МРНТИ 28.15.15

10.51889/2959-5894.2024.86.2.004

К.С. Дальбекова[1], С.Б. Беркимбаева[1], Ф.Р. Гусманова[2*], Р.С. Аккозиева[1], А.К. Искакова[1]

[1]Университет международного бизнеса, г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
e-mail: grfarida77@gmail.com

СТАБИЛИЗАЦИЯ ДВИЖЕНИЯ КВАДРАТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ НА КОНЕЧНОМ ОТРЕЗКЕ ВРЕМЕНИ

Аннотация

К исследованию нестационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений приводят многие задачи механики и техники, в частности, задачи анализа систем управления и навигации движущихся объектов. Для их успешного решения необходимы эффективные, удобные в применении методы исследования процессов, протекающих в нестационарных линейных системах. Требуется найти такие управляющие воздействия для системы квадратических дифференциальных уравнений, которые будут обеспечивать устойчивость на конечном отрезке времени положения равновесия системы. В статье получено управление такого вида, которое стабилизирует систему квадратических дифференциальных уравнений определенного вида на конечном отрезке времени. Для линейной нестационарной системы было построено управление стабилизирующее данную систему на конечном отрезке времени. Используя условия стабилизации движения было показано выполнения всех условий теоремы о стабилизации движения на конечном отрезке времени.

Ключевые слова: устойчивость движения, линейные нестационарные системы, конечный отрезок времени, фундаментальная матрица, квадратические дифференциальные уравнения, стабилизация движения.

Қ.С. Дальбекова[1], С.Б. Беркімбаева[1], Ф.Р. Гусманова[2*], Р.С. Аккозиева[1], А.К. Искакова[1]
[1]Халықаралық бизнес университеті, Алматы қ., Қазақстан
[2]әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ., Қазақстан

КВАДРАТТЫҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ ҚОЗҒАЛЫСЫН ШЕКТЕУЛІ УАҚЫТ АРАЛЫҒЫНДА ТҰРАҚТАНДЫРУ

Аңдатпа

Механика мен техниканың көптеген мәселелері қарапайым дифференциалдық теңдеулердің стационарлық емес сызықтық жүйелерін, атап айтқанда басқару жүйелерін талдау және қозғалатын объектілерді навигациялау мәселелерін зерттеуге әкеледі. Оларды сәтті шешу үшін стационарлық емес сызықтық жүйелерде жүретін үрдістерді зерттеудің тиімді, қолдануға оңай әдістері қажет. Шектеулі уақыт аралығында жүйенің тепе-теңдік жағдайының тұрақтылығын қамтамасыз ететін квадраттық дифференциалдық теңдеулер жүйесі үшін осындай басқару әрекеттерін табу керек. Мақалада белгілі бір типті квадраттық дифференциалдық теңдеулер жүйесін шектеулі уақыт аралығында тұрақтандыратын басқару элементін табу есебі қарастырылған. Сызықтық стационар емес жүйе үшін шектеулі уақыт аралығында берілген жүйені тұрақтандыратын басқару ққрылды. Қозғалысты тұрақтандыру шартын пайдалана отырып шектеулі уақыт аралығында қозғалысты тұрақтандыру туралы теореманың барлық шарттарының орындалатыны көрсетілді.

Түйін сөздер: қозғалыс тұрақтылығы, сызықты стационарлы емес жүйелер, шектеулі уақыт аралығы, іргелі матрица, квадраттық дифференциалдық теңдеулер, қозғалысты тұрақтандыру.

K.S. Dalbekova[1], S.B. Berkimbaeva[1], F.R. Gusmanova[2]*, R.S. Akkozieva[1], A.K. Iskakova[1]
[1]University of international business, Almaty, Kazakhstan
[2]al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan

STABILIZATION OF MOTION OF QUADRATIC DIFFERENTIAL SYSTEMS ON A FINITE TIME PERIOD

Abstract

Many problems in mechanics and technology lead to the study of nonstationary linear systems of ordinary differential equations, in particular, problems in the analysis of control systems and navigation of moving objects. To solve them successfully, effective, easy-to-use methods for studying processes occurring in non-stationary linear systems are required. It is required to find such control actions for a system of quadratic differential equations that ensure stability of the equilibrium position of the system over a finite period of time. In the article, a control of this type is obtained that stabilizes a system of quadratic differential equations of a certain type over a finite period of time. For a linear non-stationary system, a control was constructed to stabilize this system over a finite period of time. Using the conditions for stabilizing motion, it was shown that all the conditions of the theorem on stabilizing motion are fulfilled over a finite period of time.

