ҒТАХР 27.31.17

10.51889/2959-5894.2024.87.3.007

П.Б. Бейсебай[1*], Ғ.Х. Мұхамедиев[2]

[1]Л.Н.Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университеті, Астана қ., Қазақстан
[2] С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан мемлекеттік университеті, Өскемен қ., Қазақстан
[*]*e-mail: beisebai@mail.ru*

«КОМПЛЕКС САН» ТАҚЫРЫБЫН БАЯНДАУДЫҢ БІР ӘДІСТЕМЕСІ

Аңдатпа

Жоғары оқу орнында оқытылатын математиканың көптеген салаларын меңгеруде комплекс сандардың қолданылуы бұл тақырыптың студенттерге мейлінше жетімді түрде баяндалуының өзектілігін көрсетеді. Ұсынылған мақалада авторлар жоғары оқу орнының оқытушыларына «Комплекс сан» тақырыбын білім алушыларға баяндаудың бір әдісін ұсынып, өз пікірлерімен бөліседі. Тақырыпты баяндау, нақты сандар жиынында шешуі болмайтын есептің мысалын келтіру арқылы, есептің шешімдерін іздеу облысын, тек нақты сандар өсінің нүктелерінің жиынымен ғана шектемей, тым болмаса декарттық жазықтықтың нүктелерінің, яғни нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынына дейін кеңейтудің қажеттілігін негіздеумен басталады. Сонан соң, нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынына нақты сандар жиынына тән қатынастардың тек қосу, көбейту және теңдік қатынастарын ғана енгізуге болатынын көрсету арқылы, нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынын нақты сандардан өзгеше сандар жиыны ретінде қарастырудың және оны, комплекс сандар жиыны деп атаудың қисынды болатыны негізделінеді. Одан кейін, комплекс сандар жиынын нақты сандар жиынының шынымен де кеңейтуі болатыны негізделінеді. Ол үшін комплекс сандар жиынының абсциссалар өсіне тиісті сандарынан тұратын ішкі жиынын, оған нақты сандар жиынына тән барлық қатынастарды енгізуге болатын жиын, яғни оны нақты сандар жиыны ретінде қабылдауға болатын жиын екені көрсетіледі. Кейіннен ординаталар өсі де, абсциссалар өсі тәрізді нақты сандар өсі болғанымен, комплекс сандар жиынының осы өске тиісті сандарынын тұратын ішкі жиыны нақты сандар жиыны ретінде қабылдауға болмайтыны жиын және оның нақты санмен жорамал бірліктің көбейтіндісі түрінде өрнектелінетін таза жорамал сандар жиыны болып табылатыны негізделінеді. Ақырында, жоғарыда келтірілген негіздемелер негізінде комплекс санның нақты сандар мен жорамал бірліктен тұратын алгебралық түрінде жазылуы қорытып шығарылады. Авторлар тақырыпты осылайша бірізді сипаттау желісімен баяндауды, тақырыптың материалдарының толық меңгеруілінуіне зор ықпалын тигізеді деген оймен ұсынады.

Түйін сөздер: комплекс сан, реттілік қатынас, үзіліссіздік аксиомасы, қосындылар, көбейтінділер, комплекс сандар жиыны

П.Б. Бейсебай[1], Г.Х. Мухамедиев[2]
[1] Евразийский национальный университет им. Л.Н.Гумилева, г.Астана, Казахстан
[2] Восточно-Казахстанский государственный университет им. С.Аманжолова,
г.Усть-Каменогорск, Казахстан

ОБ ОДНОЙ МЕТОДИКЕ ИЗЛОЖЕНИЯ ТЕМЫ «КОМПЛЕКСНОЕ ЧИСЛО»

Аннотация

Использование комплексных чисел при изучении многих разделов математики, преподаваемых в вузе, показывает важность изложения этой темы в максимально доступной для студентов форме. В представленной статье авторы делятся своим мнением с преподавателями вуза, предлагая один из способов подачи студентам темы «Комплексное число». По ходу изложения темы прежде всего приводится пример задачи, приводящей к необходимости расширения области поиска решения, не ограничивая ее только множеством точек оси действительных чисел, хотя бы до множества точек декартовой плоскости, т.е. до множества упорядоченных пар действительных чисел. Впоследствии, показав, что из правил сложения и умножения, отношении порядка и аксиомы непрерыности, присущих множеству действительных чисел, в множество упорядоченных пар действительных чисел можно ввести только правил сложения и умножения и отношения равенства, обосновывается, что множество упорядоченных пар действительных чисел логично рассматривать как множество чисел, отличных от действительных чисел и называть его множеством комплексных чисел. Затем, дается обоснование тому, что множества комплексных чисел действительно является расширением множества действительных чисел. Для этого показывается, что в подмножество множества комплексных чисел, состоящее из чисел принадлежащих оси абсцисс, является множеством, в которое можно ввести все отношения характерные для множества действительных чисел, то есть множеством, которого можно принять в качестве множество действительных чисел. Далее устанавливается, что подмножество множества комплексных чисел, состоящее из чисел принадлежащих оси ординат, хотя ось ординат, так же как и ось абсцисс, является осью действительных чисел, не может быть принятым в качестве множества действительных чисел и является множеством чисто мнимых чисел, то есть чисел представимых в виде произведения действительного числа и мнимой единицы. И в конце, на основе приведенных обоснований выводится алгебраическая форма комплексного числа. Авторы предлагают даную методику последовательного изложения темы, полагая, что она способствует полному усвоению ее материалов.

