МРНТИ 27.25.19

10.51889/2959-5894.2024.87.3.005

А.Б. Утесов[1], Г.И. Утесова[1*], Р.А. Шанауов[1], Н.Ш. Аманов[1]

[1]Актюбинский региональный университет им. К.Жубанова, г.Актобе, Казахстан
[*]*e-mail: ugi_a@mail.ru*

О ПРЕДЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ДИСКРЕТИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА

Аннотация

Целью данного исследования является построение оптимального оператора дискретизации решения уравнения Пуассона и нахождение его предельной погрешности. Методология исследования основана на рассмотрении задачи дискретизации решения уравнения Пуассона как одной из конкретизации общей задачи оптимального восстановления оператора и в использовании известных утверждений теории приближений. В этом исследовании в рамках этой общей задачи оптимального восстановления во – первых, в гильбертовой метрике установлен точный порядок наименьшей погрешности дискретизации решения уравнения Пуассона с правой частью f из многомерного периодического класса Соболева; во – вторых, по конечному набору коэффициентов Фурье функции f построен оператор дискретизации $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$, реализующий установленный точный порядок; в – третьих, найдена предельная погрешность оптимального оператор дискретизации $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$. Уравнение Пуассона описывает многие физические явления такие, как электростатическое поле, стационарное поле температуры, поле давления и поле потенциала скорости в гидродинамике. Поэтому актуальность проведенного здесь исследования не вызывает сомнений.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, дискретизация решений, оптимальный оператор дискретизации, погрешность дискретизации, предельная погрешность, класс Соболева.

А.Б. Утесов[1], Г.И. Утесова[1], Р.А. Шанауов[1], Н.Ш. Аманов[1]
[1]Қ.Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті, Ақтөбе қ., Қазақстан

ПУАССОН ТЕҢДЕУІ ШЕШІМІНІҢ ОПТИМАЛДЫ ДИСКРЕТТЕУ ОПЕРАТОРЫНЫҢ ШЕКТІК ҚАТЕЛІГІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Бұл зерттеудің мақсаты – Пуассон теңдеуінің шешімі үшін оптималды дискреттеу операторын құру және оның шектік қателігін табу. Зерттеу әдістемесі Пуассон теңдеуінің шешімін дискреттеу есебін операторды оптималды қалыптастырудың жалпы есебінің бір дербес жағдайы ретінде қарастыруға және жуықтаулар теориясының белгілі тұжырымдарын пайдалануға негізделген. Бұл зерттеуде оптималды қалыптастырудың жалпы есебінің аясында біріншіден, гильберттік метрикада оң жағы көпөлшемді периодты Соболев класына тиесілі f функциясы болатын Пуассон теңдеуінің шешімін дискреттеудегі ең аз қателіктің дәл реті тағайындалған; екіншіден, f функциясыныңФурье коэффициенттерінің ақырлы жиынтығы бойынша тағайындалған дәл ретті жүзеге асыратын $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ дискреттеу операторы құрылған; үшіншіден, оптималды $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ дискреттеу операторының шектік қателігі табылған. Пуассон теңдеуі электростатикалық өріс, температураның стационарлық өрісі, қысым өрісі, сондай – ақ, гидродинамикадағы жылдамдық потенциалының өрісі сияқты біраз физикалық құбылыстарды сипаттайды. Сондықтан, осы жұмыста жүргізілген зерттеудің өзектілігі ешқандай күмән туғызбайтыны сөзсіз.

Түйін сөздер: Пуассон теңдеуі, шешімдерді дискреттеу, оптималды дискреттеу операторы, дискреттеуқателігі, шектік қателік, Соболев класы.

A.B. Utessov[1], G.I. Utessova[1], R.A. Shanauov, N.Sh. Amanov[1]
[1]Aktobe regional university named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

ON LIMIT ERROR OF THE OPTIMAL DISCRETIZATION OPERATOR FOR SOLUTION OF POISSON EQUATION

Abstract

The purpose of this study is to construct an optimal discretization operator for the solution of the Poisson equation and find its limit error. The research methodology is based on considering the problem of discretizing the solution of the Poisson equation as one of the concretizations of the general problem of optimal recovery of the operator and using well-known statements of approximation theory. In this study, within the framework of this general optimal recovery problem, firstly, in the Hilbert metric, the exact order of the smallest discretization error of the solution of the Poisson equation with the right-hand side f from the multidimensional periodic Sobolev class is established; secondly, based on a finite set of Fourier coefficients of the function f, a discretization operator $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ is constructed that implements the established exact order; thirdly, the limit error of the optimal discretization operator $(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)$ was found. Poisson's equation describes many physical phenomena such as the electrostatic field, stationary temperature field, pressure field and velocity potential field in hydrodynamics. Therefore, the relevance of the research conducted here is beyond doubt.

Keywords: Poisson equation, discretization of solutions, optimal discretization operator, discretization error, limit error, Sobolev class.