Keywords: motion stability, linear non-stationary systems, finite time interval, fundamental matrix, quadratic differential equations, motion stabilization.

Основные положения

При изучении различных процессов, происходящих в реальной действительности, приходится сталкиваться с одним из наиболее важных понятий - понятием об устойчивости движения. Основы теории устойчивости движения были разработаны в конце прошлого века русским ученым А.М. Ляпуновым. Им было предложено два метода решения задач устойчивости. Второй (или, как говорят прямой) метод Ляпунова является мощным строгим аналитическим и весьма эффективным методом при решении многих теоретических и прикладных вопросов устойчивости движения. Изложение и развитие этой теории полно освещены в известной монографии А.М.Ляпунова, а также в работах Н.Г. Четаева, Е.А. Барбашина, Н.Н. Красовского, В.И. Зубова, И.Г. Малкина, А.М. Летова, К.П. Персидского и других.

Введение

Как известно, устойчивость по Ляпунову рассматривается на бесконечном интервале времени, что является серьезным препятствием для многих приложений, так как большинство объектов исследования функционируют в течение конечного промежутка времени. В этой связи развитие метода функции Ляпунова применительно к исследованию устойчивости и стабилизации движения на "конечном отрезке времени представляется актуальной задачей.

К исследованию нестационарных линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений приводят многие задачи механики и техники. Они исследованы многими авторами (А.М. Ляпунов, Н.Г. Четаев, Н.П. Еругин, К.А. Абгарян и др.). Наличие зависимости коэффициентов системы от времени вносит принципиальные трудности в изучении структурных свойств системы (устойчивости, управляемости, и наблюдаемости). Исследование устойчивости линейных нестационарных систем на конечном отрезке времени, обеспечивающее точное попадание к началу координат за конечное время.

Методология исследования

Наличие зависимости коэффициентов системы от времени вносит принципиальные трудности в изучении структурных свойств системы (устойчивости, управляемости и наблюдаемости). В статье рассматривается задача исследования стабилизации движения квадратических дифференциальных систем на конечном отрезке времени, обеспечивающее точное попадание к началу координат на конечном интервале времени.

Теоретические исследования проводились на основе общей теории обыкновенных дифференциальных уравнений, теории матриц, теории устойчивости движения и теории управляемости.

Рассмотрим линейную нестационарную функцию

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \qquad x(t_0) = x_0, \quad t \in [t_0, T), \tag{1}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – матрицы размерности $n \times n$, $n \times r$ соответственно, элементами которых являются кусочно-непрерывные действительные функции времени [1,2]. В частности, A и B могут быть постоянными матрицами или $A(t)x$ не имеет особую точку $(t, x) = (T, x(T) = 0)$ типа $\frac{0}{0}$.

Множество $U \in E^n$, то есть ограничение на управление отсутствует.

Пусть $\Phi(t)$ фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x,$$

Тогда матрицу $\Phi(t)$ можно определить из матричного дифференциального уравнения [3]

$$\dot{\Phi}(t) = A(t)\Phi(t), \quad \Phi(t_0) = E_n$$

Составляем матрицу $\Phi(t,\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$, определяемую из матричного дифференциального уравнения вида

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(t,t) = E_n$$

Результаты исследования

Справедлива следующая теорема:

Теорема 1. Управление вида

$$u_0(t,x) = -B^*(t)K(t)x, \quad t \in [t_0, T), \tag{2}$$

где

$$K(t) = W^{-1}(t,T), \qquad t \in [t_0, T), \tag{3}$$

$$W(t,T) = \int_t^T \Phi(t,\tau)B(\tau)B^*(\tau)\Phi(t,\tau)d\tau,$$

$\Phi(t,\tau)$ является решением системы

$$\frac{d}{dt}\Phi(t,\tau) = A(t)\Phi(t,\tau), \quad \Phi(t,t) = E_n$$

$W(t,T)$, $\forall t \in [t_0, T)$ положительно-определенная матрица, осуществляет стабилизацию движения системы (1) на конечном отрезке времени [4].

