$$y^{(n+1)} = \left(y^{(n)}\right)' = \left(\frac{(-1)^n a^n n!}{(ax+b)^{n+1}}\right)' = \frac{(-1)^{n+1} a^{n+1} (n+1)!}{(ax+b)^{n+2}}.$$

Дәлелдеу керегі де осы.

7.1-мысал. $y = \ln x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

7.2-мысал. $y = \sin x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

7.3-мысал. $y = e^{\alpha x} \sin \beta x$ функцияның *n*-ретті туындысын табу керек.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Соминский И.С., Головина Л.И., Яглом И.М. О математической индукции. – М.: Наука. -144 с.*
2 *Винберг Э.Б. Курс алгебры. – 2-е изд.,стер. – М.:МЦНМО, 2013. – 590 с.*
3 *Ильин В.А., Садовничий В.А., Сендов Бл.Х. Математический анализ. – М.: МГУ,1985. – 662 с.*

МРНТИ 27.29.19
УДК 517.925

Иманбаев Н.С.[1,2]

[1]Южно-Казахстанский государственный педагогический университет, г. Шымкент, Казахстан
[2]Институт математики и математического моделирования, г. Алматы, Казахстан

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ СВОЙСТВ БАЗИСНОСТИ КОРНЕВЫХ ВЕКТОРОВ НАГРУЖЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В настоящей статье рассматривается возмущения дифференциального уравнения второго порядка спектральной задачи с нагруженным слагаемым, содержащий значение искомой функции в точке нуль, с регулярными, но неусиленно регулярными краевыми условиями. Исследуется вопрос базисности систем собственных и присоединенных функций (СиПФ) нагруженного оператора кратного дифференцирования. Известно, что система собственных функций оператора, заданного формально самосопряженным дифференциальным выражением, с произвольными самосопряженными краевыми условиями, обеспечивающими дискретный спектр, образует ортономированный базис. Наряду с этим, известно, что в случае несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов на базисность систем корневых функций, помимо краевых условий, могут влиять также значения коэффициентов дифференциального оператора. При этом базисные свойства корневых функций могут изменяться даже при сколь угодном малом изменении значений коэффициентов. Такой факт был отмечен в работе В.А. Ильина. В настоящей работе построен характеристический определитель рассматриваемой спектральной задачи, который является целой аналитической функцией. Доказана теорема о неустойчивости свойств базисности корневых векторов и построен сопряженный оператор, который является задачей Самарского-Ионкина с интегральным возмущением.

Ключевые слова: собственные значение, корневые вектора, нагруженный оператор, базисность Рисса.

Аңдатпа

Иманбаев Н.С.[1,2]
[1]Оңтүстік Қазақстан мемлекеттік педагогикалық университеті, Шымкент, Қазақстан
[2]Математика және математикалық модельдеу институты, Алматы, Қазақстан

ЕКІНШІ РЕТТІ ЖҮКТЕЛІНГЕН ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ОПЕРАТОРДЫҢ ТҮБІРЛІК ВЕКТОРЛАРЫНЫҢ БАЗИСТІЛІК ҚАСИЕТТЕРІНІҢ ОРНЫҚСЫЗДЫҒЫ ЖӘЙЛІ