Введение

В работе рассматривается уравнение Пуассона

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f \tag{1}$$

с правой частью f из многомерного периодического класса Соболева $W_2^r \equiv W_2^r[0,1]^s$ с параметрами $r > 0$ и $s \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$, состоящего из всех суммируемых на $[0,1]^s$ и однопериодических по каждой переменной $x_1, \ldots, x_s$ функций $f(x) = f(x_1, \ldots, x_s)$, тригонометрические коэффициенты Фурье $\hat{f}(m) = \int\limits_{[0,1]^s} f(x) \exp\{-2\pi i (m,x)\} dx,\ m \in Z^s$ которых удовлетворяют условию

$$\sum_{m \in Z^s} |\hat{f}(m)|^2 (\bar{m}_1^{2r} + \ldots + \bar{m}_s^{2r}) \le 1,$$

где $(m,x) = m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s$, $\bar{m}_j = \max\{1; |m_j|\}\ (j = 1, \ldots, s)$.

Легко проверить, что если справедливы $r > s/2$ и $\hat{f}(0) \ne 0,$ то при любом краевом условии найдется функция $\omega = \omega(x) \in C[0,1]^s$ с $\Delta\omega = 1$ на $[0,1]^s$ такая, что решение уравнения (1) имеет вид

$$u_{\omega}(x;f)=\omega(x)\hat{f}(0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s}{}^{*}\frac{\hat{f}(m)}{(m,m)}\exp\{-2\pi i(m,x)\}, \qquad (2)$$

здесь и всюду ниже знак $*$ означает, что вектор $m=(0,...,0)\in Z^s$ в суммировании не участвует. Обратно, всякая функция вида (2) удовлетворяет уравнению (1).

Так как кратный функциональный ряд из (2) является бесконечным объектом, то возникает задача дискретизации (приближения) решения $u_{\omega}(x;f)$ конечным объектом и установления точности погрешности дискретизации. Первый результат по дискретизации решения $u_{\omega}(x;f)$ был получен в [1] при условии, когда правая часть (1) принадлежит классу Коробова E_s^r.Затем изучение задачи дискретизации решения $u_{\omega}(x;f)$ продолжились в работах [2 – 6] при соответствующих функциональных классах, каждый из которых содержит заданный f. Заметим, что в [1 – 5]

дискретизация решений производится операторами дискретизации, построенными по значениям функций f в заданных точках. А в [6] для дискретизации решений $u_{\omega}(x;f)$ были привлечены операторы дискретизации, построенные по коэффициентам Фурье функций f, принадлежащих классам Коробова E_s^r.

В настоящей работе по конечному набору коэффициентов Фурье $\hat{f}(m_1),...,\hat{f}(m_N)$ построен оптимальный оператор дискретизации $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$ решения $u_{\omega}(x;f)$ уравнения Пуассона с правой частью $f\in W_2^r$ и найдена его предельная погрешность (определение предельной погрешности дано ниже).

Методология исследования

Пусть даны нормированные пространства X и Y, состоящие из функций $f:\Omega_X\to \mathrm{R}$ и $g:\Omega_Y\to \mathrm{R}$ соответственно, функциональный класс $F\subset X$, оператор $T:F\to Y$.

Основной величиной в задаче оптимального восстановления оператора является (см, например, [7])

$$\delta_N(D_N,T,F)_Y=\inf_{(l^{(N)},\varphi_N)\in D_N}\delta_N((l^{(N)},\varphi_N),T,F)_Y, \qquad (3)$$

Где

$$\delta_N((l^{(N)},\varphi_N),T,F)_Y=\sup_{f\in F}\left\|(Tf)(\cdot)-\varphi_N(l_N^{(1)}(f),...,l_N^{(N)}(f);\cdot)\right\|_Y,$$

D_N – множество всевозможных пар $(l^{(N)},\varphi_N)$, образованных из $N-$мерного вектора $l^{(N)}=\left(l_N^{(1)},...,l_N^{(N)}\right)$ с функционалами $l_N^{(1)}:F\to \mathrm{C},...,l_N^{(N)}:F\to \mathrm{C}$ и функции

$$\varphi_N\equiv\varphi_N(z_1,...,z_N;y):\mathrm{C}^N\times\Omega_Y\to \mathrm{C}(N=1,2,...).$$

Далее, для положительных последовательностей $\{a_n\}_{n\geq 1}$ и $\{b_n\}_{n\geq 1}$ будем использовать запись $a_n \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} b_n$, которая означает существование некоторой величины $C_k(\alpha,\beta,\ldots)>0\,(k=1,2,\ldots)$
такой, что $a_n \leq C_k(\alpha,\beta,\ldots)b_n$ для всех $n\in \mathrm{N}$. При одновременном выполнении соотношений $a_n \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} b_n$ и $b_n \underset{\alpha,\beta,\ldots}{<<} a_n$ будем писать $a_n \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} b_n$.

