Осы ретте Архимед заңының тек сұйықтықтарға ғана емес, сонымен қатар газдарға да қатысты екенін айта кеткен жөн. Әрбір дене өз салмағының, ауа ығыстырғандай шамасында салмағын жоғалтады. Бірақ бір тонна ағаш темірге қарағанда 15 еседей көп көлемді алып жатады. Сондықтан бір тонна ағаштың таза салмағы бір тонна темірдің салмағынан көп. Физикалық ойлаудың негізгі элементі-нақтылы материалдан дерексіз материалға көшу,сипатталып отырған құбылысты ойша көзге елестету қабілеті,сол құбылыс бақыланатын тәжірибе,өту шарты,осы шарттардың мүмкін өзгерістері т.с.с. Осыған орай оқушыларға аталған шарттарды жеңілдету үшін,оларды ойлау операцияларына үйрету керек және аталған құбылыстарды практикада қолдануды –өмірде кездесетін мысалдар арқылы түсіндірген дұрыс болар еді [5].

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Бижігітов Т., Парманбеков У., Избасарова М., Сембиева А. Жоғары сынып оқушыларының физика пәнінен алған теориялық білімдерін практикада қолдана білулеріне ықпалы // Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университетінің хабаршысы-2016.- №4 (64)-44б.*

2 *Башарұлы Р. Жалпы білім беретін мектептің 7-сыныбына арналған оқулық.-Алматы: Атамұра, 2017.-208 б.*

3 *Жиынтық бағалауға арналған әдістемелік ұсыныстар.Физика.7-сынып.-Астана:Педагогикалық шеберлік орталығы,2017.- 40б.*

4 *Слободецкий И.Ш., Орлов В.А. Всесоюзные олимпиады по физике.М:- Просвещение, 1982.-256с.*

5 *Чеботарева А.В. Оқушылардың физикадан орындайтын өзіндік жұмыстары.-А:Мектеп,1989.-154б.*

МРНТИ 41.03.15
УДК 521.1

М.Дж. Минглибаев[1], О.Б. Байсбаева[1]

[1] *Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г.Алматы, Казахстан*

ПОСТУПАТЕЛЬНО-ВРАЩАТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЯ ТРЕХОСНОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННЫМИ СЖАТИЯМИ ПРИ НАЛИЧИИ РЕАКТИВНЫХ СИЛ И МОМЕНТОВ

Аннотация

В работе исследуется поступательно-вращательное движение трехосного тела постоянной динамической формы и переменного размера и массы в нестационарном ньютоновском центральном поле тяготения. Выведены дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения трехосного нестационарного тела в относительной системе координат с началом в центре нестационарного сферического тела – математическая модель исследуемой проблемы. Оси собственной системы координат нестационарного трехосного тела направлены по главным осям инерции спутника, и предполагается, что в ходе эволюции их относительная ориентация остаются неизменными. Приведены аналитическое выражение силовой функций ньютоновского взаимодействия трехосного тела переменной массы и размера с сферическим телом переменного размера и массы. Получены уравнения поступательно-вращательного движения трехосного нестационарного тела в оскулирующих элементах при наличии реактивных сил и моментов.

Ключевые слова: трехосное нестационарное тело, переменная масса, реактивная сила.

Аңдатпа

М.Ж. Минглибаев[1], О.Б. Байсбаева[1]
[1] *әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан*

РЕАКТИВТІ КҮШТЕРМЕН МОМЕНТТЕР БАР КЕЗДЕГІ АЙНЫМАЛЫ СЫҒЫЛУЫ БАР ҮШӨСТІ ДЕНЕНІҢ ІЛГЕРІЛМЕЛІ-АЙНАЛМАЛЫ ҚОЗҒАЛЫСЫ

Мақалада өлшемі мен массасы айнымалы, тұрақты динамикалық пішіні бар үшөсті дененің бейстационар ньютондық орталық тартылыс өрісіндегі ілгерілмелі-айналмалы қозғалысы қарастырылады. Бейстационар сфералық дененің центрінен басталатын салыстырмалы координата жүйесінде үшөсті бейстационар шардың ілгерілмелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері қорытылып шығарылды - зерттеліп отырған мәселенің математикалық моделі алынды. Бейстационар үшөсті дененің өзіндік координаттар жүйесінің өстері жасанды серіктің бас өстерімен бағыттас және эволюция барысында олардың салыстырмалы бағдарлары өзгеріссіз қалады деп ұйғарылды. Массасы мен өлшемі айнымалы үшөсті денемен өлшемі мен массасы айнымалы сфераның арасындағы ньютондық тартылысын сипаттайтын күштік функциясының аналитикалық өрнегі келтірілді. Реактивті күштер мен моменттер болған кездегі оскуляциялаушы элементтерде бейстационар үшөсті дененің ілгерілмелі-айналмалы қозғалыс теңдеулері алынды.