Ключевые слова: комплексное число, отношение последовательности, аксиома непрерывности, сложение, умножение, множество комплексных чисел

P.B. Beisebay [1], G.H. Mukhamediev [2]
[1]L.N. Gumilyov Eurasian National University, Astana, Kazakhstan
[2] S. Amanzholov East Kazakhstan State University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

ABOUT ONE METHOD OF PRESENTING THE TOPIC “COMPLEX NUMBER”

Abstract

The use of complex numbers in the study of many branches of mathematics taught at a university shows the importance of presenting this topic in the most accessible form for students. In this article, the authors share their opinions with university teachers, offering one way to present the topic “Complex Number” to students. In the course of presenting the topic, first of all, an example of a problem is given that leads to the need to expand the search area for a solution, not limiting it only to the set of points on the real number axis, at least to the set of points of the Cartesian plane, i.e. to the set of ordered pairs of real numbers. Subsequently, having shown that from the rules of addition and multiplication, the relation of order and the axiom of continuity inherent in the set of real numbers, only the rules of addition and multiplication and the relation of equality can be introduced into the set of ordered pairs of real numbers, it is substantiated that the set of ordered pairs of real numbers can be logically considered as the set of numbers other than real numbers and call it the set of complex numbers. Then, it is argued that the set of complex numbers is indeed an extension of the set of real numbers. To do this, it is shown that the subset of the set of complex numbers, consisting of numbers belonging to the abscissa axis, is a set into which all relations characteristic of the set of real numbers can be introduced, that is, a set that can be taken as the set of real numbers. It is further established that the subset of the set of complex numbers, consisting of numbers belonging to the ordinate axis, although the ordinate axis, like the abscissa axis, is the axis of real numbers, cannot be accepted as a set of real numbers and is a set of purely imaginary numbers, that is numbers representable as the product of a real number and an imaginary unit. And finally, based on the above justifications, the algebraic form of a complex number is derived. The authors propose this method of sequential presentation of the topic, believing that it contributes to the complete assimilation of its materials.

Keywords: complex number, sequence relation, continuity axiom, addition, multiplication, set of complex numbers.

Негізгі ережелер

Зерттеудің негізгі идеясы – комплекс сандар жиынын нақты сандар жиынының геометриялық кескіні болатын нақты сандар өсінің нүктелерінің жиынын жазықтық нүктелерінің, яғни нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынына дейінгі кеңейтілуі ретінде енгізу. Ол үшін нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынына нақты сандар жиынына тән қатынастардың тек қосу, көбейту және теңдік қатынастарын ғана енгізуге болатынын көрсету арқылы, нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынын нақты сандардан өзгеше сандар жиыны ретінде қарастырудың және оны, комплекс сандар жиыны деп атаудың қисынды болатыны негізделінеді. Сонан соң комплекс сандар жиынының абсциссалар өсіне тиісті сандарынан тұратын ішкі жиынын нақты сандар жиыны ретінде қабылдауға болатынын негіздеу арқылы, комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынының жалғастыруы болатыны негізделіне отырып, комплекс санның нақты сандар мен жорамал бірліктен тұратын алгебралық түрінде жазылуы қорытып шығарылады.

Кіріспе

Комплекс айнымалы функциялар теориясы математиканың, физиканың және жаратылыстану ғылымдарының барлық дерлік салаларында қолданылуы комплекс айнымалы функциялар теориясының аталған мамандықтар бойынша мамандар даярлаудағы зор маңызын көрсетеді. Комплекс айнымалы функциялар теориясы комплекс сан ұғымын енгізуден басталатындықтан, бұл ұғым математикалық талдау теориясының іргелі ұғымдарының бірі болып табылады. Сол себепті комплекс сандар ұғымын енгізудің білімгерлерге мейлінше жеткілікті түрде баяндалуы өзекті мәселелердің бірі болып танылады.

Жоғары оқу орындарының білімгерлеріне арналған оқулықтар мен оқу құралдарында комплекс сан ұғымы, негізінен, a,b нақты сандары мен квадраты минус бірге тең i – саны арқылы $a+bi$ түрінде жазылатын сан немесе нақты сандардың реттелінген жұбы ретінде анықталады.

Комплекс санның бірінші түрдегі анықтамасы қолданылатын оқулықтарда бұл анықтама, негізінен, келесі түрлерде беріледі:

- «Комплекс сан деп келесі өрнек арқылы анықталған санды айтады: $z=x+iy=x+yi$, мұндағы x пен y нақты сандар, ал $i=\sqrt{-1}$ жорамал бірлік деп аталады» [1];
- «$z=x+iy$ өрнегі түрінде берілген z саны комплекс сан деп аталады, мұндағы x және y - накты сандар, ал i -жорамал бірлік деп аталады және $i^2=-1$ немесе $i=\sqrt{-1}$ теңдіктерінен анықталады» [2];
- «Комплекс сан деп теңдік түсінігі мен арифметикалық амалдар төмендегі 1)-4) ережелермен анықталған, $x+yi$ (немесе $x+iy$) түріндегі өрнекті айтады» [3];
- «Комплекс сан деп $x+yi$ түріндегі өрнек аталады, мұндағы x, y – қандай да бір нақты сандар, i - жорамал бірлік деп аталатын квадраты –1-ге тең таңба» [4, 5].

Комплекс санның осындай түрлердегі анықтамаларына келер болсақ, біріншіден, санның квадраты дегеніміз сандардың көбейтіндісі, ал көбейту ережесі білімгер үшін, әзірше, тек нақты сандар жиынында енгізілген ереже, сондықтан, нақты сандар жиынында квадраты бірге тең сан, яғни i саны жоқ болғандықтан, «i санының квадраты» дегеннің білімгер үшін мағынасы болмайды. Екіншіден комплекс сан неге $a+bi$ түрінде қарастырылатыны беймәлім. Үшіншіден, $a+bc$ түріндегі өрнек білімгерге бұрыннан таныс, ол білімгер үшін a саны мен bc көбейтіндісінің қосындысы, сондықтан білімгер $a+bi$ өрнегін a саны мен bi көбейтіндісінің қосындысы деп түсінуі мүмкін, ал мұндай түсінік, қосу және көбейту ережелері, әзірше, тек нақты сандар жиынына тән ережелер болғандықтан, теріс түсінік болады.

Комплекс санның екінші түрдегі анықтамасы қолданылатын оқулықтарда бұл анықтама, негізінен, келесі түрлерде беріледі:

- «Комплекс сан – белгілі бір ретпен алынған z=(x,y), x,y∈R нақты сандар жұбы. R нақты сандар жиыны комплекс сандар жиынының бөлігі болып табылады. y=0 болғанда (x,0) арқылы белгілеу бізге x нақты санын береді» [6];
- «Комплекс сан - z=(x,y) түріндегі өрнек. Жорамал бірлік деп $z=\sqrt{-1}$ аталады» [7];
- «Комплекс сан – белгілі бір ретпен алынған a және b нақты сандар жұбы: α=(a,b).