Задача оптимального восстановления оператора $T:F\mapsto Y$ вычислительными агрегатами $(l^{(N)},\varphi_N)\equiv\varphi_N(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot)$ в метрике пространства Y состоит в нахождении положительной последовательности $\{\psi_N\}_{N\geq 1}$ и вычислительного агрегата $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\delta_N(D_N,T,F)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \psi_N \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \delta_N((\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N),T,F)_Y.$$

При этом вычислительный агрегат $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$ называют оптимальным вычислительным агрегатом или вычислительным агрегатом, реализующим точный порядок наименьшой погрешности восстановления.

Вычисление для каждой $f\in F$ значения функционалов $l_N^{(1)}:F\to \mathrm{C},\ldots,l_N^{(N)}:F\to \mathrm{C}$, за редкими исключениями, не может быть точным. Поэтому, для оптимального вычислительного агрегата $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$ возникает задача нахождения погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$ вычисления значений $\tilde{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)$ функционалов $\tilde{l}_N^{(1)}:F\to \mathrm{C},\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}:F\to \mathrm{C}$, сохраняющей оптимальность $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$ и являющейся неулучшаемой по порядку. В [7], следуя идеям и терминам статьи [8], определение погрешности $\tilde{\varepsilon}_N$ было дано в таком виде: Последовательность $\tilde{\varepsilon}_N>0$ называется предельной погрешностью оптимального вычислительного агрегата $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$, если

$$\Delta_N(\tilde{\varepsilon}_N,(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N),T,F)_Y \underset{\alpha,\beta,\ldots}{\succ\prec} \delta_N(D_N,T,F)_Y \quad \text{и}$$

$$\overline{\lim_{N\to\infty}}\frac{\Delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right),T,F\right)_Y}{\delta_N(D_N,T,F)_Y}=+\infty$$

для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_N\}_{N\geq 1}$, где

$$\Delta_N(\varepsilon_N,(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N),T,F)_Y=$$

$$= \sup_{f \in F} \sup_{z_1,\dots,z_N} \left\{ \left\| (Tf)(\cdot) - \tilde{\varphi}_N(z_1,\dots,z_N;\cdot) \right\|_Y : \left| z_i - \tilde{l}_N^{(i)}(f) \right| \le \varepsilon_N, i = 1,\dots,N \right\} \equiv$$

$$\equiv \sup_{f \in F} \sup_{\left|\gamma_N^{(1)}\right| \le 1,\dots,\left|\gamma_N^{(N)}\right| \le 1} \left\| (Tf)(\cdot) - \tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f) + \gamma_N^{(1)}\varepsilon_N,\dots,\tilde{l}_N^{(N)}(f) + \gamma_N^{(N)}\varepsilon_N;\cdot\right) \right\|_Y$$

для каждой положительной последовательности ε_N.

Конкретизация в (3) класса F, пространства Y, оператора $T : F \mapsto Y$, множества D_N порождает различные задачи оптимального восстановления и нахождения предельной погрешности. Заметим, что если в качестве оператора T выступает решение какого - либо уравнения в частных производных, то вместо терминов «восстановление» и «вычислительный агрегат» используются термины «дискретизация» и «оператор дискретизации» соответственно (см., например, [3 – 5]).

В данной работе при конкретизации

$$(Tf)(\cdot) = u_\omega(\cdot; f),\ F = W_2^r[0,1]^s,\ Y = L^2[0,1]^s,\ D_N = L_N,$$

где L_N – множество всех пар $\{(l^{(N)}, \varphi_N)\}$ с линейными функционалами

$$l_N^{(1)} : W_2^r \mapsto \mathrm{C},\dots,l_N^{(N)} : W_2^r \mapsto \mathrm{C},$$

построен оптимальный оператор дискретизации с нахождением его предельной погрешности.

Результаты исследования

Далее, ради краткости положим

$$\delta_N(L_N) = \delta_N(L_N, (Tf)(\cdot) = u_\omega(\cdot; f), W_2^r)_{L^2},$$

$$\delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)) = \delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N), (Tf)(\cdot) = u_\omega(\cdot; f), W_2^r)_{L^2},$$

$$\Delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N, \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)\right) = \Delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N, \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right), (Tf)(\cdot) = u_\omega(\cdot; f), W_2^r\right)_{L^2}.$$

Основными результатами данного исследования являются следующие две теоремы.

