

М.Дж. Минглибаев¹, С.Б. Бижанова¹

¹әл-Фараби атындағы Қазақ Ұлттық Университеті, Алматы қ., Қазақстан

МАССАСЫ МЕН ӨЛШЕМІ АЙНЫМАЛЫ ӨСТІК СИММЕТРИЯЛЫ ДЕНЕНІҢ ЭВОЛЮЦИЯЛЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

Аңдатпа

Мақалада өзара гравитацияланушы бейстационар екі дене қарастырылады: бірінші дене – «центрлік», яғни тығыздығы сфера бойынша үлестірілген шар, екінші дене – «серік», яғни динамикалық құрылымы және пішіні өстік симметриялы. Ньютонның өзара әсерлесу күші екінші гармониканы ескергендегі күштік функцияның жуық өрнегімен сипатталған. Массасы және өлшемі айнымалы өстік симметриялы дененің ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының дифференциалдық теңдеулері салыстырмалы координаталар жүйесінде қорытылып шығарылды. Бейстационар екі дене үшін меншікті координаталар жүйесінің өстері дененің бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл күй эволюция барысында өзгеріссіз қалады. Денелердің массалары әртүрлі қарқында изотропты өзгереді. Есепте ұйытқу теориясының тәсілдері пайдаланылған. Оскуляциялаушы Делоне-Андуайе элементтерінің аналогтарында серіктің ғасырлық ұйытқушы ілгерілемелі-айналмалы қозғалысының теңдеулері алынған. Сандық тәсілмен ұйытқыған қозғалыстың дифференциалдық теңдеулерінің шешімдері алынып, графиктері Wolfram Mathematica пакетін қолдана отырып тұрғызылды.

Түйін сөздер: өстік симметриялы дене, ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс, ғасырлық ұйытқу.

Аннотация

М.Дж. Минглибаев¹, С.Б. Бижанова¹

¹Казахский Национальный Университет имени аль - Фараби, г.Алматы, Казахстан

ИССЛЕДОВАНИЕ ЭВОЛЮЦИОННЫХ УРАВНЕНИЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ТЕЛА С ПЕРЕМЕННОЙ МАССОЙ И С РАЗМЕРОМ

В работе рассматриваются взаимогравитирующие нестационарные два тела: первое тело – «центральное», шар со сферическим распределением плотности, второе тело – «спутник», обладающей осесимметричным динамическим строением и формой. Ньютоновская сила взаимодействия характеризуется приближенным выражением силовой функции, учитывающая вторую гармонику. Выведены дифференциальные уравнения поступательно-вращательного движения осесимметричного тела с переменной массой и с размерами в относительной системе координат. Оси собственной системы координат нестационарных двух тел совпадает с главными осями инерции и это положение остается неизменным за время эволюции. Массы тел изменяются изотропно в различных темпах. Задача исследована методами теории возмущения. Выведены уравнения вековых возмущений поступательно-вращательного движения спутника в аналогах оскулирующих элементов Делоне-Андуайе. Получены решения дифференциальных уравнений возмущенного движения численным методом и построены графики с помощью пакета Wolfram Mathematica.

Ключевые слова: осесимметричное тело, поступательно-вращательное движение, вековые возмущения.

Abstract

INVESTIGATION OF THE EVOLUTION EQUATIONS OF THE AXISYMMETRIC BODY WITH VARIABLE MASS AND WITH SIZE

Minglibayev M.Zh.¹, Bizhanova S.B.¹

¹Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

In this article we consider mutually gravitating non-stationary two bodies: first body is «central», it is a sphere with a spherical density distribution, the second body is «satellite», which has an axisymmetric dynamic structure and form. Newtonian force interaction is characterized by an approximate expression of the force function, which takes into account the second harmonic. The differential equation of translational-rotational motion of the axisymmetric body is derived with variable mass and variable size in a relative coordinate system. The axes of the own coordinate system for non-stationary two bodies coincides with the main axes of inertia and this position remains unchanged during evolution. The mass of bodies are varied isotropically in the different rates. The problem is investigated by methods perturbation theory.

The equations of secular perturbations of translational-rotational motion of satellite are deduced in the analogues osculating elements Delaunay-Andoyer. The solutions of the differential equations of the perturbed motion are obtained by the numerical method and the graphs are constructed using the Wolfram Mathematica package.

Keywords: axisymmetric body, translational-rotational motion, secular perturbation.