Егер b=0 болса, онда сәйкес жұпты, $(a,0)=a$ деп ұйғара отырып қысқаша a арқылы белгілейміз» [8,9].

«Барлық комплекс сандардың С жиыны (комплекс жазықтық) теңдік қатынасы және - қосу және көбейту амалдары анықталған нақты сандардың барлық реттелінген жұптарының C:={z=(x,y): x,y∈R} жиыны ретінде анықталады» [10,11].

Комплекс санның осындай түрлердегі анықтамаларына келер болсақ, бұл анықтамаларда да комплекс сан неге сандар жұбы ретінде қарастырылатыны беймәлім, ол туралы айтылған күннің өзінде қандай негізде сандар жұбын сан деп атауға болатыны айтылмайды. Сонымен қатар тақырыпты баяндау барысында комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынының кеңейтілуі болатыны, яғни нақты сандар жиыны комплекс сандар жиынына ішкі жиын болатыны толық негізделмейді. Сол себепті, комплекс сан ұғымын бұлай енгізу оны білімгерлерге жетімді болатындай енгізілген деп айта алмаймыз.

Зерттеу әдіснамасы

Мақала авторлардың жоғары оқу орындарының студенттеріне комплекс айнымалы функциялар теориясы бойынша дәріс оқудағы көп жылдық тәжірибесі негізінде жазылған.

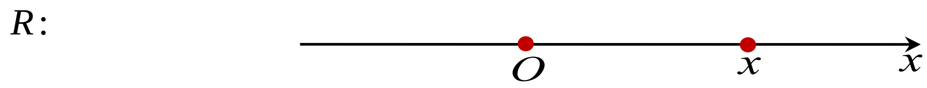
Тақырыпты баяндау бірнеше кезеңнен тұрады.

1. Нақты сандар жиынында шешімі болмайтын теңдеудің мысалын келтіру арқылы нақты сандар жиынын жаңа жиынға дейін кеңейту қажеттілігі негізделеді және нақты сандар жиынының, яғни Ox нақты сандар өсінің нүктелерінің жиынының кеңейтуі ретінде Oxy жазықтығының, яғни нақты сандардың реттелінген жұптарының жиыны алынады.
2. Нақты сандардың реттелінген жұптарының жиынына, нақты сандар жиынына тән қосу, көбейту ережелері мен реттілік қатынасының ішінен, тек қосу, көбейту ережелері мен теңдік қатынасын енгізу мүмкіндігін көрсетіліп, соның негізінде нақты сандардың реттелінген жұбын Oxy жазықтығының қандай да бір нүктесімен бейнеленген қандай да бір жаңа сан ретінде қарастыру қисынды болатыны негізделіп, ол санға, сандар жұбын сандар комплексі ретінде қарастыруға болатындықтан, комплекс сан атауы беріледі.
3. Мысал ретінде келтірілген нақты сандар жиынында шешімі болмайтын теңдеудің комплекс сандар жиынында шешімі бар болатынын көрсету арқылы, нақты сандар жиынын комплекс сандар жиынына дейін кеңейтудің орындылығы негізделеді.
4. Комплекс сандар жиынына енгізілген қосу, көбейту ережелерінің комплекс сандар жиынының Ox нақты сандар өсіне тиісті $(x,0)$ түріндегі сандарынан тұратын ішкі жиынында да қосу, көбейту ережелері болатынын көрсету және оған реттілік қатынасын енгізу арқылы, бұл ішкі жиынды нақты сандар жиыны ретінде қарастыруға болатыны көрсетіліп, $(x,0)=x$ теңдігі мен комплекс сандар жиынының нақты сандар жиынының шынында да кеңейтуі болатыны негізделеді.
5. «Ox нақты өсіне тиісті комплекс сандарын нақты сан ретінде қабылдауға болса, онда Oy нақты өсіне тиісті $(0,y)$ түріндегі сандарды да нақты сандар ретінде қабылдауға болтын шығар» деген жорамал тексеріліп, комплекс сандар жиынына енгізілген көбейту ережесінің комплекс сандар жиынының Oy өсіне тиісті сандарынан тұратын ішкі жиыныда көбейту ережесі болмайтыны, яғни $(0,y)$ саны нақты сан ретінде қабылданбайтыны көрсетіліп, бұл санға таза жорамал сан деген атау беріледі.
6. $(x,y)=(x,0)+(0,y), (x,0)=x$ және $(0,y)=y(0,1)$ кез келген (x,y) санының x,y нақты сандары мен жалғыз $(0,1)$ комплекс санынан тұратын $(x,y)=x+y(0,1)$ алгебралық өрнек түріндегі кескіні беріледі.

1 – кезең. Рационал және иррационал сандар нақты сандар жиынын құрайды. Бірақ кез келген алгебралық теңдеуді шешу үшін нақты сандар жеткіліксіз. Мысалы,

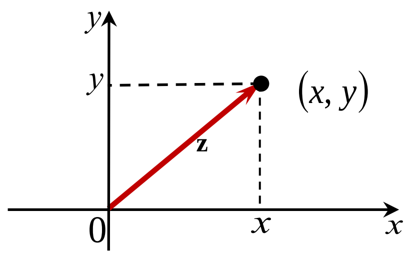
$$x^2+1=0$$

теңдеуінің нақты сандар жиынында түбірі жоқ. Сондықтан, нақты сандар жиынын $x^2+a^2=0$ түріндегі теңдеулердің шешімі болатындай жаңа жиынға дейін кеңейту қажеттілігі туындайды. Бізге Ox сан өсінің нүктелерінің жиыны R нақты сандар жиынының кескіні болатыны белгілі, яғни x нақты саны дегеніміз Ox сан өсінің x нүктесі болады (Сурет 1).