Түйін сөздер: үшөсті бейстационар дене, айнымалы масса, реактивті күш.

Abstarct

TRANSLATIONAL-ROTATIONAL MOTION OF THE TRIAXIAL BODY WITH VARIABLE COMPRESSIONS IN THE PRESENCE OF REACTIVE FORCES AND MOMENTS

Minglibayev M.Zh. [1], *Baisbayeva O.B.* [1]
[1]*al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan*

In this paper we investigated the translational-rotational motion of a triaxial body of constant dynamic shape and variable mass and size in a non-stationary Newtonian central gravitational field. Differential equations of the translational-rotational motion of the triaxial non-stationary body in the relative coordinate system with the origin at the center of a non-stationary spherical body are derived. The axes of the own coordinate system of the non-stationary triaxial body are directed along the principle axes of inertia of the body and we assumed that in the course of evolution their relative orientation remains unchanged. An analytical expression for the force function of the Newtonian interaction of the triaxial body of variable mass and size with a spherical body of variable size and mass is given. In the presence of reactive forces and moments the equations of translational-rotational motion of a triaxial non-stationary body in osculating elements are obtained in the presence of reactive forces and moments.

Keywords: triaxial non-stationary body, variable mass, reactive force.

Введение. Как известно, реальные небесные тела нетвердые и неточечные, в процессе эволюции меняется их размеры, массы, формы и структуры [1-5]. В связи с этим становится актуальным создание математических моделей движения небесных тел с переменной массой, размерами, формой и структурой. Целью данной работы является исследование поступательно-вращательного движения нестационарных двух тел – сферическое тело и трехосное тело. При этом сферическое тело остается сферической телом, трехосное тело остается трехосным телом. В ходе эволюции трехосное тело, все время, имеет симметрию относительно трех взаимоперпендикулярных плоскостей. Но их массы, размеры и коэффициенты сжатия по трем осям инерции со временем меняются [5].

Физическая постановка задачи и допущения.

Рассмотрим частный случай поступательно-вращательного движения двух нестационарных тел взаимогравитирующих по закону Ньютона [5].

Пусть первое – сферическое тело со сферическими распределениями масс. Предположим, что его масса и радиус со временем меняется, при этом его динамическая форма сохраняется. Другими словами, тело все время остается сферическим телом, его эллипсоид инерции все время шаровое (одномерное). Допустим, что масса сферического тела изменяется изотропно, при этом реактивные силы и допольнительные вращательные моменты не появляются.

Пусть второе тело такое что, его эллипсоид инерции трехосное (трехмерное). Допустим, что масса, размеры и форма второго тело переменные. Исходные расположения главных осей инерции и центр инерции трехосного тела, в ходе эволюции остаются неизменными и направлены вдоль линии пересечения трех взаимоперпендикулярных плоскостей.

Итак, примем следующие допущения:

1. первое тело – шар со сферическим распределением масс, с переменной массой $m_1 = m_1(t)$ и с переменным радиусом $l_1^* = l_1^*(t)$. Его моменты инерции второго порядка одинаковы $A_1(t) = B_1(t) = C_1(t)$;

2. второе тело – спутник с переменной массой $m_2 = m_2(t) = m_2(t_0)m(t)$ обладает трехосным динамическим строением и характерным линейным размером $l_2^* = l_2^*(t) = l(t_0)\chi(t)$, t_0 - начальный момент времени. Оси собственной системы координат второго тела направлена по трем взаимоперпендикулярным плоскостям. Его моменты инерции второго порядка и коэффициенты сжатия по трем осям инерции переменные и меняются в одинаковом темпе

$$A_2 = A_2(t), \quad B_2 = B_2(t), \quad C_2 = C_2(t), \quad A_2 \geq B_2 \geq C_2 \ , \tag{1}$$

$$\varepsilon_A = \frac{A-B}{A} = \varepsilon_A(t); \qquad \varepsilon_B = \frac{B-C}{B} = \varepsilon_B(t); \qquad \varepsilon_c = \frac{C-A}{C} = \varepsilon_c(t), \tag{2}$$

где $m_j(t), l_j^*(t), A_j(t), B_j(t), C_j(t)$ известные заданные функции времени.