Бұл мақалада регулярлы, бірақ күшейтілген регулярлы емес шеттік шарттармен берілген жүктелінген екінші ретті дифференциалдық операторлдың спектралдық есебі қарастырылады. Еселі дифференциалданатын жүктелген операторлдың түбірлік векторлар жүйесінің базистілігі зерттеледі. Өзіне өзі түйіндес шеттік шарттармен өзіне өзі түйіндес формальді дифференциалдық амалмен берілген, спектрі дискретті болатын оператордың меншікті функцияларының жүйесінің ортонормаланған базис құратындығы белгілі жай. Сондай-ақ , өзіне өзі түйіндес емес жай дифференциалдық операторлардың түбірлік векторларының жүйесінің базистілігіне шеттік шарттардан бөлек, дифференциалдық оператордың коэффициенттері де әсер ететіндігі белгілі. Коэффициенттер шамалы өзгергенде түбірлік функциялардың базистілік қасиеттеріне бірден әсер етеді. Мұндай эффекті туралы алғаш рет В.А. Ильиннің еңбегінде жарияланды. Біз қарастырып отырған есептің характеристикалық анықтауышы есептеліп, оның бүтін аналитикалық функция болатындығы көрсетілген. Түйіндес операторы жазылып, оның интегралдық толқытылған Самарский-Ионкин есебі екендігі айқындалған. Түбірлік функциялар жүйесінің базистілік қасиеттерінің орнықсыздығы дәлелденген.

Түйін сөздер: меншікті мәндер, түбірлік векторлар, жүктелінген оператор, Рисс базистілігі.

Abstract

NON STABILITY ON BASIS PROPERTY OF SYSTEMS ROOT VECTORS OF A LOADED MULTIPLE DIFFERENTIATION OPERATOR

Imanbaev N.S.[1,2]

[1]South Kazakhstan State Pedagogical University,Shymkent, Kazakhstan

[2]Institute of Mathematics and Mathematical Modelling,Almaty, Kazakhstan

In this paper we consider perturbations of a second order differential equation of the spectral problem with a loaded term, containing a value of the unknown function at the point zero, with regular, but not strongly regular boundary value conditions. Question about basis property of eigen functions and associated functions (E&AF) systems of a loaded multiple differentiation operator is studied. In the case of non-self-adjoint ordinary differential operators, the basis property of systems of eigen functions and associated functions (E&AF), in addition to the boundary value conditions, can be affected by values of coefficients of the differential operator. Moreover, it is known that the basic properties of E&AF can be changed at a small change of values of the coefficients. This fact was first noted in Il'in V.A. In this paper problem non stability on basis property of systems root vectors of a loaded multiple differentiation operator.

Keywords: eigen values, root vectors, loaded operator, Riesz basis.

Введение. На базисность систем корневых векторов несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, кроме краевых условий, также влияют значения коэффициентов дифференциального оператора. В работе В.А.Ильина [1] впервые отмечен факт, что базисные свойства корневых функций изменяться при изменении значений коэффициентов. В случае несамосопряженного возмущения самосопряженной периодической задачи результаты работы [1] развивались в работах [2], [3], где оператор изменялся при возмущении одного из краевых условий. Другой вариант несамосопряженного возмущения самосопряженной периодической задачи исследовалась в [4], где возмущение происходит при изменении уравнения, которое относятся к нагруженным дифференциальным уравнениям, при этом изучена базисные свойства корневых векторов, тем самым отличается от работы [2], [3].

В работах [5], [6] исследованы свойства базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов, где распростронен метод спектральных разложений В.А.Ильина [1] на случай нагруженных дифференциальных операторов. В работе [7] изучены вопросы базисности функционально-дифференциальных уравнений с другими методами.

Свойство базисности Рисса системы корневых функций периодических и антипериодических задач Штурма-Лиувилля изучались в [8].

В случае, когда потенциал равно нулю, системой собственных функций периодической задачи является обычная тригонометрическая система, которая образует полную ортонормированную систему в $L_2(0,1)$. А если потенциал отлична от нуля, тогда требуется дополнительное исследование, которое ответом является результаты работы [4].

Постановка задачи и основной результат работы.

Рассматриваем другой вариант возмущения, а именно спектральную задачу для дифференциального оператора второго порядка с нагруженным слагаемым, содержащий значение производной от искомой функции в точке нуль:

$$L_1 u = -u''(x) + \overline{q(x)} \cdot u'(0) = \lambda u(x), \ \ 0 < x < 1, \tag{1}$$

$$u'(1) = 0, \ \ u(0) - u(1) = 0, \tag{2}$$

где $q(x) \in L_2(0,1)$.