Далее, рассмотрим уравнение возмущенного движения, описываемого системой квадратических дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = a_i(t)x + x^* D_i(t)x + B_i(t)u, \qquad (4)$$

$$t \in [t_0, T), \quad x(t_0) = x_{0,} \quad i = \overline{1, n}$$

где $a_i(t) = (a_{i1}(t), a_{i2}(t), \ldots, a_{in}(t))$ – вектор-строка,
$D_i(t) -$ симметричная $n \times n -$ матрица,
$u = u(t) -$ скалярное управление, $B_i(t) -$ скалярная функция.
где $A(t) = \left(a_{ij}(t)\right)$, $B(t) = colon\ (B_1(t), \ldots, B_n(t))$

Тогда справедлива следующая теорема [5].

Теорема 2. Пусть выполняются все условия теоремы 1 для системы (1) и

$$u(t,x) = u^0(t,x) + v(t,x), \qquad t \in [t_0, T) \qquad (5)$$

где скалярная функция

$$v(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} x R_i^*(t,x)x, \qquad z_i = K_i\,(t) \qquad (6)$$

$\dot{K}_i(t) = (K_{i1}(t), \ldots, K_{in}(t)) - i$-ая строка матрицы $K(t)$, $n -$мерные векторы $R_i(t,x)$, $i = \overline{1, n}$

такие, что

$$KB(t)R_i^*(t,x) + R_i(t,x)B^*K = 2D_i(t), \qquad i = \overline{1, n} \qquad (7)$$

Тогда управление вида (5) разрешает задачу о стабилизации движения на конечном отрезке времени для системы (4)

Доказательство:

Рассмотрим функцию Ляпунова вида [6-8]:

$$V(t,x) = x^* K(t)x, \qquad t \in [t_0, T),$$

Полная производная которой по времени в силу системы (4) имеет вид:

$$\dot{V}\big(t, x(t)\big) = x^* K(t)x + 2\sum_{i=1}^{n} K_i\,(t)x(a_i(t)x + x^* D_i(t)x + B_i(t)u =$$

$$= x^*\left(\dot{K} + KA(\dot{t}) + A^*(t)K\right)x + 2x^*\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\, D_i(t)\right)x + 2x^* KB(t)u(t,x) \qquad (8)$$

Если управление $u(t,x)$ будем определять из условия (5), то из (8) получим

$$\dot{V}\big(t, x(t)\big) = x^*\left(\dot{K} + KA(\dot{t}) + A^*(t)K - KB(t)B^*(t)K\right)x +$$

$$+2x^*\left(\sum_{i=1}^{n} z_i\, D_i(t)\right)x - x^* KB(t)B^*(t) + 2x^* KB(t)v(t,x).$$

Решение матричного дифференциального уравнения [9]

$$\dot{K} + KA + A^*K - KBB^*K = 0$$

имеет вид (3) и по условию теоремы получим неравенство

$$\dot{V}((t,x(t)) \leq 2x^* \sum_{i=1}^{n} z_i \left[D_i(t) - \frac{1}{2}KB(t)R_i^*(t) + R_i(t)B^*(t)K\right] x = 0$$

Согласно условиям теорем 1 и 2 можно показать выполнения всех условий теоремы о стабилизации движения на конечном отрезке времени [9, 10].

В качестве примера рассмотрим движение твердого тела с одной осью симметрии, управляемого двумя двигателями, которое описывается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x_1} = -\alpha x_2 x_3 + u_1 cos\omega t \\ \dot{x_2} = -\alpha x_1 x_3 + u_1 sin\omega t \\ \dot{x_3} = u_2, \;\; \alpha = const \end{cases} \tag{9}$$

где $x_1,\ x_2,\ x_3$ – проекции угловой скорости тела на оси, жестко связанные с ним;
ω – угловая скорость вращения первого двигателя;
u_1 и u_2 – управляющие моменты.

