МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2024.86.2.003

А.С. Бердышев[1,2], К. Боранбек[3*]

[1]РГП на ПХВ «Институт информационных и вычислительных технологий,
г. Алматы, Казахстан
[2]Казахский национальный педагогический университет имени Абая, г. Алматы, Казахстан
[3]Восточно-Казахстанский университет имени С. Аманжолова,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан
[*]*e-mail: boranbek.kulzhamila@gmail.com*

ОБЗОР МОДЕЛИ СТОКСА-ДАРСИ

Аннотация

Законы Стокса и Дарси имеют широкое применение в области гидродинамики. За последние десятилетия многие значительные исследовательские усилия были сосредоточены на изучении взаимосвязанной модели Стокса-Дарси, чтобы получить более глубокое понимание явлений гидродинамики. В этом контексте были предложены и тщательно изучены различные типы условий на границе между подобластями и улучшенные модели. Более того, стохастическая модель Стокса-Дарси стала ценным инструментом для учета неопределенностей и уточнения нашего понимания этих процессов. В этом обзоре мы проанализируем классическую и стохастические модели Стокса-Дарси, стремясь всесторонне изучить их преимущества и недостатки, а также некоторые численные методы. Мы фокусируемся на важности производных дробного порядка в моделях гидродинамики и анализируем преимущества новой обобщенной стохастической модели Стокса-Дарси дробного порядка.

Ключевые слова: дробные производные, память, модель Стокса-Дарси, случайные величины, условие Биверса-Джозефа-Саффмана, пористая среда, численные методы.

А.С. Бердышев[1,2], К. Боранбек[3]
[1]Ақпараттық және есептеу технологиялары институты ШЖҚ РМК, Алматы қ., Қазақстан
[2]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан
[3*]С.Аманжолов атындағы Шығыс Қазақстан университеті, Өскемен қ., Қазақстан

СТОКС-ДАРСИ МОДЕЛІНЕ ӘДЕБИ ШОЛУ

Аңдатпа

Стокс және Дарси заңдары гидродинамика саласында кеңінен қолданылады. Соңғы онжылдықтарда көптеген маңызды зерттеу жұмыстары гидродинамиканың құбылыстарын тереңірек түсіну үшін Стокс-Дарси біріктірілген моделін зерттеуге бағытталды. Осы тұрғыда *әртүрлі шекаралық және байланысқан шекаралық шарттар, жетілдірілген модельдер* ұсынылып, мұқият зерттелді. Сонымен қатар, стохастикалық Стокс-Дарси моделі белгісіздіктерді есепке алудың және осы процестерді түсінуді нақтылаудың құнды құралы болды. Бұл әдеби шолуда классикалық және стохастикалық Стокс-Дарси модельдері талданады, олардың артықшылықтары мен кемшіліктері, сондай-ақ кейбір сандық әдістер жан-жақты зерттеледі. Гидродинамика модельдеріндегі бөлшек ретті туындылардың маңыздылығына назар аударылып, жаңа жалпыланған бөлшек ретті стохастикалық Стокс-Дарси моделінің артықшылықтары талданады.

Түйін сөздер: бөлшек ретті туындылар, жады, Стокс-Дарси моделі, кездейсоқ шамалар, Биверс-Джозеф-Саффман шарты, кеуекті орта, сандық әдістер.

BerdyshevA.S.[1,2], Boranbek K.[3]
[1]Institute of information and computational technologies RSE on REU
[2]Abai Kazakh National Pedagogical University, Almaty, Kazakhstan
[3*]S. Amanzholov East Kazakhstan University, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

A REVIEW OF STOKES-DARCY MODEL

Abstract

Stokes and Darcy laws have found wide application in the field of fluid dynamics. Over recent decades, a lot of significant research efforts have focused on exploring the coupled Stokes-Darcy model to gain deeper insights into fluid dynamics phenomena. Various types of interface and boundary conditions, improved models have been proposed and thoroughly studied in this context. Moreover, the stochastic Stokes-Darcy model has emerged as a valuable tool for incorporating uncertainties and refining our understanding of these processes. In this review, we analyze the classical and stochastic Stokes-Darcy models, aiming to comprehensively explore their advantages and drawbacks, as well as some numerical methods. We focus on the importance of fractional order derivatives in fluid dynamics models and analyze the advantages of a new generalized fractional order stochastic Stokes-Darcy model.

Keywords: fractional derivatives, memory, Stokes-Darcy model, random variables, Beavers-Joseph-Saffman condition, porous media, numerical methods.