Определим сопряженный оператор L_1^*. Используя формулу Лагранжа для всех $u \in D(L_1)$ и $v \in D(L_1^*)$, находим L_1^* с учетом краевых условий (2):

$$\int_0^1 L_1(u)\overline{v(x)}dx-\int_0^1 u(x)\overline{L_1^*(v)}dx=u'(0)\cdot\left[\int_0^1 q(x)v(x)dx-v(0)\right]+u(0)\cdot[v'(0)-v'(1)]-\int_0^1 u(x)v''(x)dx$$

Следовательно, оператор L_1^* является сопряженным оператором к оператору L_1, которое задается дифференциальным выражением:

$$L_1^*(v)=-v''(x)=\bar{\lambda}v(x),\ 0<x<1 \tag{3}$$

и краевыми условиями

$$V_1(v)=v'(0)-v'(1)=0,\ V_2(v)=v(0)=\int_0^1 q(x)v(x)dx,\quad q(x)\in L_2(0,1) \tag{4}$$

Если $q(x)\equiv 0$, то эта задача называется Самарского-Ионкина [9].

Заметим, что сопряженный оператор к оператору L_1^* будет оператор L_1, то есть $\left(L_1^*\right)^*=L_1$. Здесь после применение формулы Лагранжа интегрируем по частям, с учетом краевых условий (4). Согласно результатам работы [10] сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций, поэтому исследуем возмущенную спектральную задачу Самарского-Ионкина (3)-(4).

Представляя общее решение уравнения (3) при $\lambda\neq 0$ по формуле

$$u(x,\lambda)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x$$

и удовлетворяя его краевым условиям (4) получаем линейную систему относительно коэффициентов C_1, C_2:

$$\begin{cases} C_1\sin\sqrt{\lambda}+C_2\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right)=0,\\ C_1\left[1-\int_0^1 q(x)\cos\sqrt{\lambda}xdx\right]-C_2\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{\lambda}xdx=0.\end{cases}$$

Определитель этой системы будет характеристическим определителем задачи (3)-(4):

$$\Delta_1^*(\lambda)=\begin{vmatrix}\sin\sqrt{\lambda} & 1-\cos\sqrt{\lambda}\\ 1-\int_0^1 q(x)\cos\sqrt{\lambda}xdx & -\int_0^1 q(x)\sin\sqrt{\lambda}xdx\end{vmatrix} \tag{5}$$

При $q(x)=0$ получается характеристический определитель невозмущенной задачи Самарского-Ионкина, то есть $\Delta_0(\lambda)=1-\cos\sqrt{\lambda}$.

Число $\lambda_0^0=0$ является однократным собственным значением, $u_0(x)=\sqrt{3}x$ – соответствующей собственной функцией невозмущенной задачи Самарского-Ионкина. Другие собственные значения невозмущенной задачи Самарского-Ионкина являются двукратным, то есть $\lambda_k^0=(2\pi k)^2,\quad k=1,2,3,...,\quad u_{ko}^0=\sqrt{2}\sin(2\pi kx)$ – соответствующая им собственная функция, $u_{k1}^0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x\cdot\cos(2\pi kx)$ – присоединенная функция. По условию биортогональности $\left(u_{k1}^0,v_{k1}^0\right)=1$ имеем $v_{k1}^0=4\sqrt{2}\cos(2\pi kx)$ - собственную и $v_{k0}^0=2\sqrt{2}(1-x)\sin(2\pi kx)$ – присоединенную функций сопряженной задачи к невозмущенной задаче Самарского-Ионкина.