Задача состоит в построении управления $u_1(t,x)$ и $u_2(t,x)$ переводящего тело из произвольного состояния $x(0) = x_0$ в точку 0 $(x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ за конечное время.

Дана система квадратических дифференциальных уравнений:
где

$$A = 0, \qquad B = \begin{pmatrix} cos\omega t & 0 \\ -sin\omega t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad D_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\alpha}{2} \\ 0 & -\frac{\alpha}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Используя теорему 2 управление будем искать в виде

$$u(t,x) = u^0(t,x) + v(t,x)$$

где $u^0(t,x) = -B^*K(t)x$ (по теореме 1), а

$$v(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} z_i\, R_i^*(t,x)x, \qquad z_i = K_i(t)x$$

Найдем $u^0(t,x)$. Для этого нам необходимо определить $K(t)$.

$K(t)$ находим из уравнения:

$$\dot{K} + KA + A^*K - KBB^*K = 0,$$

$$\dot{K} - KBB^*K = 0, \text{ так как } \quad A = 0,$$

или, что то же самое, при $\det K(t) \neq 0$,

$$\frac{dK^{-1}}{dt} = -BB^*$$

Тогда

$$\frac{dK^{-1}}{dt} = -\begin{pmatrix} cos\omega t & 0 \\ -sin\omega t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} cos\omega t & -sin\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} cos^2\omega t & -cos\omega t sin\omega t & 0 \\ -cos\omega t sin\omega t & sin^2\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$K_{11}^{-1} = \int_t^T cos^2\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\int_t^T (1 + 2\cos\omega\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(T - t + \frac{1}{\omega} sin\omega(T-t)cos\omega(T+t);$$

$$K_{12}^{-1} = -\int_t^T \cos\omega\tau \sin\omega\tau\ \ d\tau = -\frac{1}{2}\int_t^T sin\, 2\omega\tau\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{4\omega} cos2\omega\tau|_t^T = -\frac{1}{2\omega} sin\omega(T+t) sin\omega(T-t);$$

$$K_{22}^{-1} = -\int_t^T sin^2\omega\tau\, d\tau = \frac{1}{2}\int_t^T (1 - \cos 2\omega\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2}(T - t - \frac{1}{\omega} sin\omega(T-t)cos\omega(T+t);$$

$$K_{33}^{-1} = T - t.$$

$$\Delta = (T-t)^2 - \frac{1}{\omega^2} sin^2\omega(T-t)$$

Тогда матрица $K(t)$ будет иметь вид:

$$K(t) = \begin{pmatrix} \frac{2(T-t+\alpha)}{\Delta} & \frac{2\beta}{\omega\Delta} & 0 \\ \frac{2\beta}{\omega\Delta} & \frac{2(T-t+\alpha)}{\Delta} & 0 \\ 0 & 0 & T-t \end{pmatrix}$$

Следовательно, матрица $K^{-1}(t)$ имеет вид:

$$K^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(T-t+\alpha) & -\frac{\beta}{2\omega} & 0 \\ -\frac{\beta}{2\omega} & \frac{1}{2}(T-t+\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & T-t \end{pmatrix}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} sin\omega(T-t)cos\omega(T+t)$$

$$\beta = sin\omega(T+t)sin\omega(T-t).$$

Следовательно, управление $u^0(t,x)$ в силу формулы

$$u(t,x) = -B^*(t)K(t)x, \quad t \in [t_0, T)$$

будет иметь следующий вид:

$$u_1^0(t,x) = \frac{2}{\Delta}\left((T-t-\alpha)cos\omega t - \frac{\beta}{2} sin\omega t\right)x_1 +$$

$$+\frac{\beta}{\omega}cos\omega t - (T-t+\alpha)sin\omega t)x_2)$$

$$u_2^0(t,x) = x_3(T-t).$$

Затем используя формулу (6) вычисляем $v(t,x)$

$$v(t,x) = -\sum_{i=1}^{n} z_i\, R_i^*(t,x), \quad t \in [t_0, T) \qquad (10)$$

$$z_i = K_i(t)x,$$

где $K_i(t) = (K_{i1}(t), K_{i2}(t), \dots, K_{in}(t))$ –i-ая строка матрицы $K_i(t)$