3. Динамическая форма второго тела трехосная. Его главные моменты инерции меняются в различных темпах

$$\frac{\dot{A}_2(t)}{A_2(t)} \neq \frac{\dot{B}_2(t)}{B_2(t)} \neq \frac{\dot{C}_2(t)}{C_2(t)} \tag{3}$$

и соответсвующие коэффициенты сжатия переменные.

4. Оси собственной системы координат второго тела совпадают с главными осями инерции и это положения все время сохраняется.

5. Массы и характерные размеры тел меняются разными удельными темпами

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)}, \qquad \frac{\dot{l}_1^*(t)}{l_1^*(t)} \neq \frac{\dot{l}_2^*(t)}{l_2^*(t)}. \tag{4}$$

6. Результирующая реактивная сила из-за переменности масс второго тела не равна нулю, её модуль и направления переменные и произвольные

$$\vec{F} \neq 0, \qquad u_\xi - \dot{\xi} \neq 0, \qquad u_\eta - \dot{\eta} \neq 0, \qquad u_\zeta - \dot{\zeta} \neq 0. \tag{5}$$

7. Дополнительные вращательные моменты второго тела из-за реактивных сил и переменностью геометрии масс не равняются нулю

$$\vec{M}_{O_2}^{(доп)} = \vec{M}_{O_2}^{(r)} + \frac{dJ}{dt}\vec{\omega} \neq 0. \tag{6}$$

Первая слагаемая порождена из-за результирующих реактивных сил и представляет собой главного момента $\vec{M}_{O_2}^{(r)}$ реактивных сил относительно точки O_2. Вторая слагаемая за счет того, что трехосное тело меняет геометрию масс, является в общем случае, телом переменного состава, где J представляет собой матрицу тензора инерции тела для точки O_2. Уравнения (6) была выведена используя уравнения движения тела переменного состава полученным А.П. Маркеевым в работе [4].

8. Ограничимся приближенным выражением силовой функции ньютоновского взаимодействия, включительно второй зональной гармоники

$$U \approx U_1 + U_2. \tag{7}$$

Уравнения движения в абсолютной системе координат. В принятых допущениях (1)-(7), уравнения поступательно-вращательного движения двух тел в абсолютной системе координат $O\xi\eta\zeta$ в рассматриваемой постановке имеют вид [4]

$$m_1\ddot{\xi}_1 = \frac{\partial U}{\partial \xi_1}, \qquad m_1\ddot{\eta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \eta_1}, \qquad m_1\ddot{\zeta}_1 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_1}, \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}(A_1 p_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}(B_1 q_1) = 0, \quad \frac{d}{dt}(C_1 r_1) = 0, \; A_1 = B_1 = C_1, \tag{9}$$

$$m_2\ddot{\xi}_2 = \frac{\partial U}{\partial \xi_2} + F_{\xi\, реак}, \qquad m_2\ddot{\eta}_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta_2} + F_{\eta\, реак}, \qquad m_2\zeta_2 = \frac{\partial U}{\partial \zeta_2} + F_{\zeta реак}, \tag{10}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A_2 p_2) - (B_2 - C_2)q_2 r_2 = M_{x_2} + M_{x_2}^{(доп)} \\
&\frac{dq_2}{dt}(B_2 q_2) - (C_2 - A_2) r_2 p_2 = M_{y_2} + M_{y_2}^{(доп)} \\
&\frac{d}{dt}(C_2 r_2) - (A_2 - B_2) p_2 q_2 = M_{z_2} + M_{z_2}^{(доп)},
\end{aligned} \tag{11}$$

$$M_{x_2} = \frac{\sin\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos\theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}\right] + \cos\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2}, \tag{12}$$

$$M_{y_2} = \frac{\cos\varphi_2}{\sin\theta_2}\left[\frac{\partial U}{\partial \psi_2} - \cos\theta_2 \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}\right] - \sin\varphi_2 \frac{\partial U}{\partial \theta_2}, \qquad M_{z_2} = \frac{\partial U}{\partial \varphi_2}. \tag{13}$$