Функция $q(x)$ представим в виде биортогонального разложения в ряд Фурье по системе $\left\{v_{k0}^0,v_{k1}^0\right\}$ [11]:

$$q(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}\cdot v_{k0}^0+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k1}\cdot v_{k1}^0=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}\cdot 2\sqrt{2}(1-x)\sin(2\pi kx)+\sum_{k=0}^{\infty}a_{k1}\cdot 4\sqrt{2}(1-x)\cos(2\pi kx) \tag{6}$$

Используя разложение (6) вычислим входящие в (5) интегралы:

$$\int_0^1 q(x)\cdot\cos\sqrt{\lambda}x dx = 4\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k1}}{\lambda-(2\pi k)^2}+2\sqrt{2}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2\pi k\cdot a_{k0}}{\lambda-(2\pi k)^2}\left[1-\frac{2\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{\lambda-(2\pi k)}\right]\right),$$

$$\int_0^1 q(x)\cdot\sin\sqrt{\lambda}x dx = -2\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k0}}{\lambda-(2\pi k)^2}-2\sqrt{2}\sin\sqrt{\lambda}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\pi k\cdot a_{k0}}{\lambda-(2\pi k)^2}+$$

$$+4\sqrt{2}\sqrt{\lambda}\left(1-\cos\sqrt{\lambda}\right)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_{k1}}{\lambda-(2\pi k)^2}$$

Тогда после преобразования определитель (5) приводится к виду:

$$\Delta_1^*(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\cdot P(\lambda),\ \text{где}\ P(\lambda)=\left(1+4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{\infty}a_{k0}\frac{k}{\lambda-(2\pi k)^2}\right) \tag{7}$$

Итак, доказана

Утверждение 1. Характеристический определитель спектральной возмущенной задачи (3)-(4) Самарского-Ионкина, представим в виде (7), где $\Delta_0(\lambda)$ – характеристический определитель невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина, a_{k0} - коэффициенты Фурье биортогонального разложения (6) функции $q(x)$ по системе собственных и присоединенных функций сопряженной невозмущенной спектральной задачи Самарского-Ионкина.

Функция $P(\lambda)$ из (7) имеет полюса первого порядка в точках $\lambda=\lambda_k^0$, но функция $\Delta_0(\lambda)$ имеет нули второго порядка в этих точках, поэтому $\Delta_1^*(\lambda)$ является целой аналитической функцией переменного λ.

Если при фиксированном индексе j коэффициенты разложения (6) $a_{j_0}=0$, тогда $\lambda_j^1=\lambda_j^0$ является двукратным собственным значением возмущенной задачи (3) – (4). В этом случае $q(x)$ в виде (6) представляется с конечной первой суммой, то есть, когда существует такой номер N, что $a_{k0}=0\quad \forall k>N$, формула (7) имеет следующий вид:

$$\Delta_1^*(\lambda)=\Delta_0(\lambda)\cdot\left(1+4\sqrt{2}\pi\sum_{k=1}^{N}a_{k0}\frac{k}{\lambda-(2\pi k)^2}\right) \tag{8}$$

Из формулы (7) имеет две серии собственных значений возмущенной задачи (3) – (4). В формуле (8) заметим, что $\forall k>N,\quad \Delta_1^*(\lambda_k^0)=0$, то есть все собственные значения $\lambda_k^0,\quad k>N$, невозмущенной задачи Самарского-Ионкина. А также убедимся, что сохраняется кратность собственных значений $\lambda_k^0,\quad k>N$.

Из условий ортогональности $q(x)\perp u_{j_0}^0,\quad q(x)\perp u_{j_1}^0,\quad \forall j>N$ следует

$$\int_0^1 q(x)u_{j_0}^0(x)dx=\int_0^1 q(x)u_{j_1}^0(x)dx=0.$$

Поэтому $u_{j_0}^0$ – собственные и $u_{j_1}^0$ – присоединенные функции невозмущенной задачи Самарского-Ионкина $\forall j>N$ удовлетворяют краевым условиям (4) и, следовательно, являются собственными и присоединенными функциями возмущенной задачи (3) – (4) и система корневых функций невозмущенной задачи Самарского-Ионкина отличаются по конечному числу первых членов. Итак, система корневых функций возмущенной задачи (3) – (4) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$.