$$z_1 = -\frac{2}{\Delta}\left((T-t-\alpha)x_1 + \frac{\beta}{\omega}x_2\right),$$

$$z_2 = -\frac{2}{\Delta}\left(\frac{\beta}{\omega}x_1 - (T-t+\alpha)x_2\right),$$

$$z_3 = -x_3(T-t),$$

а $R_i(t,x), \quad i = \overline{1,3}$, такие, что

$$KBR_i^*(t,x) + R_i(t,x)B^*K = 2D_i(t), \qquad i = \overline{1,3}.$$

Подставляя вместо $K(t), B(t)$ и $D_i(t)$ данные, и решая это матричное уравнение получаем следующие $R_i(t,x), \quad i = \overline{1,3}$:

$$R_1(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{T-t} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_2(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\alpha}{T-t} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad R_3(t,x) = 0.$$

Следовательно, подставляя $R_i(t,x)$ в формулу (10) получим:

$$v_1(t,x) = 0,$$

$$v_2(t,x) = \frac{2}{\Delta}\frac{\alpha}{T-t}\left(-\beta x_1^2 + \frac{\beta}{\omega}x_2^2 - 2\alpha x_1 x_2\right).$$

Тогда стабилизирующее управление (5) для системы (9) получаем в виде:

$$u_1(t,x) = \frac{2}{\Delta}\left((T-t-\alpha)cos\omega t - \frac{\beta}{\omega}sin\omega t\right)x_1 + \left(\frac{\beta}{\omega}cos\omega t - (T-t-\alpha)sin\omega t\right)x_2,$$

$$u_2(t,x) = \frac{2}{\Delta}\frac{\alpha}{T-t}\left(-\beta x_1^2 - 2\alpha x_1 x_2 + \frac{\beta}{\omega}x_2^2\right) + x_3(T-t).$$

Дискуссия

Устойчивость по Ляпунову рассматривалась на бесконечном отрезке времени, это в свою очередь являлась серьезной проблемой при решении многих прикладных задач, так как большинство объектов исследования функционируют в течение конечного отрезка времени. Имеются также различные подходы к определению устойчивости на конечном отрезке времени (Н.Г. Четаев, Н.Д. Моисеев, Г.В. Каменков, А.А. Лебедев, К.А. Абгарян и др.).

Но ни одна из известных постановок об устойчивости на конечном отрезке времени не заняла до сих пор доминирующего положения.

При исследовании данной проблемы нами были получено стабилизирующее управление для квадратических дифференциальных систем уравнений на конечном отрезке времени.

Заключение

Для квадратической нестационарной системы вида (1) было построено управление вида (5) стабилизирующее данную систему на конечном отрезке времени. Используя условия теоремы 1 и теоремы 2 было показано выполнения всех условий теоремы о стабилизации движения на конечном отрезке времени, что доказывает о нахождении управления, которое стабилизирует движение рассматриваемй системы на конечном отрезке времени.

Список использованных источников

[1] Алфутов Н.А., Колесников К.С. Устойчивость движения и равновесия//. -М., МГТУ, 2003. – 256 с.

[2] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. – М., Гостехиздат, 1950. – 473 с.

[3] Меркин Д.Р. Введение в теорию устойчивости движения. – СПб. : Лань-Пресс, 2003.- 304 с.

[4] Бияров Т.Н., Дальбекова К.С. Исследование устойчивости линейных и квадратических дифференциальных систем.-Монография,-Алматы:Қазақ университет, 2001.-114с.

[5] Абгарян К.А. К проблеме устойчивости линейных нестационарных систем // Докл. АН СССР.-1989.-Т.308, вып.6. – С.1320-1321

[6] Айсагалиев С.А. Анализ и синтез автономных нелинейных систем автоматического управления. – Алма-Ата, Наука КазССР, 1980.-244 с.