Сурет 1. Нақты сандар жиынының кескіні

Осы тұрғыдан, $x^2+1=0$ теңдеуінің түбірін табу дегеніміз - Ox сан өсінің осы теңдеуді қанағаттандыратын нүктесін табу деген сөз. Бірақ, бұл теңдеудің нақты сандар жиынында түбірі жоқ болғандықтан, Ox сан өсінде мұндай нүкте жоқ, басқаша айтсақ, Ox сан өсінде мұндай нүкте табылмайды. Олай болса мұндай нүктені Ox сан өсінен тыс іздеу керек, яғни нүктені іздеу облысын, оны тек Ox сан өсінің нүктелерінің жиынымен ғана шектемей, тым болмаса Oxy жазықтығының нүктелерінің жиынына дейін кеңейту керек. Сонымен, керек нүкте Oxy жазықтығының нүктесі ретінде ізделінетін болды. Негізінде біздің іздегеніміз сан, ал сандар тұрғысынан сан өсінің нүктесі мен жазықтықтың нүктесінің арасында елеулі айырмашылық бар: Ox өсінің нүктесі нақты санның кескіні болса, Oxy жазықтығының нүктесі нақты сандардың реттелген (x, y), $((x, y) \neq (y, x))$ жұбының кескіні болады (Сурет 2).



Сурет 2. Комплекс санның геометриялық кескіні

$2-$кезең. Демек, іздеп отырғанымыз сан болғандықтан, «Сандардың реттелген жұптарының $Z=\{(x, y): x, y \in R\}$ жиынын нақты сандар жиыны ретінде қабылдауға бола ма?» деген заңды сұрақ туады. Бұл сұраққа жауап беру үшін, алдымен, нақты сандар жиыны деп қандай жиын аталатынына тоқталайық.

Біріншіден, нақты сандар жиыны - қосу («+») амалы (ережесі) енгізілген жиын, яғни жиынның әрбір (a,b) қос элементіне төмендегі 1.1) – 1.4) шарттарын қанағаттандыратын a,b элементтерінің қосындысы деп аталатын осы жиынның $a+b$ элементі сәйкестікке қойылған жиын:

1.1) $a+b=b+a$ (қосу амалының коммутативтілігі);

1.2) $(a+b)+c=a+(b+c)$ (қосу амалының ассоциативтілігі);

1.3) $a+0=a$ теңдігі кез келген a элементі үшін орынды болатын жалғыз 0 элементі бар болады (қосынды бойынша бейтарап элементтің – нөлдің бар болуы);

1.4) әрбір a элементі үшін $a+u=O$ теңдігі орынды болатын жалғыз u элементі бар болады (қарама қарсы элементтің бар болуы).

R нақты сандар жиынының қосынды бойынша бейтарап элементі 0 саны, ал a санына қарама қарсы сан ($-a$) саны болады: $O=0, u=-a$.

Екіншіден, нақты сандар жиыны - көбейту («*») амалы (ережесі) енгізілген жиын, яғни жиынның әрбір (a,b) қос элементіне төмендегі 2.1) – 2.4) шарттарын қанағаттандыратын a, b элементтерінің көбейтіндісі деп аталатын осы жиынның $a \cdot b$ элементі сәйкестікке қойылған жиын:

2.1) $a \cdot b=b \cdot a$ (көбейту амалының коммутативтілігі);

2.2) $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (көбейту амалының ассоциативтілігі);

2.3) $a \cdot e = a$ теңдігі кез келген a элементі үшін орынды болатын жалғыз e элементі бар болады (көбейту бойынша бейтарап элементтің – бірдің бар болуы);

2.4) әрбір $a \neq 0$ элементі үшін $a \cdot v = e$ теңдігі орынды болатын жалғыз v элементі бар болады (кері элементтің бар болуы).

R нақты сандар жиынының көбейтінді бойынша бейтарап элементі 1 саны ($e = 1$), ал a санына кері сан $\frac{1}{a}$ саны болады: $e = 1, v = \frac{1}{a}$.

Үшіншіден, нақты сандар жиыны - реттілік («$\leq$ - кіші немесе тең») қатынасы енгізілген жиын, яғни жиынның әрбір a, b қос элементі үшін $a \leq b$ (a элементі b элементінен артық емес) немесе $b \leq a$ шарттарының тым болмаса бірі орындалатын жиын.

Төртіншіден, нақты сандар жиыны – үзіліссіздік аксиомасы енгізілген жиын, яғни жиынының бір ішкі жиынының кез келген элементі екінші бір ішкі жиынының кез келген элементінен артық емес болса, онда бірінші жиынның кез келген элементінен кіші болмайтын және екінші жиынның кез келген элементінен үлкен болмайтын элементі бар болатын жиын.

Сондықтан, $Z = \{(x, y) : x, y \in R\}$ жиынының нақты сандар жиыны ретінде қабылдануы үшін, оған қосу, көбейту амалдарын, реттілік қатынасын және үзіліссіздік аксиомасын енгізу қажет.

Қосу амалын енгізу

$Z = \{(x, y) : x, y \in R\}$ жиынына қосу амалы

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \tag{1}$$

теңдігімен енгізіледі.

$(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ элементінің $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$элементтерінің қосындысы болатындығы, яғни 1.1) – 1.4) шарттарын қанағаттандыратындығы, нақты сандардың өзімізге белгілі қосындылары арқылы өрнектелетіндігінен шығады.

Z жиынының (0,0) нөлдік элементі, ал (x, y) элементіне қарама қарсы элемент $(-x, -y)$ элементі болады:

$$O = (0,0);$$
$$-(x, y) = (-x, -y).$$

Көбейту амалын енгізу

$Z = \{(x, y) : x, y \in R\}$ жиынына көбейту амалы

$$(x_1, y_1) \times (x_2, y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1) \tag{2}$$

теңдігімен енгізіледі.

$(x_1 x_2 - y_1 y_2, x_1 y_2 + x_2 y_1)$ элементінің $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ элементтерінің көбейтіндісі болатындығы, яғни 2.1 – 2.4 шарттарын қанағаттандыратындығы, оның нақты сандардың көбейтінділері мен қосындылары арқылы өрнектелетіндігінен шығады.