Основные положения

В этой статье проводится литературный обзор работ, посвященных модели Стокса-Дарси, а также ее нескольким обобщениям, уделяя особое внимание методам их численной реализации. Ввиду невозможности достоверного определения входных параметров данной модели проводятся обширные исследования по стохастическому обобщению указанной модели. Авторами предложено дальнейшее обобщение стохастической модели Стокса-Дарси, в которой учитываются долгосрочные изменения пористой среды. Это достигнуто посредством включения производных дробного порядка в уравнения модели.

Введение

Модель Стокса-Дарси является фундаментом в области гидродинамики, предлагая надежную математическую основу для понимания сложного взаимодействия между потоком жидкости на поверхности и в пористой среде. Объединив два фундаментальных принципа – поток Стокса и закон Дарси – модель обеспечивает комплексный подход к анализу движения жидкости через пористые материалы, такие как почвы, камни и биологические ткани. Существует множество важных применений модели Стокса-Дарси в различных областях. В нефтегазовой отрасли применение модели Стокса-Дарси позволяет инженерам моделировать поток жидкости в нефтяных пластах, оптимизируя методы добычи, повышая эффективность добычи нефти, а также проектировать системы нагнетания. Аналогичным образом, в геотермальных пластах, где горячая вода или пар заключены в пористых подземных пластах, модель облегчает понимание динамики потока жидкости, позволяя эффективно извлекать тепловую энергию для производства электроэнергии и прямого нагрева. Модель Стокса-Дарси, имеющая решающее значение в обоих сферах, анализирует поведение почвы и поток жидкости в пористых материалах, помогая планировать инфраструктурные проекты и оптимизировать установки для эффективной очистки воды в гражданском строительстве. Кроме того, она находит применение в биомедицинской инженерии для изучения кровотока, а также в гражданском строительстве для оптимизации конструкции пористых материалов в системах очистки воды и городских дренажных системах [1-3].

В данной работе мы проводим обзор литературы по модели Стокса-Дарси, широко используемой в различных областях. Актуальность проблемы обусловлена необходимостью точных моделей для фильтрации и подземных потоков, учитывающих стохастические колебания и временные зависимости, что использование стохастических методов дробного исчисления позволяет более точно моделировать динамику жидкости в сложных средах, что открывает новые перспективы для научных исследований и практических приложений.

Изучение стохастического обобщения модели Стокса-Дарси является достаточно новым и актуальным направлением в современной вычислительной гидродинамике. Указанная модель используется при прогнозировании процессов, протекающих в нефтяных пластах с кавернозно-пористой структурой, в подземных системах карстовых водоносных горизонтов, в задачах взаимодействия между поверхностными и подземными потоками. Кроме того, модель используется при прогнозировании и оценке риска подтопления территорий в результате подземных и поверхностных вод. Данная проблема особенно актуальна для большей части территорий Казахстана. Однако существенный недостаток данной модели заключается в пренебрежении чрезвычайно важного свойства пористой среды – памяти, значительно влияющего на характер течения жидкости. Необходимость его учета заключается в том, что в процессе течения жидкости меняется пористость и проницаемость среды, которые со временем заметно приводят к задержке скорости потока. Поэтому характер течения определяется не только текущим состоянием среды, но также всеми ее предыдущими состояниями.

Цель данного литературного обзора – проанализировать и систематизировать существующие знания по стохастическому моделированию и дробному исчислению в модели Стокса-Дарси, оценить их применимость к описанию движения жидкости в пористых средах и выявить направления для дальнейших исследований и практических применений. Проблемные положения, связанные с стохастическими моделями Стокса-Дарси дробного порядка, включают сложность математического описания, высокие вычислительные затраты, отсутствие единой методологии и ограниченную апробацию на практике.

В методологическом и исследовательском разделе рассматриваются классическая модель Стокса-Дарси, стохастическая модель Стокса-Дарси и дробная стохастическая модель Стокса-Дарси. В разделе, посвященном классической модели Стокса-Дарси, описываются уравнения Стокса и законы Дарси, виды граничных условий и условия на границе раздела, а также численные методы их реализации. В разделе о стохастической модели Стокса-Дарси обсуждаются недостатки классической модели и представлены преимущества стохастической модели, а также соответствующие численные методы. В разделе о стохастической модели Стокса-Дарси с производными дробного порядка выделены недостатки стохастической модели, обсуждается важное свойство пористых сред – память, и понятия дробного исчисления для его математического описания, затем приводится обобщение линейной модели Стокса-Дарси. Ожидаемые результаты включают систематизацию методов численной реализации стохастического обобщения модели Стокса-Дарси, выявление их преимуществ и недостатков, что способствует разработке более эффективных методов реализации в практических задачах.

Методология исследования

Методология исследования основана на выявлении сильных и слабых сторон рассматриваемых моделей, а также сравнении различных численных методов их реализации. Для достижения цели проанализировано 42 полнотекстовых источника. В исследовании применены общенаучные методы теоретического познания, тематический контент-анализ, синтез теоретических оснований, компаративный метод по выявлению и обобщению исследований.