1. Мәселенің физикалық қойылымы.

Бірінші T_1 “центрлік” дене массасы айнымалы $m_1 = m_1(t)$, тығыздығы сфера бойынша үлестірілген шар. Екінші T_2 дене массасы $m_2 = m_2(t)$, пішіндері айнымалы “серік”, динамикалық құрылымы өстік симметриялы және $l_2 = l_2(t)$ сызықты өлшеммен сипатталсын, оның екінші ретті инерция моменттері айнымалы.

$$A(t) = B(t) \neq C(t), \quad \frac{C(t) - A(t)}{C(t)} \neq const. \quad (1.1)$$

Өзіндік координата өстері бас инерция өстерімен сәйкес келеді және бұл жағдай өзгеріссіз қалады.

Денелердің массасы мен өлшемі әртүрлі қарқында изотропты түрде өзгереді, сондықтанда қосымша реактивті күш және қосымша айналдырушы момент туындамайды

$$\frac{\dot{m}_1(t)}{m_1(t)} \neq \frac{\dot{m}_2(t)}{m_2(t)}, \quad \frac{\dot{l}_1(t)}{l_1(t)} \neq \frac{\dot{l}_2(t)}{l_2(t)}. \quad (1.2)$$

Күштік функцияның жуық өрнегімен шектелеміз.

Бірінші дененің инерция центріне қатысты екінші дененің инерция центрінің ілгерілемелі қозғалыс теңдеуін салыстырмалы координаталар жүйесінде келесі түрде жазамыз [1,2]

$$m\ddot{x} = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad m\ddot{y} = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad m\ddot{z} = \frac{\partial U}{\partial z}, \quad (1.3)$$

мұндағы $x, y, z - G_1xyz$ салыстырмалы координаталар жүйесіндегі T_2 дененің массалар центрінің координаталары, $m = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ – келтірілген масса,

$$U = f \frac{m_1 m_2}{R} + \tilde{U}, \quad R = x^2 + y^2 + z^2, \quad (1.4)$$

$$\tilde{U} = f m_1(t) \frac{2A(t) + C(t) - 3J}{2R^3}. \quad (1.5)$$

екі дененің тартылыс күшін анықтайтын күштік функция,

$$J = A(\alpha^2 + \beta^2) + C\gamma^2 \quad (1.6)$$

J – екі өстік симметриялы дененің инерция центрін қосатын $\overrightarrow{O_1 O_2}$ түзуіне қатысты T_i денелердің инерция моменттері.

Серіктің массалар центрі төңірегіндегі айналмалы қозғалысы Эйлер айнымалыларында келесі түрде болады [3,4]

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(Ap) - (A - C)qr &= \frac{\sin\varphi}{\sin\theta} \left[\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta \frac{\partial U}{\partial\varphi} \right] + \cos\varphi \frac{\partial U}{\partial\theta}, \\ \frac{d}{dt}(Aq) - (C - A)rp &= \frac{\cos\varphi}{\sin\theta} \left[\frac{\partial U}{\partial\psi} - \cos\theta \frac{\partial U}{\partial\varphi} \right] - \sin\varphi \frac{\partial U}{\partial\theta}, \\ \frac{d}{dt}(Cr) &= 0, \end{aligned} \quad (1.7)$$

$$p = \dot{\psi} \sin\varphi \sin\theta + \dot{\theta} \cos\varphi, \quad q = \dot{\psi} \cos\varphi \sin\theta - \dot{\theta} \sin\varphi, \quad r = \dot{\psi} \cos\theta + \dot{\varphi}. \quad (1.8)$$

мұндағы p, q, r – серіктің айналмалы қозғалысының бұрыштық жылдамдығының меншікті координата жүйесінің өстеріне проекциялары, φ, ψ, θ – Эйлер бұрыштары [5, 6, 7]. Қарастырылып отырған қозғалыс теңдеулерін ұйытқу теориясымен зерттейміз [8].

2. Делоне-Андуайе элементтер аналогтарындағы ұйытқыған қозғалыс теңдеуі. Ілгерілемелі-айналмалы қозғалыс теңдеулерін Делоне-Андуайе айнымалылар аналогтарымен сипаттаймыз.