Z жиынының бірлігі (1,0) элементі, ал $(x, y) \neq (0, 0)$ элементіне кері элемент $\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right)$ элементі болады: $e = (1,0);$

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2} \right), \ (x, y) \neq (0, 0).$$

Реттілік қатынасын (тең, кіші және үлкен ұғымдарын) енгізу

$(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ жұптары тең дейміз, егер олардың сәйкес сандары тең болса:

$$(x_1, y_1) = (x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 . \end{cases} \quad (3)$$

Кіші және үлкен ұғымдарына келер болсақ, Z жиынының элементтері үшін бұл ұғымдарды енгізу мүмкін емес екендігі дәлелденген.

Үзіліссіздік аксиомасы

Үзіліссіздік аксиомасы үлкен немесе кіші қатынастары арқылы берілетіндіктен, Z жиыны үзіліссіздік аксиомасын да енгізу мүмкін емес жиын болады.

Сонымен реттелінген сандар жұбының $Z = \{(x, y): x, y \in R\}$ жиыны тек қосу, көбейту ережелері мен теңдік қатынасы ғана тән жиын болатынын алдық. Олай болса, $Z = \{(x, y): x, y \in R\}$ жиынын нақты сандар жиыны ретінде қабылдауға болмайды.

Сондықтан, нақты сандардың реттелінген (x, y) жұбын Oxy жазықтығының қандай да бір нүктесімен бейнеленген қандай да бір жаңа сан ретінде қарастыру қисынды болады.

Негізі, бірдей объектілерден тұратын объект – объектілер комплексі (кешені) деп аталатындықтан, (x, y) жұбы нақты сандар комплексі (кешені) болады.Осы тұрғыдан, нақты сандардың (x, y) комплексін комплекс сан деп атау қисынды болады. Сонымен біз келесі ұғымға келдік.

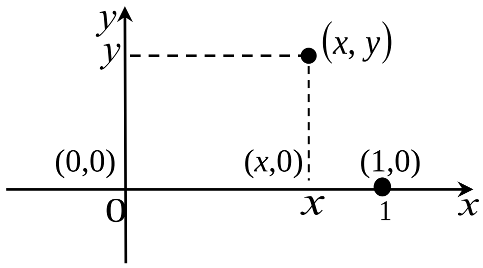
Анықтама. Комплекс сан деп нақты сандардың реттелінген жұбын айтамыз:

(x, y) – комплекс сан, $(x, y) \in R$. Тек қосу, көбейту амалдарымен теңдік қатынасы енгізілген нақты сандардың реттелінген жұбының $Z = \{(x, y): x, y \in R\}$ жиыны комплекс сандар (сандар комплекстерінің) жиыны болады.

3 – кезең. Комплекс сандар жиынын енгізуге түрткі болған мәселелердің бірі – нақты сандар жиынында $x^2 + 1 = 0$ теңдеуінің түбірінің болмауы. Енді комплекс сандар жиынында осы мәселенің шешімінің бар болуын қарастырайық. Ол үшін, алдымен, теңдеуді комплекс сандар тілінде жазып аламыз. $x^2 + 1 = 0$ теңдеуіндегі x нақты белгісізі мен 1 және 0 нақты тұрақтыларына, сәйкесінше (x, y) комплекс белгісізі мен $(1,0)$ және $(0,0)$ комплекс тұрақтыларына ауыстырамыз (Сурет 3):

$$(x, y)^2 + (1,0) = (0,0), \quad (4)$$

мұндағы $(x, y)^2 = (x, y) \cdot (x, y)$



Сурет 3. Комплекстік жазықтықтағы комплекс сандар бейнесі

(1) және (2) амалдарын қолдану арқылы (4) теңдеуін

$$(x^2 - y^2 + 1, 2xy) = (0,0)$$

теңдігіне келтіреміз.

Бұл теңдіктен, (3) тұжырымы бойынша

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ 2xy = 0 \end{cases}$$

жүйесіне келеміз.

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \text{ немесе } y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \text{ немесе} \begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

жүйесін шешеміз.

x – нақты сан болғандықтан, $x^2 + 1 = 0$ теңдеуінің шешімі жоқ, яғни $\begin{cases} x^2 + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ жүйесінің шешімі жоқ онда $\begin{cases} -y^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases}$ жүйесін қарастырайық:

$$\begin{cases} -y^2 + 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \text{ немесе } y = 1 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ x = 0 \end{cases} \text{ немесе} \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Демек, $(0,-1);(0,1)$ – теңдеудің шешімдері.

Сонымен біз нақты сандар жиынында шешімі жоқ квадрат теңдеудің комплекс сандар жиынында шешімдері болатынын алдық.

Бұл мысалдан біз нақты сандар жиынын комплекс сандар жиынына дейін кеңейтудің нақты сандар жиынында шешілмейтін мәселелерді шешуге мүмкіндік беретінін көреміз.

4 – кезең. Z комплекс сандар жиынының нақты сандар жиынының геометриялық бейнесі болып табылатын абсциссалар осінің нүктелері арқылы бейнеленетін $Z_{Ox} = \{(x,0) : x \in R\}$ ішкі жиынынын нақты сандар жиыны ретінде қарастыруға, яғни Z_{Ox} жиынына қосу, көбейту амалдары мен реттілік қатынасын енгізуге болмас па екен деген сұраққа тоқталайық.

Қосу және көбейту амалдарына келер болсақ, Z комплекс сандар жиынына қосу және көбейту ережелері (1) және (2) теңдіктерімен енгізілген.

Бұл қосу және көбейту ережелері $Z_{Ox} = \{(x,0) : x \in R\}$ жиынында қосу, көбейту ережелері болуы үшін, Z_{Ox} жиынының элементтерінің осы ережелермен анықталған $(x_1,0)+(x_2,0)$ қосындысы мен $(x_1,0)\cdot(x_2,0)$көбейтіндісі біріншіден, Z_{Ox} жиынына тиісті болулары, екіншіден, 1.1 – 1.4 және 2.1 – 2.4 шарттарын қанағаттандырулары қажет.

Қосу, көбейту ережелеріне қойылатын 1.4 және 2.1 – 2.4 шарттары комплекс сандар жиынында орынды болғандықтан, олар оның Z_{Ox} ішкі жиынында да орынды болады.