Теорема 1. *Пусть даны числа* $s \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$ *и* $r > s/2$. *Тогда для каждого* $N = (2n+1)^s$, $n \in \mathrm{N}$ *имеют место соотношения*

$$\delta_N(L_N) \underset{s,r}{\succ\prec} \delta_N((\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N)) \underset{s,r}{\succ\prec} \frac{1}{N^{(r+2)/s}}, \tag{4}$$

здесь $l^{(N)}$ *состоит из компонентов*

$$\tilde{l}_N^{(1)}(f)=\hat{f}\left(\tilde{m}^{(1)}\right)=\hat{f}(0),\ \tilde{l}_N^{(2)}(f)=\hat{f}\left(\tilde{m}^{(2)}\right),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f)=\hat{f}\left(\tilde{m}^{(N)}\right),$$

а функция $\varphi_N \equiv \varphi_N(z_1,...,z_N;\cdot)$ *определена равенством*

$$\tilde{\varphi}_N(z_1,...,z_N;x)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{k=1}^{N} z_k d_k(x)\exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(k)},x)\},$$

где $\left\{\tilde{m}^{(1)}=0,\tilde{m}^{(2)},...,\tilde{m}^{(N)}\right\}$ *– некоторое упорядочение множества*

$$A_n=\{m\in Z^s:|m_1|\le n,...,|m_s|\le n\},\ d_k(x)=\begin{cases}\left(\tilde{m}^{(k)},\tilde{m}^{(k)}\right)^{-1}, k\in\{2,...,N\},\\ -4\pi^2\omega(x),\ k=1.\end{cases}$$

Теорема 2. *При* $s\in\{5,6,...\}$ *величина* $\tilde{\varepsilon}_N=\dfrac{1}{N^{r/s}\sqrt{N}}$ *является предельной погрешностью оптимального оператора дискретизации* $(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N)$, *т.е.*

$$\Delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N,\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)\right)\underset{s,r,\omega}{\succ\prec}\delta_N\left(\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)\right) \tag{5}$$

и для любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ *положительной последовательности* $\{\eta_{N(K)}\}_{K\ge1}$ *имеет место равенство*

$$\overline{\lim_{K\to\infty}}\frac{\Delta_N\left(\eta_N\tilde{\varepsilon}_N,\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)\right)}{\delta_N(L_N)}=+\infty,N=N(K). \tag{6}$$

Доказательство теоремы 1. Для каждого $f\in W_2^r$ имеет место равенство

$$\tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f);x)=\omega(x)\hat{f}(0)-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in A_n}^{*}\frac{\hat{f}(m)}{(m,m)}\exp\{2\pi i(m,x)\}.$$

Следовательно, согласно равенству (2) получаем

$$u_\omega(x;f)-\tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f);x)=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\frac{\hat{f}(m)}{(m,m)}\exp\{2\pi i(m,x)\},$$

откуда, вследствие равенства Парсеваля имеем

$$\left\|u_\omega(\cdot;f)-\tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f);\cdot)\right\|_{L^2}\le\left(\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\frac{|\hat{f}(m)|^2}{(m,m)^2}\right)^{1/2}. \tag{7}$$

Легко убедимся в том, что

$$\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\frac{|\hat f(m)|^2}{(m,m)^2}\ll_s\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\frac{|\hat f(m)|^2\,(\overline{m}_1^{2r}+\ldots+\overline{m}_s^{2r})}{\overline{m}_1^{2r+4}+\ldots+\overline{m}_s^{2r+4}}. \qquad (8)$$

Для любого $m\in Z^s\setminus A_n$ найдется индекс $\theta\in\{1,\ldots,s\}$ такой, что $|m_\theta|\geq n.$ Поэтому, принимая во внимание неравенство Гёльдера и определение рассматриваемого класса из (8) получаем

$$\sum_{m\in Z^s\setminus A_n}\frac{|\hat f(m)|^2}{(m,m)^2}\ll_{r,s}\frac{1}{n^{2r+4}}.$$

Стало быть, в силу равенства $N=(2n+1)^s$ и (7),

$$\left\|u_\omega(\cdot;f)-\tilde\varphi_N(\tilde l_N^{(1)}(f),\ldots,\tilde l_N^{(N)}(f);\cdot)\right\|_{L^2}\ll_{r,s}\frac{1}{N^{(r+2)/s}}, \qquad (9)$$

отсюда в силу произвольности $f\in W_2^r$ следует

$$\delta_N((\tilde l^{(N)},\ \tilde\varphi_N))\ll_{s,r}\frac{1}{N^{(r+2)/s}}. \qquad (10)$$

Пусть заданы линейные функционалы

$$l_N^{(1)}:W_2^r\mapsto \mathrm{C},\ldots,l_N^{(N)}:W_2^r\mapsto \mathrm{C} \qquad (11)$$

и функция $\varphi_N(z_1,\ldots,z_N;y):\mathrm{C}^N\times[0,1]^s\mapsto \mathrm{C}$. При некотором $C_1(s,r)>0$ для множества