Ілгерілемелі қозғалысты Делоне айнымалылары аналогтарында сипаттаймыз

$$L, G, H, l, g, h, \quad (2.1)$$

Айналмалы қозғалысты Андуайе айнымалылары аналогтарында сипаттаймыз

$$L', G', H', l', g', h', \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \dot{L} &= \frac{\partial W}{\partial l}, & \dot{G} &= \frac{\partial W}{\partial g}, & \dot{H} &= \frac{\partial W}{\partial h}, \\ i &= -\frac{\partial W}{\partial L}, & \dot{g} &= -\frac{\partial W}{\partial G}, & \dot{h} &= -\frac{\partial W}{\partial H}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

мұндағы

$$W = \frac{1}{v^2(t)} \cdot \frac{\mu_0^2}{2L^2} + W^*, \quad (2.4)$$

$$W^* = \left(\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \tilde{U} - \frac{1}{2} b R^2 \right), \quad (2.5)$$

$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$ қатынасын ескере отырып, (1.5), (1.6), (2.5) формулалардан келесі өрнекті аламыз [9]

$$W^* = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{1}{2} f m_1 (C - A) \left[\frac{1}{R^3} \right] - \frac{3}{2} f m_1 (C - A) \left[\frac{\gamma_2^2}{R^3} \right] \right) - \frac{1}{2} b [R^2]. \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}' &= -\frac{\partial F}{\partial l'}, & \dot{G}' &= -\frac{\partial F}{\partial g'}, & \dot{H}' &= -\frac{\partial F}{\partial h'}, \\ i' &= \frac{\partial F}{\partial L'}, & \dot{g}' &= \frac{\partial F}{\partial G'}, & \dot{h}' &= \frac{\partial F}{\partial H'}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

$$F = F_{\text{нб}} + F_{\text{ғоз}}, \quad (2.8)$$

$$F_{\text{нб}} = \frac{1}{2} (G'^2 - L'^2) \frac{1}{A} + \frac{L'^2}{2C} = \frac{1}{2} \frac{G'^2}{A} + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L'^2, \quad (2.9)$$

$$F_{\text{ғоз}} = \tilde{U} - \frac{1}{2} b R^2. \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}'_{\text{век}} &= 0, & \dot{G}'_{\text{век}} &= 0, & \dot{H}'_{\text{век}} &= \frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial h_{\text{век}}}, \\ i'_{\text{век}} &= -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial L'_{\text{век}}}, & \dot{g}'_{\text{век}} &= -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial G'_{\text{век}}}, & \dot{h}'_{\text{век}} &= -\frac{\partial W_{\text{век}}}{\partial H'_{\text{век}}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \dot{L}'_{\text{век}} &= 0, & \dot{G}'_{\text{век}} &= 0, & \dot{H}'_{\text{век}} &= -\frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial h'_{\text{век}}}, \\ i'_{\text{век}} &= \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial L'_{\text{век}}}, & \dot{g}'_{\text{век}} &= \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial G'_{\text{век}}}, & \dot{h}'_{\text{век}} &= \frac{\partial F_{\text{век}}}{\partial H'_{\text{век}}}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$W_{\text{век}} = \frac{\mu_0^2}{2\nu^2(t)} \left(\frac{1}{L^2} \right) + \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{f m_1 (C - A)}{2\nu^3} \left[\frac{1}{a^3(1 - e^2)} \right] \right) - \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} \left(\frac{3f m_1 (C - A)}{2\nu^3} \left[\frac{I}{4a^3(1 - e^2)^{3/2}} \right] \right) - \frac{1}{2} b \nu^2 \left[a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right] \quad (2.13)$$

мұндағы $a = L^2/\mu_0$, $1 - e^2 = G^2/\mu_0 a$, $b = b(t) = \frac{\ddot{\nu}}{\nu}$, $\nu = \nu(t) = \frac{m_1(t_0) + m_2(t_0)}{m_1(t) + m_2(t)}$.

$$F_{\text{век}} = \frac{1}{2A} (G'^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) (L'^2) + \frac{f m_1 (C - A)}{2\nu^3} \left[\frac{1}{a^3(1 - e^2)} \right] - \frac{3f m_1 (C - A)}{2\nu^3} \left[\frac{I}{4a^3(1 - e^2)^{3/2}} \right] - \frac{1}{2} b \nu^2 \left[a^2 \left(1 + \frac{3}{2} e^2 \right) \right] \quad (2.14)$$

3. Өлшемсіз айнымалылардағы қозғалыс теңдеулері. (2.1),(2.2) теңдеулерден өлшемсіз шамаларға өтеміз. Ары қарай « \sim » белгісі өлшемсіз шамаларды, « 0 » индексі Коши есебінің бастапқы шарттарын береді.