$(x_1,0)+(x_2,0)$ қосындысы мен $(x_1,0)\cdot(x_2,0)$ көбейтіндісінің Z_{Ox} жиынына тиістілігін тексерейік:

$$(x_1,0)+(x_2,0) = (x_1 + x_2,0) \in Z_{Ox};$$
$$(x_1,0)\cdot(x_2,0) = (x_1 \cdot x_2,0) \in Z_{Ox}.$$

$(x_1,0)+(x_2,0)$ қосындысы мен $(x_1,0)\cdot(x_2,0)$ көбейтіндісі Z_{Ox} жиынына тиісті болып шықты. Олай болса, Z_{Ox} жиыны – қосу және көбейту ережелері енгізілген жиын.

Реттілік қатынасына келер болсақ, $Z_{Ox} = \{(x,0) : x \in R\}$ жиынына $(x_1,0) \le (x_2,0) \Leftrightarrow x_1 \le x_2$ ережесімен енгізілген қатынас реттілік қатынасы болады.

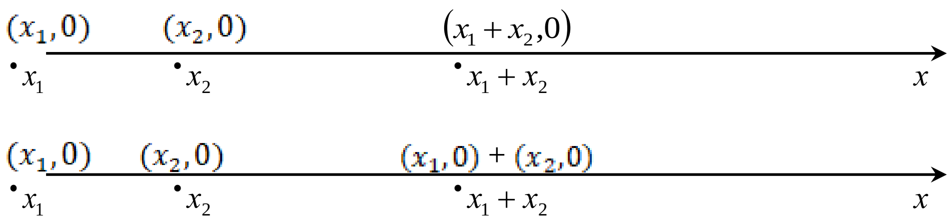
$(x_1,0)\le(x_2,0)$ реттілік қатынасы нақты сандар жиынындағы $x_1 \le x_2$ реттілік қатынасы арқылы берілгендіктен, нақты сандар жиынында орынды үзіліссіздік аксиомасы Z_{Ox} жиынында да орынды болады.

Сонымен, $Z_{Ox} = \{(x,0): x \in R\}$ жиыны қосу, көбейту амалдары мен реттілік қатынасы енгізілген және үзіліссіздік аксиомасы орынды жиын, яғни нақты сандар жиыны болып шықты.

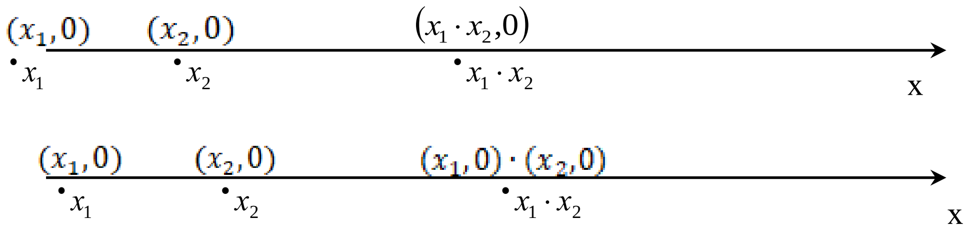
Енді R және Z_{Ox} нақты сандар жиыныдарын қосу, көбейту амалдары мен реттілік қатынасы тұрғысынан салыстырайық.

$x \to (x,0)$ бейнелеуі R жиынын Z_{Ox} жиынына өзара бірмәнді бейнелейді. $x_1 \to (x_1,0)$ және $x_2 \to (x_2,0)$ болсын.

Онда $x_1 + x_2 \to (x_1 + x_2,0)$ сәйкестігі мен $(x_1 + x_2,0) = (x_1,0) + (x_2,0)$ теңдігінен $x_1 + x_2 \to (x_1,0) + (x_2,0)$ сәйкестігі, яғни R жиынынң элементтерінің қосындысы мен Z_{Ox} жиынының оларға сәйкес элементерінің қосындысы Ox өсінің бір нүктесімен бейнеленетіні шығады.



Сол сияқты $x_1 \cdot x_2 \to (x_1 \cdot x_2,0)$ сәйкестігі мен $(x_1 \cdot x_2,0) = (x_1,0)\cdot(x_2,0)$ теңдігінен $x_1 \cdot x_2 \to (x_1,0)\cdot(x_2,0)$ сәйкестігі, яғни R жиынынң элементтерінің көбейтіндісі мен Z_{Ox} жиынының оларға сәйкес элементерінің көбейтіндісі Ox өсінің бір нүктесімен бейнеленетіні шығады.



Реттілік қатынастарына келер болсақ, $(x_1,0)\le(x_2,0) \Leftrightarrow x_1 \le x_2$ реттілік ережесінен R жиынының элементтерінің реттілігі олардың Z_{Ox} жиынындағы бейнелері үшін сақталатыны шығады.

Келтірілген қосындылар, көбейтінділер және реттіліктер сәйкестіктері негізінде $Z_{Ox} = R$ және $(x,0) = x$ деп ұйғаруға болады.

Онда $Z_{Ox} \subset Z$ болғандықтан, $R \subset Z$ қатынасы орынды болады.

5 – кезең. $Z_{Ox} = \{(x,0): x \in R\}$ жиыны нақты сандар өсінің нүктелерімен бейнелетін комплекс сандар жиынының жалғыз ішкі жиыны емес, комплекс сандар жиынының $Z_{Oy} = \{(0,y): y \in R\}$ ішкі жиыны да нақты сандар жиынының геометриялық бейнесі болып табылатын Оу ординаталар өсінің нүктелері арқылы бейнеленеді. Бұл жағдай, Z_{Ox} жиынына ұқсас, Z_{Oy} жиыны да, нақты сандар жиыны ретінде, яғни (1), (2) ережелері қосу, көбейту ережелері болатын және реттілік қатынасы $(0,y_1)\le(0,y_2)\Leftrightarrow y_1\le y_2$ ережесімен енгізілетін жиын ретінде қабылдауға болатын жиын болуы керек деген болжам туғызады.