$U_N=\{m\in Z^S:1\leq\|m\|\leq C_1(s,r)N^{1/s}\}$ выполняются условия $|U_N|>2N$ и $|U_N|\succ\prec_s N$ (здесь и всюду ниже $|\Pi|$ есть число элементов множества Π). Следовательно, в силу леммы А из [9] для линейных функционалов (11) найдутся комплексные числа $c_m,\ m\in U_N$ такие, что

$$\sum_{m\in U_N}|c_m|^2=N, \qquad (12)$$

причем если $g_N(x)=\sum_{m\in U_N}c_m\exp\{2\pi i(m,x)\}$, то

$$l_N^{(1)}(g_N)=0,\ldots,\ l_N^{(N)}(g_N)=0. \qquad (13)$$

Функция $f_N(x)=\frac{C_2(s,r)}{N^{r/s}\sqrt{N}}g_N(x)$ принадлежит классу W_2^r. Действительно, учитывая (12) и соотношение $|U_N| \underset{s}{\succ\prec} N$, получаем

$$\sum_{m\in U_N} |\hat{f}_N(m)|^2\left(\overline{m}_1^{2r}+\ldots+\overline{m}_s^{2r}\right) \underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{s,r}{<<}\sum_{m\in U_N}\frac{|c_m|^2}{N^{2r/s}N}\left(\overline{m}_1^{2r}+\ldots+\overline{m}_s^{2r}\right)\underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{s,r}{<<}\frac{1}{N^{2r/s}N}\sum_{m\in U_N}|c_m|^2\left(\overline{m}_1^{2r}+\ldots+\overline{m}_s^{2r}\right)\underset{s,r}{<<}\frac{1}{N}\sum_{m\in U_N}|c_m|^2\underset{s,r}{<<}1.$$

Так как $0\notin U_N$, то $\hat{f}_N(0)=0.$ Поэтому из равенства (2) следует

$$u_\omega(x;f_N)=-\frac{C_2(s,r)}{4\pi^2N^{r/s}\sqrt{N}}\sum_{m\in U_N}\frac{c_m\exp\{-2\pi i(m,x)\}}{(m,m)}.$$

Поскольку

$$\left\|u_\omega(\cdot;f_N)\right\|_{L^2}\underset{s,r}{>>}\frac{1}{N^{r/s}\sqrt{N}}\left(\sum_{m\in U_N}c_m^2\frac{1}{(m,m)^2}\right)^{1/2}, \qquad (14)$$

и $(m,m)=m_1^2+\ldots+m_s^2\underset{s}{<<}\|m\|^2$, то в силу (12) и (14) получим

$$\left\|u_\omega(\cdot;f_N)\right\|_{L^2}\underset{s,r}{>>}\frac{1}{N^{(r+2)/s}}. \qquad (15)$$

Опираясь на включение $f_N\in W_2^r$ и равенства $l_N^{(1)}(f_N)=0,\ldots,l_N^{(N)}(f_N)=0,$ вытекающие из (13), имеем

$$\sup_{f\in W_2^r}\left\|u_\omega(\cdot;f)-\varphi_N(l_N^{(1)}(f),\ldots,l_N^{(N)}(f);\cdot)\right\|_{L^2}\geq$$

$$\geq\frac{1}{2}\left(\left\|u_\omega(\cdot;f_N)-\varphi_N(l_N^{(1)}(f_N),\ldots,l_N^{(N)}(f_N);\cdot)\right\|_{L^2}+\right.$$

$$\left.+\left\|u_\omega(\cdot;-f_N)-\varphi_N(l_N^{(1)}(-f_N),\ldots,l_N^{(N)}(-f_N);\cdot)\right\|_{L^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\| u_{\omega}(\cdot; f_N)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot)\right\|_{L^2}+\left\| u_{\omega}(\cdot;-f_N)-\varphi_N(0,\ldots,0;\cdot)\right\|_{L^2}\right)\geq \left\| u_{\omega}(\cdot; f_N)\right\|_{L^2},$$

откуда, принимая во внимание (15) получаем

$$\delta_N(L_N) \underset{s,r}{>>} \frac{1}{N^{(r+2)/s}}. \qquad (16)$$

Поэтому в силу неравенств (10) и $\delta_N(L_N)\leq \delta_N((\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N))$ выполняются соотношения (4).

Теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Для произвольно заданных чисел $\left|\gamma_N^{(1)}\right|\leq 1,\ldots,\left|\gamma_N^{(N)}\right|\leq 1$ справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_N^{(\tau)}\right)\tilde{\varepsilon}_N d_{\tau}(x)\exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)},x)\}\right\|_{L^2} \underset{s,r,\omega}{<<} \tilde{\varepsilon}_N\left(\sum_{1\leq \| m\| \leq n}\frac{1}{(m,m)^2}\right)^{1/2}. \qquad (17)$$

Следуя лемме 3 из статьи [10] можно легко доказать справедливость соотношения

$$\sum_{1\leq \| m\| \leq n}\frac{1}{(m,m)^2} \underset{s}{\succ\prec} n^{s-4} (s=5,6,\ldots). \qquad (18)$$

Стало быть, вследствие равенства $\tilde{\varepsilon}_N=\frac{1}{N^{r/s}\sqrt{N}}$ и неравенств (17) и (18), получаем

$$\left\| \sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_N^{(\tau)}\right)\tilde{\varepsilon}_N d_{\tau}(x)\exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)},x)\}\right\|_{L^2} \underset{s,r,\omega}{<<} \frac{1}{N^{(r+2)/s}}. \qquad (19)$$