$$\begin{aligned} L/L_0 &= \tilde{L}, & G/G_0 &= \tilde{G}, & L'/L'_0 &= \tilde{L}', & G'/G'_0 &= \tilde{G}', \\ l/l_0 &= \tilde{l}, & g/g_0 &= \tilde{g}, & l'/l'_0 &= \tilde{l}', & g'/g'_0 &= \tilde{g}'. \end{aligned} \quad (3.1)$$

$$H/H_0 = \tilde{H}, \quad h/h_0 = \tilde{h}, \quad H'/H'_0 = \tilde{H}', \quad h'/h'_0 = \tilde{h}'. \quad (3.2)$$

$$t/T = \tau, \quad m_i/P = \tilde{m}_i, \quad a/a_0 = \tilde{a}, \quad P = (m_1 + m_2)/2, \quad T = 2\pi a^{3/2}/\sqrt{\mu_0}. \quad (3.3)$$

(2.1),(2.2) қозғалыс теңдеулерін өлшемсіз айнымалыларда жазамыз

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}} &= 0, & \dot{\tilde{G}} &= 0, & \dot{\tilde{L}'} &= 0, & \dot{\tilde{G}'} &= 0, \\ \dot{\tilde{l}} &= -\frac{T}{l_0 L_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{L}}, & \dot{\tilde{g}} &= -\frac{T}{g_0 G_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{G}}, & \dot{\tilde{l}'} &= \frac{T}{l'_0 L'_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{L}'}, & \dot{\tilde{g}'} &= \frac{T}{g'_0 G'_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{G}'}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}} &= \frac{T}{H_0 h_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{h}}, & \dot{\tilde{h}} &= -\frac{T}{h_0 H_0} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tilde{H}}, \\ \dot{\tilde{H}'} &= -\frac{T}{H'_0 h'_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{h}'}, & \dot{\tilde{h}'} &= \frac{T}{h'_0 H'_0} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial \tilde{H}'}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

ашық түрде келесідей болады

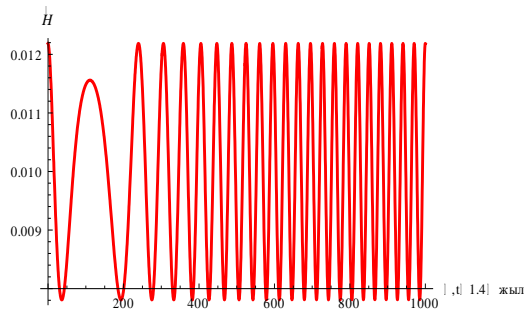
$$\begin{aligned} \dot{\tilde{H}} &= \frac{3f T (C_0 \tilde{C} - A_0 \tilde{A}) (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)}{8\nu^3 a_0^3 \tilde{a}^3 \tilde{m}_2 H_0 (1 - e)^{3/2}} \Pi_1(\tau), & \dot{\tilde{h}} &= -\frac{3f T (C_0 \tilde{C} - A_0 \tilde{A}) (\tilde{m}_1 + \tilde{m}_2)}{8\nu^3 a_0^3 \tilde{a}^3 \tilde{m}_2 h_0 (1 - e)^{3/2}} \Pi_2(\tau), \\ \dot{\tilde{H}'} &= -\frac{3f T P \tilde{m}_1 (C_0 \tilde{C} - A_0 \tilde{A})}{8\nu^3 a_0^3 \tilde{a}^3 H'_0 (1 - e)^{3/2}} \Pi_1(\tau), & \dot{\tilde{h}'} &= \frac{3f T P \tilde{m}_1 (C_0 \tilde{C} - A_0 \tilde{A})}{8\nu^3 a_0^3 \tilde{a}^3 h'_0 (1 - e)^{3/2}} \Pi_3(\tau). \end{aligned} \quad (3.6)$$