Обозначим через B множество функций $q(x)\in L_2(0,1)$ таких, что система собственных и присоединенных функций задачи (3) – (4) образует базис Рисса в $L_2(0,1)$; $\overline{B}=L_2(0,1)\setminus B$.

Так как множество $q(x)$, представимых в виде конечного ряда (6), является плотным в $L_2(0,1)$.

Покажем теперь, что свойство базисности собственных и присоединенных функций возмущенной задачи (3) – (4) является неустойчивым при интегральном возмущении краевого условия.

Итак, сформулируем доказанный и доказуемый результаты в виде следующего:

Утверждение 2. Пусть $q(x) \in L_2(0,1)$. Тогда множества B и $\overline{B}$ всюду плотны в $L_2(0,1)$.

Доказательство. Достаточно показать, что на множестве $\overline{B}$ система собственных и присоединенных функций возмущенной задачи (3) – (4) не образует обычного базиса.

Пусть j - достаточно большой номер так, что $a_{j_0} \neq 0$, $a_{j_1} = 0$. Тогда из (7) нетрудно видеть, что $\lambda_j^0 = (2\pi j)^2$ - является однократным собственным значением задачи (3) – (4). Непосредственным вычислением получим, что соответствующей этому значению собственной функцией задачи (1) – (2) является $u_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi jx)$ и $\left\|u_j^1(x)\right\|^2 = 1$).

Найдем собственную функцию задачи (3) – (4). Для достаточно больших $\lambda = \lambda_j^0 = (2\pi j)^2$ первое уравнение системы относительно коэффициентов C_1, C_2 обращается в тождество, а второе уравнение преобразуется к виду

$$C_1\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\cdot\frac{a_{j_0}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{\infty} a_{k_0}\frac{k}{j^2-k^2}\right] - C_2\frac{a_{j_0}}{\sqrt{2}} = 0.$$

Так как $a_{j_0} \neq 0$, то отсюда выражаем C_2 через C_1. Поэтому собственная функция задачи (3) – (4) имеет вид:

$$v_j^1(x) = C_1\left\{\cos(2\pi jx) + \frac{\sqrt{2}}{a_{j_0}}\left[1 - \frac{\sqrt{2}}{4\pi}\cdot\frac{a_{j_0}}{j} + \frac{\sqrt{2}}{\pi}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{\infty} a_{k_0}\frac{k}{j^2-k^2}\right]\cdot\sin(2\pi jx)\right\}.$$

Константу C_1 выбираем из условия биортогональности $\left(u_j^1(x), v_j^1(x)\right) = 1$. Легко видеть, что $C_1 = \sqrt{2}$. Итак, собственная функция задачи (3) – (4):

$$v_j^1(x) = \sqrt{2}\cos(2\pi jx) - \left[\frac{1}{\sqrt{2}\pi j} - \frac{2}{a_{j_0}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sum_{k\neq j,\,k=1}^{\infty} a_{k_0}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right]\cdot\sin(2\pi jx).$$

Вычисляя норму в $L_2(0,1)$ находим:

$$\left\|v_j^1(x)\right\|^2 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\left|\frac{1}{\sqrt{2}\pi j} - \frac{2}{a_{j_0}}\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{\pi}\cdot\sum_{k=1,\,k\neq j}^{\infty} a_{k_0}\frac{k}{j^2-k^2}\right)\right|^2.$$

Согласно теореме Юнга [11] имеем

$$\lim_{x\to+\infty}\sum_{k=1,\,k\neq j}^{\infty} a_{k_0}\frac{k}{j^2-k^2} = 0,$$

поэтому

$$\lim_{j\to+\infty}\left\|v_j^1(x)\right\|^2 = 1 + 2\lim_{j\to+\infty}\left|\frac{1}{a_{j_0}}\right|^2 = +\infty.$$

Следовательно, $\lim\limits_{j\to\infty}\left\|v_j^1(x)\right\|\cdot\left\|u_j^1(x)\right\| = \infty$. Значит условие равномерной минимальности [12] системы не выполняется. Поэтому не образует обычного базиса в $L_2(0,1)$. Вторая часть утверждение 2 доказана.