Так как

$$\left\| u_{\omega}(x;f)-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N;x\right)\right\|_{L^2}\leq$$

$$\leq \left\| u_{\omega}(x;f)-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f),\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f);x\right)\right\|_{L^2}+$$

$$+\left\| \sum_{\tau=1}^{N}\left(-\gamma_N^{(\tau)}\right)\tilde{\varepsilon}_N d_{\tau}(x)\exp\{2\pi i(\tilde{m}^{(\tau)},x)\}\right\|_{L^2},$$

то в силу оценок (9) и (19) имеем

$$\left\| u_{\omega}(x;f)-\tilde{\varphi}_N\left(\tilde{l}_N^{(1)}(f)+\gamma_N^{(1)}\tilde{\varepsilon}_N,\ldots,\tilde{l}_N^{(N)}(f)+\gamma_N^{(N)}\tilde{\varepsilon}_N;x\right)\right\|_{L^2} \underset{s,r}{<<} \frac{1}{N^{(r+2)/s}},$$

откуда, в силу произвольности чисел $\gamma_N^{(\tau)}(\tau=1,\ldots,N)$ и функции f, следует

$$\Delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N,\left(\tilde{l}^{(N)},\tilde{\varphi}_N\right)\right) \underset{s,r}{<<} \frac{1}{N^{(r+2)/s}}. \qquad (20)$$

Поскольку

$$\delta_N(L_N) \le \delta_N\left(\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)\right) \le \Delta_N\left(\tilde{\varepsilon}_N, \left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right)\right),$$

то используя неравенства (16) и (20) получим соотношение (5).

Пусть символом Φ_N обозначено множество всех вычислительных агрегатов $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right)$ с функционалами $l_N^{(1)}(f) = \hat{f}\left(m^{(1)}\right), \ldots, l_N^{(N)}(f) = \hat{f}\left(m^{(N)}\right)$. Теперь убедимся в том, что для всех $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in \Phi_N$ и любой сколь угодно медленно возрастающей к $+\infty$ положительной последовательности $\{\eta_{N(K)}\}_{K \ge 1}$ имеет место равенство (6).

Для каждого $K \in \mathrm{N}$ определим множество $H_K = \{m \in Z^s : 1 \le \| m \| \le \beta_K^{-1/r} N^{1/s}\}$,

где $N = N(K)$, $\beta_K = \min\{\eta_N, \ln N\}$.

Ясно, что

$$|H_K| \underset{s,r}{\succ\prec} \frac{N}{\beta_K^{s/r}}. \tag{21}$$

Так как $\lim\limits_{K \to +\infty} \beta_K = +\infty$, то существует номер $K_0 \in \mathrm{N}$ такой, что для всех целых $K \ge K_0$ имеет место неравенство

$$\beta_K \ge 1. \tag{22}$$

Далее, для всех $K \ge K_0$ рассмотрим функцию $h_K(x) = \beta_K \tilde{\varepsilon}_N \sum\limits_{m \in H_K} \exp\{2\pi i(m, x)\}$.

Используя неравенств (21) и (22) имеем

$$\sum_{m \in Z^s} |\hat{h}_K(m)|^2 (\overline{m}_1^{2r} + \ldots + \overline{m}_s^{2r}) = \sum_{m \in H_K} |\hat{h}_K(m)|^2 (\overline{m}_1^{2r} + \ldots + \overline{m}_s^{2r}) \underset{s,r}{<<}$$

$$\underset{s,r}{<<} \beta_K^2 \tilde{\varepsilon}_N^2 \sum_{m \in H_K} N^{2r/s} \beta_K^{-2} \underset{s,r}{<<} \beta_K^{-s/r} \underset{s,r}{<<} 1.$$

Следовательно, при некотором $C_3(r, s) > 0$ функция $t_K(x) = C_3(r, s) h_K(x), K \ge K_0$ принадлежит классу W_2^r. Так как $\hat{t}_K(0) = 0$, то

$$u_\omega(x; t_K) = -\frac{C_3(s, r)\beta_K \tilde{\varepsilon}_N}{4\pi^2} \sum_{m \in H_K} \frac{\exp\{-2\pi\, i\,(m, x)\}}{(m, m)},$$

откуда, в силу соотношений (21) и (4), получаем

$$\left\| u_\omega(x; t_K) \right\|_{L^2} \underset{s,r}{>>} \beta_K^{1-(s-4)/(2r)} \delta_N(L_N). \tag{23}$$