мұндағы

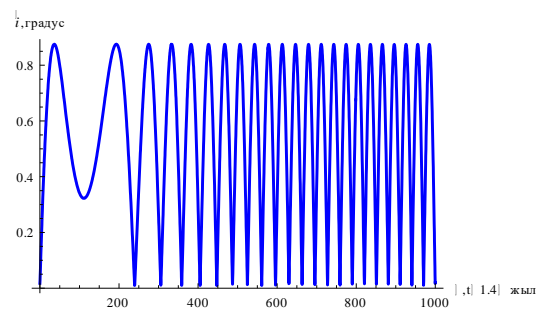
$$\begin{aligned} \Pi_1(\tau) &= \frac{2}{G_0^2 G_0'^4 \tilde{G}^2 \tilde{G}'^4} \left(G_0 H_0 H_0' \tilde{G} \tilde{H} \tilde{H}' \sqrt{1 - \frac{H_0^2 \tilde{H}^2}{G_0^2 \tilde{G}^2}} \left(-2\sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2} L_0^2 \tilde{L}^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0'^2 \tilde{L}'^2} \sqrt{(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2)(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0'^2 \tilde{L}'^2)} \right) - (G_0^2 \tilde{G}^2 - H_0^2 \tilde{H}^2) \right. \\ &\quad \left. (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2) (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - 3L_0'^2 \tilde{L}'^2) \cos(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}') \sin(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}') \right) \end{aligned}$$

$$\Pi_2(\tau) = \frac{1}{G_0^3 G_0'^4 \tilde{G}^3 \tilde{G}'^4 \sqrt{1 - \frac{H_0^2 \tilde{H}^2}{G_0^2 \tilde{G}^2}}} \left(-2(G_0^2 \tilde{G}^2 - 2H_0^2 H^2) H_0' \tilde{H}' (-2\sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2} L_0^2 \tilde{L}^2 + \sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0^2 \tilde{L}^2} \sqrt{(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2)(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0^2 \tilde{L}^2)}) \cos(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}') - G_0' H_0' \tilde{G}' \tilde{H}' \sqrt{1 - \frac{H_0^2 \tilde{H}^2}{G_0^2 \tilde{G}^2}} (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - 3L_0^2 \tilde{L}^2) (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - 3H_0'^2 \tilde{H}'^2 + (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2) \cos 2(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}')) \right)$$

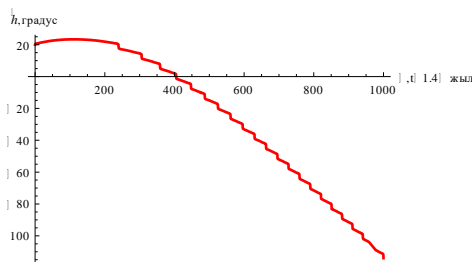
$$\Pi_3(\tau) = \frac{1}{G_0^2 G_0'^4 \tilde{G}^2 \tilde{G}'^4} \left(\frac{1}{(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2)^{3/2}} 4G_0 H_0 \tilde{G} \tilde{H} \sqrt{1 - \frac{H_0^2 \tilde{H}^2}{G_0^2 \tilde{G}^2}} (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - 2H_0'^2 \tilde{H}'^2) (-2G_0'^2 L_0^2 \tilde{G}'^2 \tilde{L}^2 + 2H_0'^2 L_0^2 \tilde{H}'^2 \tilde{L}^2 + \sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2} \sqrt{G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0^2 \tilde{L}^2} \sqrt{(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - H_0'^2 \tilde{H}'^2)(G_0'^2 \tilde{G}'^2 - L_0^2 \tilde{L}^2)}) \cos(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}') + 2H_0' \tilde{H}' (G_0'^2 \tilde{G}'^2 - 3L_0^2 \tilde{L}^2) (G_0^2 \tilde{G}^2 - 3H_0^2 H^2 + (G_0^2 \tilde{G}^2 - H_0^2 H^2) \cos 2(h_0 \tilde{h} + h_0' \tilde{h}')) \right)$$



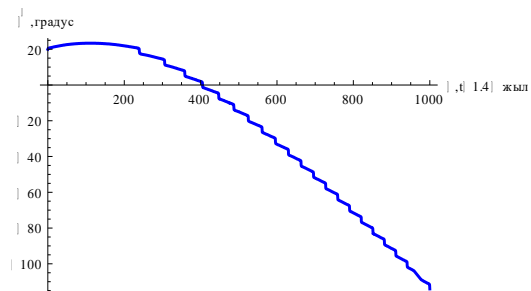
Сурет 1. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{H} элементінің өзгерісі



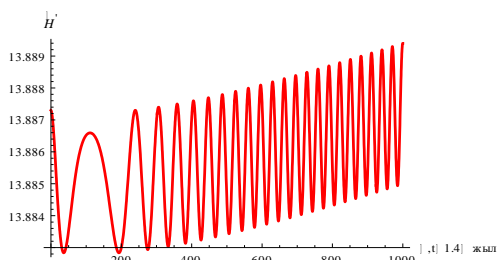
Сурет 2. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{i} элементінің өзгерісі



