org/10.1137/S0036142901396284

[16] Samelson R., Temam R., Wang C., Wang S. A fourth-order numerical method for the planetary geostrophic equations with inviscid geostrophic balance. // Numer.Math. – 2007, - Vol. 107, - pp. 669-705. https://doi.org/10.1007/s00211-007-0104-z

[17] Weinen E., Liu J.-G. Gauge method for viscous incompressible flows. // Commun. Math. Sci. -2003, - Vol. 1,- pp. 317-332. https://doi.org/10.4310/CMS.2003.v1.n2.a6

[18] Chen H., Sun Sh., Zhang T. Energy Stability Analysis of Some Fully Discrete Numerical Schemes for Incompressible Navier-Stokes Equations on Staggered Grids. // J. Sci. Comput. - 2017, – Vol. 75, – № 1, – pp. 427-456. https://doi.org/10.1007/s10915-017-0543-3

[19] Cheng J., Shu C.W. High order schemes for CFD a review. Chinese J.Comput. Phys. -2009, -Vol. 26.- № 5, -pp. 633-655. http://www.cjcp.org.cn/EN/Y2009/V26/I5/633

[20] Temirbekov A.N., Temirbekova L.N., Zhumagulov B.T. Fictitious domain method with the idea of conjugate optimization for non-linear Navier- Stokes equations // Applied and Computational Mathematics, - 2023, - Vol. 22(2), - pp. 172-188. https://doi.org/10.30546/1683-6154.22.2.2023.172

[21] Temirbekov A., Zhaksylykova Z., Malgazhdarov Y., Kasenov S. Application of the fictitious domain method for Navier-Stokes equations. Computers, Materials and Continua. –2022, -Vol.73, - № 1.- pp.2035–2055. https://doi.org/10.32604/cmc.2022.027830

[22] Smagulov Sh., Danaev N.T., Temirbekov N.M. (1989) Chislennoe reshenie uravnenii Navie-Stoksa s razrivnimi koefficientami [Numerical solution of the Navier-Stokes equations with discontinuous coefficients]. Preprint of the CC SB of the USSR Academy of Sciences. Krasnoyarsk,21 p. (in Russian).

[23] Danaev N.T., Urmashev B.A. (2001) Trehparametricheskie iteracionnie shemi dlya resheniya setochnih uravnenii Nave_Stoksa. [Three-parameter iterative schemes for solving Navier-Stokes grid equations]. Proceedings of International Conference RDAMM Vol. 6, Pt. 2, Special Issue, pp. 253-257. (in Russian).

[24] Temirbekov A.N., Danaev N.T., Malgazhdarov E.A. Modeling of Polutants in the Atmosphere Based on Photochemical Reactions // Eurasian chemico- technological journal. The International Higher Education Academy of Sciences, - 2014, - Vol. 16, - № 1, - pp. 61-71. https://doi.org/10.18321/ectj170

[25] Ladyzhenskaya O.A. (1970) Mathematical problems of dynamics of a viscous incompressible liquid. [Mathematical problems of dynamics of viscous incompressible fluid]. M.: Nauka (in Russian).