Так как сопряженные операторы одновременно обладают свойством базисности Рисса корневых функций [10], то отсюда получаем основной результат настоящей работы:

Утверждение 3. Множество B, для которых система собственных функций оператора L_1, то есть спектральной задачи (1) – (2) для нагруженного дифференциального уравнения образует базис Рисса в $L_2(0,1)$ всюду плотно в $L_2(0,1)$. Множество $\overline{B}$ также всюду плотно $L_2(0,1)$.

В заключение отметим, что в работе [13] было исследована устойчивость свойства базисности систем собственных и присоединенных функций оператора Штурма-Лиувилля при нелокальном возмущении, в последней работе [14] исследована устойчивость базисных свойств собственных и присоединенных функций нагруженного оператора кратного дифференцирования, когда в уравнении участвует искомая функция со значением в нуле.

Автор поддержан грантом AP05132587 МОН РК на 2018-2020 годы.

Список использованной литературы:

1 Ильин В.А. О связи между видам краевых условий и свойствами базисности и равносходимости с тригонометрическим рядом разложений по корневым функциям несамосопряженного дифференциального оператора // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30, №9. С.1516-1529.

2 Макин А.С. О нелокальном возмущении периодической задачи на собственные значения // Дифференциальные уравнения. 2006. Т.42, №4. С.560-562.

3 Садыбеков М.А., Иманбаев Н.С. О базисности корневых функций периодической задачи с интегральным возмущением краевого условия // Дифференциальные уравнения. 2012. Т.48, №6. С.889-893.

4 Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Базисные свойства корневых функций нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Доклады НАН РК. 2010. №2. С.11-13.

5 Ломов И.С. Свойство базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка на интервале // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27, №1. С.80-94.

6 Ломов И.С. Теорема о безусловной базисности корневых векторов нагруженных дифференциальных операторов второго порядка // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27, №9. С.1550-1563.

7 Гомилко А.М., Радзиевский Г.В. Базисные свойства собственных функций регулярной краевой задачи для векторного функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1991. Т.27, №3. С.385-395.

8 Велиев О.А., Шкаликов А.А. О базисности собственных и присоединенных функций периодической и антипериодической задачи Штурма-Лиувилля // Математические заметки. 2009. Т.85, Вып.5. С.671-686.

9 Ильин В.А., Крицков Л.В. Свойства спектральных разложений, отвечающих несамосопряженным операторам // Функциональный анализ. Итоги науки и техники. Серия Современной математики и ее приложения. Темат. обз. - Т.96. М.: ВИНИТИ. - 2006. С.5-105.

10 Иманбаев Н.С., Садыбеков М.А. Об устойчивости свойства базисности одного типа задач на собственные значения при нелокальном возмущении краевого условия // Уфимский математический журнал. 2011. Т.3, №2. С.28-33.

11 Харди Г.Г., Литтлвуд Дж.Е., Полиа Г. Неравенства. – М.: ИЛ. 1948. 456с.

12 Функциональный анализ (под ред. С.Г.Крейна). М.: Наука. 1972.

13 Imanbaev N.S. Study basicity of root functions of the Sturm-Liouville operator with a non-local perturbation//Вестник КазНПУ им. Абая, серия «Физико-математические науки». – 2018. – №1(61). – С. 73-76.

14 Imanbaev N.S. On basis property of systems root vectors of a loaded multiple differentiation operator// News of the National Academy of sciences of the Republic of Kazakhstan. Physico-mathematical series. Vol. 1, Number 329 (2020), 32-37. https://doi.org/10.32014/2020.2518-1726.4