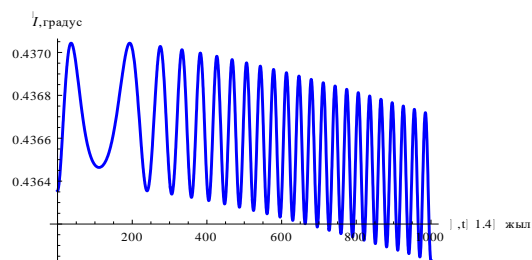
Сурет 3. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{h} элементінің өзгерісі



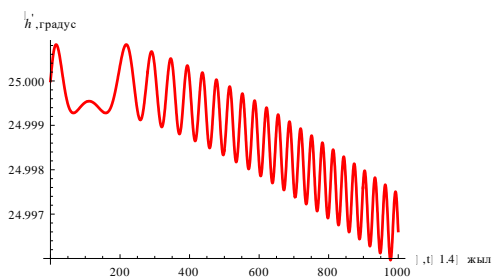
Сурет 4. Массалары айнымалы жағдайдағы $\tilde{\Omega}$ элементінің өзгерісі



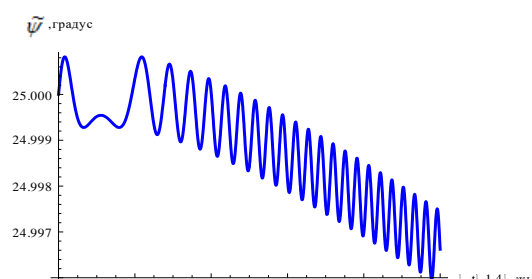
Сурет 5. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{h}' элементінің өзгерісі



Сурет 6. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{I} элементінің өзгерісі



Сурет 7. Массалары айнымалы жағдайдағы \tilde{h} элементінің өзгерісі



Сурет 8. Массалары айнымалы жағдайдағы $\tilde{\psi}$ элементінің өзгерісі

Алынған графиктер массалары тұрақты жағдайдағы мәселенің сәйкес графиктерінен өзгешеленеді. Барлық оскуляциялаушы элементтердің толық сандық талдауы келесі жұмыстарда орындалады деп жоспарлануда.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

- 1 Минглибаев М.Дж. Динамика гравитирующих тел с переменными массами и размерами. - Германия: Изд. «LAP LAMBERT Academic Publishing», 2012. - 229 с.
- 2 Минглибаев М.Дж., Байсбаева О.Б. Вековые возмущения в задаче о поступательно-вращательном движении двух нестационарных тел: шар – осесимметричное тело // Вестник КазНУ, серия математика, механика, информатика 01(76), 2013. – С. 71-81.
- 3 Minglibayev M.Zh., Ahmetrassulova A.A. Secular perturbations in the problem of translational – rotational motion two axisymmetric non – stationary gravitating bodies with variable oblate / CCMECH7. 7th International Symposium on Classical and Celestial Mechanics. Selected Papers – Poland, Siedlce: Wydawnictwo Collegium Mazovia, October 23-28, 2012. - pp. 116-127.
- 4 Белецкий В.В. Движение спутника относительно центра масс в гравитационном поле. - Москва: МГУ им. М.В. Ломоносова, 1975. - 308 с.
- 5 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Основные задачи и методы. – Москва: Наука, 1975. – 799 с.
- 6 Видякин В.В. Поступательно-вращательное движение двух твердых тел: Учебное пособие - Архангельск: ДКПО «Норд», 1996.-184с.
- 7 Баркин Ю.В., Демин В.Г. Поступательно-вращательное движение небесных тел // Итоги науки и техники АН СССР. Астрономия. -М.:1982.-Т.20. – С.115-134.
- 8 Дубошин Г.Н. Небесная механика. Аналитические и качественные методы. М.: Наука. Глав.ред.физ.-мат.лит.,1978, 456 стр.
- 9 Бижанова С.Б., А.Н. Прокопья, М.Дж. Минглибаев. Исследование вековых возмущений поступательно-вращательного движения в нестационарной задаче двух тел с применением компьютерной алгебры. //Журнал вычислительной математики и математической физики, 2020, том 60, №1, с. 27-36.