Результаты исследования

Классическая модель Стокса-Дарси

Начнем с полного описания рассматриваемой модели. Пусть D_f и D_p соответственно обозначают область свободного течения жидкости и область с пористой средой – две ограниченные подобласти R^d ($d = 2{,}3$), лежащие по обе стороны границы раздела Γ , т.е. $D_f \cap D_p = \emptyset$, $\overline{D_f} \cap \overline{D_p} = \Gamma$ и $\overline{D_f} \cup \overline{D_p} = \overline{D}$ (Рисунок 1).

Движение потока пористой среды моделируется уравнением

$$S\phi_t(x,t) - \nabla \cdot \left(K(x)\nabla\phi(x,t)\right) = f_p(x,t) \qquad \text{в} \quad D_p \times \tilde{T},$$

полученным из уравнения неразрывности и закона Дарси. Здесь неизвестная функция $\phi(x,t)$– пьезометрический напор в пористой среде, f_p —источник или сток, S – коэффициент емкости пласта, а также предполагается, что процесс изучается на интервале времени $\widetilde{T}$, где $\widetilde{T} = (0, T\,]$ при $T > 0$.

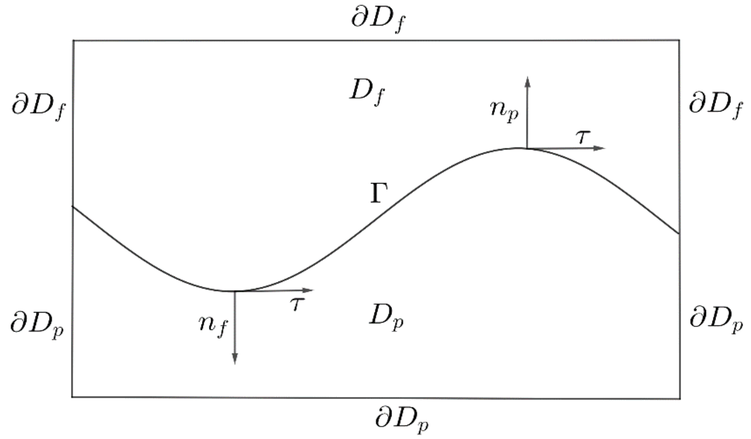

Рисунок 1. Область интегрирования Ω , состоящая из области свободного течения жидкости Ω_f и области пористой среды Ω_p, разделенных границей раздела Γ

Тензор гидравлической проводимости, обозначенный как K, отражает сложную природу потока жидкости в реальных сценариях. Концептуально, гидравлическая проводимость измеряет, насколько легко жидкость может проникать через почву или горную породу: более высокие значения соответствуют материалам, обеспечивающим легкий проход жидкости, а более низкие значения указывают на менее проницаемые материалы. На величину гидравлической проводимости влияют различные факторы, включая текстуру почвы, гранулометрический состав, шероховатость поверхности, извилистость и конфигурацию водопроводных путей. В пределах заданного контрольного объема среды гидравлическая проводимость может проявлять как изотропные, так и анизотропные характеристики. Изотропная гидравлическая проводимость подразумевает однородность во всех направлениях, что делает ее математический представленной в виде скаляра. И наоборот, анизотропная проводимость варьируется в разных направлениях внутри контрольного объема. Для изотропных сред матрица гидравлической проводимости имеет симметричную квадратичную структуру. Среди исследователей существует общее мнение, что все параметры материала и жидкости равномерно положительны и ограничены, причем K представляет собой симметричную положительную матрицу. Тогда верны следующие неравенства:

$$0 \le k_{min} \, |\, \zeta \,|^2 \le K\,\zeta \cdot \zeta \le k_{max} \, |\, \zeta \,|^2 < \infty \ \text{для всех} \ \zeta \in R^d.$$

Движение потока свободного течения жидкости описывается уравнениями Стокса:

$$\left(v_f(x,t)\right)_t - \mu\nabla^2 v_f(x,t) + \nabla p(x,t) = f_f(x,t), \quad D_f \times \tilde{T},$$

$$\nabla \cdot v_f(x,t) = 0, \qquad\qquad D_f \times \tilde{T}.$$

Здесь неизвестными функциями являются v_f – скорость жидкости в D_f , $p(x,t)$ – давление жидкости в D_f , f_f — объемные силы, μ — вязкость жидкости.