[7] Айсагалиев С.А., Севрюгин И.В., Исаева З.Б., Игликова М.Н. Оптимальное управление линейных систем с ограничениями. // Известия НАН РК, КазНУ аль-Фараби, Серия «физика-математическая» – 2021. – 4(338). - С.118– 125 - https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.73

[8] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. – Изд. 2-е, испр. – Москва : Наука, 1966. – 530 с.: ил. – Режим доступа: по подписке. – URL:https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468145

[9] Дальбекова К.С., Гусманова Ф.Р., Беркимбаева С.Б., Искакова А.К. Проблемы устойчивости линейных нестационарных систем на конечном отрезке времени. // Вестник КазНПУ, Серия «Физико-математические науки». – 2020. -№4 (72). – С.52-58- https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.07

[10] Косов А.А., Козлов В.М., Об асимптотической устойчивости однородных сингулярных систем с переключениям. // - Академиздатцентр «Наука» РАН. Автоматика и телемеханика. – 2019. – №3. С45-53. https://doi.org/10.1134/S0005231019030036

References

[1] Alfutov N.A., Kolesnikov K.S. Alfutov N.A., Kolesnikov K.S. (2003) Ustojchivost' dvizheniya i ravnovesiya [Stability of movement and balance].M., MGTU, –256. (In Russian)

[2] Lyapunov A.M. (1950) Obshchaya zadacha ob ustojchivosti dvizheniya [General task of sustainable movement]. M., Gostekhizdat, 473. (In Russian)

[3] Merkin D.R. (2003) Vvedenie v teoriyu ustojchivosti dvizheniya. [Introduction to the theory of sustainable motion]. SPb. : Lan'-Press, 304 . (In Russian)

[4] Biyarov T.N., Dal'bekova K.S. (2001) Issledovanie ustojchivosti linejnyh i kvadraticheskih differencial'nyh sistem [Investigation of stability of linear and quadratic differential systems] -Monografiya, Almaty:Қазақ universitet, 114. (In Kazakh)

[5] Abgaryan K.A. (1989) K probleme ustojchivosti linejnyh nestacionarnyh sistem [Linear non-stationary systems that are stable to this problem] Dokl. AN SSSR. T.308, vyp.6. 1320-1321. (In Russian)

[6] Ajsagaliev S.A. (1980) Analiz i sintez avtonomnyh nelinejnyh sistem avtomaticheskogo upravleniya. [Analysis and synthesis of autonomous nonlinear systems of automatic control]. Alma-Ata, Nauka KazSSR, 244 s. (In Kazakh)

[7] Ajsagaliev S.A., Sevryugin I.V., Isaeva Z.B., Iglikova M.N. (2021) Optimal'noe upravlenie linejnyh sistem s ogranicheniyami. [Optimal control of linear systems with constraints] Izvestiya NAN RK, KazNU al'-Farabi, Seriya «fizika-matematicheskaya». 4(338), 118–125. (In Kazakh) https://doi.org/10.32014/2021.2518-1726.73

[8] Malkin I.G. (1966) Teoriya ustojchivosti dvizheniya [Theory of sustainable movement].Izd. 2-e, ispr. Moskva: Nauka, 530: il. Rezhim dostupa: po podpiske. (In Russian) URL:https://biblioclub.ru/index.php?page=book&id=468145

[9] Dal'bekova K.S., Gusmanova F.R., Berkimbaeva S.B., Iskakova A.K. (2020) Problemy ustojchivosti linejnyh nestacionarnyh sistem na konechnom otrezke vremeni.[The problem of stability of linear non-stationary systems on a finite segment of time] Vestnik KazNPU, Seriya «Fiziko-matematicheskie nauki». №4 (72). –52-58. (In Kazakh) https://doi.org/10.51889/2020-3.1728-7901.07

[10] Kosov A.A., Kozlov V.M. (2019) Ob asimptoticheskoj ustojchivosti odnorodnyh singulyarnyh sistem s pereklyucheniyam [On the asymptotic stability of homogeneous singular systems with switches] Akademizdatcentr «Nauka» RAN. Avtomatika i telemekhanika. №3. 45-53. (In Russian) https://doi.org/10.1134/S0005231019030036