Енді осы болжамның орындылығын қарастырайық. Жоғарыда айтылғандай, бұл болжам орынды болуы үшін Z_{Oy} жиынының кез келген екі $(0,y_1),(0,y_2)$ элементтерінің Z комплекс сандар жиынына (1) және (2) теңдіктерімен енгізілген қосу және көбейту ережелерімен анықталған $(0,y_1)+(0,y_2)$ қосындысы мен $(0,y_1)\cdot(0,y_2)$ көбейтіндісі Z_{Oy} жиынына тиісті болулары қажет.

$(0,y_1)+(0,y_2)$ қосындысы мен $(0,y_1)\cdot(0,y_2)$ көбейтіндісінің Z_{Oy} жиынына тиістілігін тексерейік:

$$(0,y_1)+(0,y_2)=(0,y_1+y_2)\in Z_{Oy};$$
$$(0,y_1)\cdot(0,y_2)=(-y_1\cdot y_2,0)\notin Z_{Oy};$$

$(0,y_1)\cdot(0,y_2)$ көбейтіндісі Z_{Oy} жиынына тиіссіз болып шықты. Олай болса, комплекс сандар жиынына енгізілген (2) көбейту ережесі оның Z_{Oy} ішкі жиынында көбейту ережесі бола алмайды да, Z_{Oy} жиыны нақты сандар жиыны ретінде қабылдана алмайды.

6 – кезең. Кез келген (x,y) комплекс саны $Z_{Ox}=\{(x,0):\,x\in R\}$ және $Z_{Oy}=\{(0,y):\,y\in R\}$ ішкі жиындарының элементтерінің қосындысына жіктеледі:

$$(x,y)=(x,0)+(0,y).$$

Бұл теңдіктен, $(0,y)=(y,0)\cdot(0,1)$, $(x,0)=x$ және $(y,0)=y$ теңдіктерін ескерсек, кез келген (x,y) комплекс санының жалғыз $(0,1)$ комплекс саны арқылы

$$(x,y)=x+y\cdot(0,1)$$

алгебралық өрнектелуін аламыз.

$(0,1)$ комплекс саны i әрпімен белгіленеді де, (x,y) комплекс санының $x+y\cdot i$ түрінде жазылуы, оның алгебралық пішіні деп аталады.

Комплекс санның алгебралық пішіні комплекс санға қолданылатын амалдарды жалғыз i комплекс санына жүргізу арқылы орындауға мүмкіндік береді.

Мысалға $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)$ көбейтіндісін сандардың алгералық пішіндеріне көшу арқылы есептесек

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1+y_1i)\cdot(x_2+y_2i)=x_1x_2+x_1y_2i+x_2y_1i+y_1y_2i^2=x_1x_2+(x_1y_2+x_2y_1)i+y_1y_2i^2$$

теңдігін аламыз.

Бұл теңдіктен комплекс сандардың көбейтіндісін табу үшін i^2 санының неге тең екенін білу жеткілікті болатынын көреміз.

Комплекс сандардың көбейтіндісінің анықтамасынан
$i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1$ болатыны шығады.

i^2 санының $i^2=-1$ мәнін алдыңғы теңдікке қойсақ, комплекс сандардың көбейтіндісінің өзімізге белгілі анықтамасын беретін
$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1x_2-y_1y_2)+(x_1y_2+x_2y_1)i=(x_1x_2-y_1y_2,\,x_1y_2+x_2y_1)$ теңдігін аламыз.

Зерттеу нәтижелері

Зерттеу нәтижесінде нақты сандардың реттелінген жиыны ретінде енгізілген комплекс сандар жиыны нақты сандар жиынының кеңейтілуі болатыны негізделініп, комплекс санның *x, y* нақты сандары мен жалғыз $(0,1)$ комплекс санынан тұратын $(x, y) = x + y(0,1)$ алгебралық өрнек түрінде жазылуы қорытылып шығарылды.

Дискуссия

Жұмыста ұсынылған әдістеме желісінде Л.Н. Гумилев атындағы Еуразия ұлттық университетінің жаратылыстану ғылымдары факультетінің бірінші курс студенттеріне «Комплекс сандар, оның модулі, аргументі, геометриялық кескіні, оларға қолданылатын амалдар» тақырыбында ашық дәріс өткізілді. Ашық сабақ «Жоғары математика» кафедрасының әдістемелік семинарында талқыланып, тақырыпты баяндаудың сабақта келтірілген баяндау әдістемесін, қазіргі оқулықтарда берілген дәстүрлі баяндау әдістемелеріне қарағанда жоғары оқу орындарының оқытушыларына тақырыпты білімгерге мейлінше ұғынықты болатындай етіп баяндаудың әдістемесі ретінде ұсынуға болады деген қорытынды жасалды.

Қорытынды

Авторлар «Комплекс сан» тақырыбын осылайша бірізді сипаттау желісімен баяндау әдістемесін білімгердің тақырыпты толық меңгеруіне зор ықпалын тигізеді деген оймен ұсынады. Аталған мақала авторлардың жоғары оқу орындарының студенттеріне комплекс айнымалы функциялар теориясы бойынша жылдап жиналған дәріс оқудағы тәжірибесі негізінде жазылғандықтан оқырмандардың, осы саладағы жұмыс жасайтын жас мамандардың өздігінен білімін тереңдетулеріне де көмегі болары сөзсіз.

Пайдаланылған дереккөздер тізімі

[1] Понарин Я.П. Алгебра комплексных чисел в геометрических задачах. Книга для учащихся математических классов школ, учителей и студентов педагогических вузов. - М.: МЦНМО, 2014. - 160 с. https://math.ru/lib/461

[2] Куранова Н.Ю. Теория комплексных чисел. Учебное пособие. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2021. – 172 с. http://op.vlsu.ru/fileadmin/Programmy/Magistratura/44.04.01/prof_ob_MATEM_i_INFORM/Metod_doc/Teorija _kompleksnykh_chisel.pdf

[3] Деменева Н.В. Комплексные числа. Сборник задач. – Пермь: ИПЦ «Прокростъ», 2016. – 32 с. http://pgsha.ru:8008›books/study/Деменева Н.В.