Из условии (6) вытекает

$$M_{x_2}^{(\partial on)} = M_{x_2}^{(r)} + \dot{A}_2 p_2, \tag{14}$$

$$M_{y_2}^{(\partial on)} = M_{y_2}^{(r)} + \dot{B}_2 q_2, \tag{15}$$

$$M_{z_2}^{(\partial on)} = M_{z_2}^{(r)} + \dot{C}_2 r_2. \tag{16}$$

Здесь $A_2 = J_{x_2}, B_2 = J_{y_2}, C_2 = J_{z_2}$ - главные моменты инерции второго порядка и p_1, q_1, r_1 и p_2, q_2, r_2 - проекции угловой скорости вращательного движения тел на оси собственной системы координат, которые описываются кинематическими уравнениями Эйлера

$$\begin{aligned} p_i &= \dot{\psi}_i \sin\theta_i \sin\varphi_i + \dot{\theta}_i \cos\varphi_i, \\ q_i &= \dot{\psi}_i \sin\theta_i \cos\varphi_i - \dot{\theta}_i \sin\varphi_i, \\ r_i &= \dot{\psi}_i \cos\theta_i + \varphi_i, \quad i = 1,2, \end{aligned} \tag{17}$$

$\varphi_i, \psi_i, \theta_i$ - углы Эйлера.

Следует отметить, что реактивные силы и дополнительные моменты написаны для общего случае. В некоторых частных случаях они могут быть равным нулю. Как было отмечено выше, в выражении дополнительных моментов первая слагаемая порождена из-за результирующих реактивных сил. Вторая слагаемая за счет того, что трехосное тело меняет геометрию масс и является в общем случае телом переменного состава.

Полученные уравнения (8) – (17) полностью характеризует поступательно-вращательное движение двух нестационарных тел в абсолютной системе координат в рассматриваемой постановке. Уравнения вращательного движения нестационарного сферического тела в абсолютной системе координат (11) легко интегрируется. Теперь предпочтительно переход на относительную систему координат.

Уравнения движения в относительной системе координат. Переходим к относительной системе координат O_1xyz, с началом в центре сферического тела. Пусть координатные оси относительной системы координат параллельные к соответсвующим осям относительной системы координат.

Обозначим

$$x = \xi_2 - \xi_1, \quad y = \eta_2 - \eta_1, \quad z = \zeta_2 - \zeta_1. \tag{18}$$

Исходя из уравнения движения в абсолютной системе координат (8)-(17) получим уравнения поступательно-вращательного движения трехосного нестационарного тела в относительной системе координат O_1xyz в следующем виде

$$\mu(t)\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\mu_2}{m_2} F_{X_{2 реак}}, \quad \mu(t)\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\mu_2}{m_2} F_{Y_{2 реак}}, \quad \mu(t)\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\mu_2}{m_2} F_{Z_{2 реак}}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}(A(t)p) - (B(t) - C(t))qr = M_x + M_x^{(\partial on)}, \\ &\frac{d}{dt}(B(t)q) - (C(t) - A(t))rp = M_y + M_y^{(\partial on)}, \\ &\frac{d}{dt}(C(t)r) - (A(t) - B(t))pq = M_z + M_z^{(\partial on)}, \end{aligned} \tag{20}$$

где

$$\mu(t) = m_1(t)m_2(t)/(m_1(t) + m_2(t)) \tag{21}$$

- приведенная масса, $M_x^{(\partial on)} = M_{x_2}^{(\partial on)}$, $M_y^{(\partial on)} = M_{y_2}^{(\partial on)}$, $M_z^{(\partial on)} = M_{z_2}^{(\partial on)}$,

$$M_x^{(\partial on)} = M_x^{(r)} + \dot{A}p, \tag{22}$$

$$M_y^{(\partial on)} = M_y^{(r)} + \dot{B}q, \tag{23}$$

$$M_z^{(\partial on)} = M_z^{(r)} + \dot{C}r, \tag{24}$$

$$U \approx U_1 + U_2, \quad U_1 = \frac{fm_1 m_2}{R}, \quad R^2 = x^2 + y^2 + z^2, \tag{25}$$

$$U_2 = fm_1 \frac{A + B + C - 3I}{2R^3}, \quad A = A_2, \quad B = B_2, \quad C = C_2, \tag{26}$$

$$I = A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2, \tag{27}$$

где f - гравитационная постоянная, I - момент инерции нестационарного трехосного тела относительно вектора $\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{R}$-соединяющий центр масс двух тел, α, β, γ - косинусы углов образуемых прямой $\overrightarrow{O_1O_2}$ с центральными осями инерции нестационарного трехосного тела:

$$\alpha = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2x_2}), \quad \beta = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2y_2}), \quad \gamma = \cos(\vec{R} \wedge \overrightarrow{O_2z_2}), \tag{28}$$