Пусть $\tilde{\gamma}_N^{(\tau)} = -\frac{\hat{t}_K\left(m^{(\tau)}\right)}{\tilde{\varepsilon}_N \eta_N}$ и $\tilde{\nu}_N^{(\tau)} = -\frac{(-\hat{t}_K)\left(m^{(\tau)}\right)}{\tilde{\varepsilon}_N \eta_N}$, где $\tau \in \{1,\dots, N \equiv N(K)\}$. Тогда, в силу легко проверяемых неравенств $\left|\tilde{\gamma}_N^{(\tau)}\right| \le 1$, $\left|\tilde{\nu}_N^{(\tau)}\right| \le 1$ и равенств $\hat{t}_K\left(m^{(\tau)}\right) + \eta_N \tilde{\gamma}_N^{(\tau)} \tilde{\varepsilon}_N = 0$, $(-\hat{t}_K)\left(m^{(\tau)}\right) + \eta_N \tilde{\nu}_N^{(\tau)} \tilde{\varepsilon}_N = 0$, для всякой пары $\left(l^{(N)}, \varphi_N\right) \in \Phi_N$ имеем

$$\sup_{f \in W_2^r} \sup_{\left|\gamma_N^{(1)}\right| \le 1,\dots,\left|\gamma_N^{(N)}\right| \le 1} \Big\| u_\omega(\cdot, f) - \varphi_N\Big(\hat{f}\left(m^{(1)}\right) + \gamma_N^{(1)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N, \dots,$$

$$\hat{f}\left(m^{(N)}\right) + \gamma_N^{(N)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \cdot \Big)\Big\|_{L^2} \ge$$

$$\ge \max\Big\{ \Big\| u_\omega(\cdot, t_K) - \varphi_N\Big(\hat{t}_K\left(m^{(1)}\right) + \tilde{\gamma}_N^{(1)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N, \dots, \hat{t}_K\left(m^{(N)}\right) + \tilde{\gamma}_N^{(N)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \cdot \Big)\Big\|_{L^2},$$

$$\Big\| u_\omega(\cdot, -t_K) - \varphi_N\Big((-\hat{t}_K)\left(m^{(1)}\right) + \tilde{\nu}_N^{(1)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N, \dots, (-\hat{t}_K)\left(m^{(N)}\right) + \tilde{\nu}_N^{(N)} \eta_N \tilde{\varepsilon}_N; \cdot \Big)\Big\|_{L^2} \Big\} =$$

$$= \max\Big\{ \left\| u_\omega(\cdot; t_K) - \varphi_N(0,\dots, 0; \cdot) \right\|_{L^2}, \left\| u_\omega(\cdot; -t_K) - \varphi_N(0,\dots, 0; \cdot) \right\|_{L^2} \Big\} \ge \left\| u_\omega(\cdot; t_K) \right\|_{L^2}.$$

Стало быть, согласно (23) имеет место неравенство

$$\Delta_N\left(\eta_N \tilde{\varepsilon}_N, (l^{(N)}, \varphi_N)\right) \underset{s,r}{>>} \delta_N(L_N) \beta_K^{1-(s-4)/(2r)}. \qquad (24)$$

Так как $\left(\tilde{l}^{(N)}, \tilde{\varphi}_N\right) \in \Phi_N$ и $\lim\limits_{K \to +\infty} \beta_K^{1-(s-4)/(2r)} = +\infty$, то из (24) следует равенство (6).

Теорема 2 доказана.

Дискуссия

В [2, теорема 3.1] установлено, что оператор дискретизации

$$\varphi_N\left(f\left(\zeta^{(1)}\right), \dots, f\left(\zeta^{(N)}\right), x\right) = \frac{1}{N} \sum_{\zeta^{(n)} \in S_N} f\left(\zeta^{(n)}\right) \times$$

$$\times \left(\omega(x) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{\|k\| < p/2}^{*} \frac{\exp\{2\pi i (k, x - \varsigma^{(n)})\}}{(k,k)} \right), \qquad (25)$$

где для каждого $N = p^s$ $(p = 1,2,\dots)$ положено

$$S_N = \left\{ \zeta^{(n)} = \left(\frac{n_1}{p}, \dots, \frac{n_s}{p} \right), n \in Z^s, 0 \le n_j < p (j = 1,\dots, s) \right\},$$

приближает решение $u_\omega(x; f)$, $f \in W_2^r$ в метрике пространства L^2 с точностью $\frac{C_4(s,r)}{N^{r/s}}$, а также доказана неулучшаемость по порядку этой точности. Сравнивая точность $\frac{C_4(s,r)}{N^{r/s}}$ с полученной здесь точностью $\frac{C_5(s,r)}{N^{(r+2)/s}}$ заключаем, что предложенной нами оператор дискретизации $\tilde{\varphi}_N(\tilde{l}_N^{(1)}(f),...,\tilde{l}_N^{(N)}(f);x) = \omega(x)\hat{f}(0) - \frac{1}{4\pi^2} \sum_{m \in A_n}^{*} \frac{\hat{f}(m)}{(m,m)} \exp\{2\pi i(m,x)\}$

приближает решение $u_\omega(x;f),\ f \in W_2^r$ в метрике пространства L^2 с лучшей по порядку точностью, чем оператор дискретизации (25).