[4] Евсеев Н.А. Комплексные числа. Учебно-методическое пособие. – Новосибирск: Новосибирский государственный университет, 2015. – 119 с. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/ Complex_Numbers_Evseev.pdf

[5] Аруова А.Б., Аскарова А.Ж., Бейсебай П.Б. и др. Высшая математика. Учебное пособие. - Нур-Султан: Издательство Казахского агротехнического университета имени С.Сейфуллина, 2022. – 120 с. repository.kazatu.kz/xmlui/handle/123456789/1598

[6] Бейсебай П.Б. Математикалық талдаудың қосымша тараулары. Оқулық. - Астана: «Фолиант» баспасы, 2020. - 416 б. ISBN 978-601-338-186-2 https://www.flip.kz/catalog?prod=2138427&ysclid

[7] П.Б. Бейсебай П.Б., Асқарова А.Ж., Аруова А.Б. және басқалар. Жоғары математика. Оқу құралы. - Нұр-Сұлтан: С.Сейфуллин атындағы Қазақ агротехникалық университеті баспасы, 2022. - 90 б. https://repository.kazatu.kz/jspui/handle/123456789/1808

[8] Дубровин В.Т. Теория функций комплексного переменного. Учебное пособие. – Казань: Казанский государственный университет, 2015. — 102 с. https://kpfu.ru/docs/F1855528304/complex.pdf

[9] Акимов В.Н., Коновалова И.Н. Комплексные числа, комплексные векторы и их приложения. Учебное пособие. – Москва: Российский государственный медицинский университет, 2018. — 85 с. https://rsmu.ru/fileadmin/templates/DOC/Faculties/PF/Phys-mat

[10] Бейсебай П.Б., Мухамедиев Г.Х. Ерікті ретті тұрақты коэффициентті сызықтық біртекті дифференциалдық теңдеудің шешімдерінің фундаменталды жүйесін құру туралы // Казахский национальный педагогический университет имени Абая ВЕСТНИК Серия «Физико-математические науки» №2 (70), 2020 г. 49-53 б. (ISSN-L): 2959-5886, https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.07

[11] Li Y., Qiu H. Fractal Sets in the Field of p - Adic Analogue of the complex numbers. Fractals, Vol. 27, No. 04, 1950053 (2019), ISSN 0218-348X, https://doi.org/10.1142/S0218348X19500531

References

[1] Ponarin Ja.P. (2014) Algebra kompleksnyh chisel v geometricheskih zadachah [Algebra of complex numbers in geometric problems]. Kniga dlja uchashhihsja matematicheskih klassov shkol, uchitelej i studentov pedagogicheskih vuzov. M.: MCNMO, 160. https://math.ru/lib/46. (In Russian)

[2] Kuranova N.Ju. (2021) Teorija kompleksnyh chisel [Teorija kompleksnyh chisel]. Uchebnoe posobie. Vladimir.: Izd-vo VlGU, 172. http://op.vlsu.ru/fileadmin/Programmy/Magistratura/44.04.01/prof_ob_MATEM_i_INFORM/Metod_doc/Teorija_kompleksnykh_chisel.pdf. (In Russian)

[3] Demeneva N.V. (2016) Kompleksnye chisla [Complex numbers]. Sbornik zadach. Perm': IPC «Prokrost#»,. 32. http://pgsha.ru:8008›books/study/Demeneva N.V. (In Russian)

[4] Evseev N.A. (2015) Kompleksnye chisla [Complex numbers]. Uchebno-metodicheskoe posobie. Novosibirsk: Novosibirskij gosudarstvennyj universitet, 119. http://www.phys.nsu.ru/ok03/doc/Complex_Numbers_Evseev.pdf. (In Russian)

[5] Aruova A.B., Askarova A.Zh., Bejsebaj P.B. i dr. (2022) Vysshaja matematika [Higher Mathematics]. Uchebnoe posobie. Nur-Sultan: Izdatel'stvo Kazahskogo agrotehnicheskogo universiteta imeni S.Sejfullina, 120. repository.kazatu.kz/xmlui/handle/123456789/1598. (In Russian)

[6] Bejsebaj P.B. (2020) Matematikalyқ taldaudyң қosymsha taraulary [Additional chapters of mathematical analysis]. Oқulyқ. Astana: «Foliant» baspasy, 416. https://www.flip.kz/catalog?prod=2138427&ysclid. (In Kazakh)

[7] Bejsebaj P.B., Asқarova A.Zh., Aruova A.B. zhәne basқalar (2022) Zhoғary matematika. [Higher Mathematics]. Oқu құraly. Nұr-Sұltan: S.Sejfullin atyndaғy Қazaқ agrotehnikalyқ universiteti baspasy, 90. https://repository.kazatu.kz/jspui/handle/123456789/1808. (In Kazakh)

[8] Dubrovin V.T. (2015) Teorija funkcij kompleksnogo peremennogo [Theory of functions of a complex variable]. Uchebnoe posobie. Kazan': Kazanskij gosudarstvennyj universitet, 102. https://kpfu.ru/docs/F1855528304/complex.pdf. (In Russian)

[9] Akimov V.N., Konovalova I.N. (2018) Kompleksnye chisla, kompleksnye vektory i ih prilozhenija [Complex numbers, complex vectors and their applications]. Uchebnoe posobie. Moskva: Rossijskij gosudarstvennyj medicinskij universitet, 85. https://rsmu.ru/fileadmin/templates/DOC/Faculties/PF/Phys-mat. (In Russian)

[10] Bejsebaj P.B., Muhamediev G.H. (2020) Erikti retti tұraқty kojefficientti syzyқtyқ birtekti differencialdyқ teңdeudiң sheshimderiniң fundamentaldy zhүjesin құru turaly [On creating a fundamental system of solutions of a linear homogeneous differential equation with a constant coefficient of arbitrary order]. Kazahskij nacional'nyj pedagogicheskij universitet imeni Abai VESTNIK Serija «Fiziko-matematicheskie nauki». №2 (70), 49-53. (In Kazakh) https://doi.org/10.51889/2020-2.1728-7901.07

[11] Li Y., Qiu H. (2019) Fractal Sets in the Field of p - Adic Analogue of the complex numbers. Fractals Vol. 27, No. 04, 1950053, (In English) https://doi.org/10.1142/S0218348X19500531