$p = p_2$, $q = q_2$, $r = r_2$- проекции угловой скорости вращательного движения второго тела на оси собственной системы координат. Соответственно кинематические уравнения Эйлера перепишем в виде

$$\begin{aligned} p &= \dot{\psi} \sin\theta \sin\phi + \dot{\theta}\cos\phi, \\ q &= \dot{\psi} \sin\theta \cos\phi - \dot{\theta}\sin\phi, \\ r &= \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\phi}, \end{aligned} \tag{29}$$

$\varphi = \varphi_2, \psi = \psi_2, \theta = \theta_2$- углы Эйлера [1,4,5]. В рассматриваемой постановке полученные уравнения (19) – (29) полностью характеризует поступательно-вращательное движение нестационарного трехосного тела в поле притяжении нестационарного сферического тела в относительной системе координат с началом в центре сферического тела.

Уравнения движения в оскулирующих элементах. Уравнения (19) напишем в следующем виде

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -f\frac{m_1 + m_2}{R^3}x + bx + \frac{\partial V}{\partial x}, \\ \ddot{y} &= -f\frac{m_1 + m_2}{R^3}y + by + \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \ddot{z} &= -f\frac{m_1 + m_2}{R^3}z + bz + \frac{\partial V}{\partial z}, \end{aligned} \tag{30}$$

где

$$V = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}U_2 + \frac{1}{m_2}U_{реак} - \frac{1}{2}bR^2, \quad b = (m_1 + m_2)\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m_1 + m_2}\right), \tag{31}$$

$$U_{реак} = F_x x + F_y y + F_z z. \tag{32}$$

Уравнения (20) остаются без изменения

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A(t)p)-(B(t)-C(t))qr = M_x + M_x^{(доп)},\\
&\frac{d}{dt}(B(t)q)-(C(t)-A(t))rp = M_y + M_y^{(доп)},\\
&\frac{d}{dt}(C(t)r)-(A(t)-B(t))pq = M_z + M_z^{(доп)}.
\end{aligned}
\tag{33}
$$

Уравнения (20) с учетом выражения (22), (23), (24) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(A(t)p)-(B(t)-C(t))qr = M_x + M_x^{(r)} + \dot{A}p,\\
&\frac{d}{dt}(B(t)q)-(C(t)-A(t))rp = M_y + M_y^{(r)} + \dot{B}q,\\
&\frac{d}{dt}(C(t)r)-(A(t)-B(t))pq = M_z + M_z^{(r)} + \dot{C}r.
\end{aligned}
\tag{34}
$$

Окончательно дифференциальное уравнения вращательного движения трехосного нестационарного тела в относительной системе координат с учетом (33) и (34) имеют вид

$$
\begin{aligned}
&A(t)\frac{dp}{dt}-(B(t)-C(t))qr = M_x + M_x^{(r)},\\
&B(t)\frac{dq}{dt}-(C(t)-A(t))rp = M_y + M_y^{(r)},\\
&C(t)\frac{dr}{dt}-(A(t)-B(t))pq = M_z + M_z^{(r)}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Уравнения вращательного движения нестационарного трехосного тела в оскулирующих элементах (35) полностью совпадает с уравнением движения тела переменного состава, представленный в работе [4]. Проекции главного момента внешних сил M_x, M_y, M_z определяются для конкретной задачи отдельно.

Дальнейшее работа предполагает что, использую теорию возмущений можем получить решения уравнения (30), (35). Уравнения поступательно-вращательного движения нестационарного трехосного тела в оскулирующих элементах могут быть использованы для анализа динамической эволюции поступательно-вращательного нестационарного трехосного тела в гравитирующих системах.

Список использованной литературы:

1 *Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – М.: Наука, 1975. – 799 с.*

2 *Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - М.:МГУ им. Ломоносова, 1975. -308с.*

3 *Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение двух твердых тел: учебное пособие. - А.:ДКПО «Норд», 1996.-184с.*

4 *Маркеев А.П. Теоретическая механика. -М.: ЧеРо, 1999.- 572 с.*

5 *Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. Поступательное и поступательно-вращательное движение. - S: Lambert Academic Publishing, 2012. – 224 с*