Заключение

Сформулированные и доказанные нами теоремы являются новыми результатами в теории приближений, численном анализе и вычислительной математике.

Данное исследование можно продолжить изучая задачи дискретизации решения $u_\omega(x;f)$ при других функциональных классах F, содержащих f, множествах D_N и нормированных пространствах Y.

Список использованных источников

[1] Коробов Н. М. Теоретико - числовые методы в приближенном анализе. – М.: 1963. –224 с.

[2] Баилов Е. А. Приближенное интегрирование и восстановление функций из анизотропных классов и восстановление решений уравнения Пуассона: дисс. … канд. физ.- мат. наук. Алматы, 1998.

[3] Bailov, E.A., Temirgaliev, N. (2006) Discretization of the Solutions to Poisson's Equation. Computational Mathematics and Mathematical physics, 46(9), 1515 – 1525. https://doi.org/10.1134/S0965542506090053

[4] Kudaibergenov, S.S., Sabitova, S.G.(2013) Discretizationof solutions to Poisson's equation in the Korobov class. Computational Mathematics and Mathematical physics, 53(7), 896–907. https://doi.org/10.1134/S0965542513070166

[5] Arystangalikyzy, A. (2023) Discretization of solutions of Poisson equation by inaccurate information. Bulletin of the L.N. Gumilov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series, 144(3), 39 – 44. https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2023/3.4

[6] Utesov, A.B., (2024) On Error Estimates for Discretization Operators for the Solution of the Poisson Equation. Differential Equations, Vol. 60, No. 1, pp. 136 –143. https://doi.org/10.1134/S0012266124010117

[7] Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. (2021) On Optimal Discretization of Solutionsof the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit. Differential Equations, 57 (12), 1726 –1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168

[8] Temirgaliev, N., Zhubanisheva, A.Zh.(2015) Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes. Computational Mathematics and Mathematical physics, 55(9), 1432-1443. DOI:10.1134/S0965542515090146

[9] Azhgaliev, Sh. U. (2007) Discretization of the solutions of the heat equation. Math. Notes, 82(2), 153 – 158. https://doi.org/10.1134/S000143460707019X

[10] Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. (2022) Optimal Computing Units in the Problem of Discretizing Solutions of the Klein – Gordon Equation and Their Limit Errors. Differential Equations, 58 (5), 703 – 716. DOI: 10.1134/S0012266122050093

References

[1] Korobov N.M. (1963) Teoretiko – chislovye metody v priblizhennom analize [Numerical – theoretic methods in approximate analysis]. M. –224 s. (In Russian)

[2] BailovE.A. (1998) Priblizhennoe integrirovanie i vosstanovlenie funkcij iz anizotropnyh klassov i vosstanovlenie reshenij uravnenija Puassona [Approximate integration and restoration of functions from

anisotropic classes and restoration of solutions to the Poisson equation]: diss. ... kand. fiz.- mat. nauk. Almaty. (In Russian)

[3] Bailov, E.A., Temirgaliev, N. (2006) Discretization of the Solutions to Poisson's Equation. Computational Mathematics and Mathematical physics, 46(9), 1515 – 1525. https://doi.org/10.1134/S0965542506090053

[4] Kudaibergenov, S.S., Sabitova, S.G.(2013) Discretization of solutions to Poisson's equation in the Korobov class. Computational Mathematics and Mathematical physics, 53(7), 896 –907. https://doi.org/10.1134/S0965542513070166

[5] Arystangalikyzy, A. (2023) Discretization of solutions of Poisson equation by inaccurate information. Bulletin of the L.N.Gumilov Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series, 144(3), 39 – 44. https://doi.org/10.32523/bulmathenu.2023/3.4

[6] Utesov, A.B. (2024) On Error Estimates for Discretization Operators for the Solution of the Poisson Equation. Differential Equations, Vol. 60, No. 1, pp. 136 –143 . https://doi.org/10.1134/S0012266124010117

[7] Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. (2021) On Optimal Discretization of Solutions of the Heat Equation and the Limit Error of the Optimum Computing Unit. Differential Equations, 57 (12), 1726 –1735. DOI: 10.1134/S0012266121120168

[8] Temirgaliev, N., Zhubanisheva, A.Zh. (2015) Informative Cardinality of Trigonometric Fourier Coefficients and Their Limiting Error in the Discretization of a Differentiation Operator in Multidimensional Sobolev Classes. Computational Mathematics and Mathematical physics, 55(9), 1432- 1443. DOI:10.1134/S0965542515090146

[9] Azhgaliev, Sh. U. (2007) Discretization of the solutions of the heat equation. Math. Notes, 82(2), 153 – 158. https://doi.org/10.1134/S000143460707019X

[10] Utesov, A.B., Bazarkhanova, A.A. (2022) Optimal Computing Units in the Problem of Discretizing Solutions of the Klein – Gordon Equation and Their Limit Errors. Differential Equations, 58 (5), 703 – 716. DOI: 10.1134/S0012266122050093