Первичными условиями взаимодействия являются сохранение массы, нормальный баланс сил, либо условия Биверса-Джозефа, Биверса-Джозефа-Саффмана для тангенциальной скорости. В последние годы задача Стокса-Дарси тщательно исследовалась, в основном, с использованием условия на границе раздела Биверса-Джозефа-Саффмана или его упрощенной версии Саффмана [4]. Приведем известные условия на границе раздела Биверса-Джозефа на границе раздела Γ при $1 \le i \le d-1$:

$$v_f(x,t) \cdot n_f - K\nabla\phi(x,t) \cdot n_p = 0,$$

$$p(x,t) - \mu n_f \cdot \nabla v_f(x,t) \cdot n_f = g\phi(x,t),$$

$$p(x,t) - \mu n_f \cdot \nabla v_f(x,t) \cdot \tau_i = \frac{\alpha_{BJS}}{\sqrt{\tau_i \cdot K \cdot \tau_i}} v_f(x,t) \cdot \tau_i.$$

Однако эти условия сформулированы для потоков, параллельных границе раздела жидкость-пора, и поэтому не подходят для произвольных направлений потока на границе раздела, например, тех, которые встречаются в сценариях промышленной фильтрации [5]. Несмотря на тенденцию давать неточные результаты для произвольных направлений потока к пористому слою, эти условия по-прежнему широко используются в литературе. Еще одним условием на границе раздела являются альтернативные условия сопряжения, которые требуют калибровки неизвестных параметров модели на основе теоретических принципов [6]; они не подходят для произвольных направлений потока на границе раздела жидкость-пора [7], что ограничивает точность моделируемых приложений.

В недавном исследовании [8] были введены обобщенные условия интерфейса, которые охватывают классическое сохранение массы и равновесие нормальных сил для изотропных пористых сред, одновременно расширяя условие Биверса-Джозефа. Эти условия эквивалентны для параллельных потоков к пористому слою при аналогичных предположениях относительно направления потока, однако они остаются справедливыми для произвольных направлений потока к пористому слою и не включают какие-либо неизвестные параметры. Эффективные коэффициенты в этих обобщенных условиях рассчитываются численно с использованием геометрических данных в масштабе пор из системы связанных потоков. В последние десятилетия появились различные альтернативы традиционным условиям взаимодействия.

Получение аналитического решения уравнений Стокса-Дарси часто невозможно из-за их сложности и нелинейности. Следовательно, численные методы служат основным подходом к решению этих уравнений. Известно применение методов конечных элементов, метода конечных разностей, метода конечных объемов, метода граничных элементов, компактных разностных схем, классических итерационных методов подобластей, метода спектральных элементов. При решении также использованы метод диффузного межфазного интерфейса, метод управляемого приведенного базиса, метод декомпозиции области, оптимизированный метод Неймана-Неймана, метод декомпозиции типовой области [9-12].

В недавних исследованиях был достигнут ряд успехов в вычислительных методах анализа явлений потока жидкости. В [13] представлен новый подход к анализу глобальной чувствительности для произвольного полиномиального хаоса с несколькими разрешениями, направленный на повышение точности и смягчение явления Гиббса. Этот метод, основанный на концепции локализованной полиномиальной выборки на основе произвольного полиномиального хаоса, расширяет свою применимость даже для более низких порядков полиномов. Основываясь на этом, работа [14] представляет два ансамблевых алгоритма, специально предназначенных для вычислений количественной оценки неопределенности. Эти алгоритмы оптимизируют вычислительный процесс, предоставляя общую матрицу коэффициентов для всех реализаций, тем самым сокращая использование памяти и общее время моделирования. Кроме того, в [15] предложен многомасштабный метод для сжимаемого потока Дарси-Стокса, предлагающий локализованные решения как для задач Стокса, так и для задач Дарси для построения базисных функций. Аналогично, работа [16] исследует метод дробного шага для разделения полей фазы и скорости, и вводит слагаемое стабилизации давления первого порядка в решатель задачи Дарси. Авторы работы [17] предлагают безусловно устойчивый метод, который эффективно разделяет расчет фазового поля, переменной скорости свободного потока и давления. Кроме того, работа [18] подчеркивает важность включения условий на границе раздела в предобуславливатели для достижения масштабируемости в методе конечных разностей маркера и ячейки. В работе [19] предложен смешанный метод конечных элементов для численной реализации модели Стокса–Дарси с новым граничным условием.

Проведем сравнение численных методов, подчеркивая их преимущества и недостатки. В [20] работе нестационарная модель Стокса-Дарси сравнивалась как с многомасштабным методом конечных элементов, так и с методом конечных элементов. Основное различие заключается в их базисных функциях: методы конечных элементов используют общие функции, в то время как многомасштабные методы конечных элементов включают микромасштабные детали области, повышая точность вычислений на грубых сетках. Смешанные методы конечных элементов создают линейные системы со специализированными алгоритмами, в то время как слабые методы конечных элементов Галеркина приводят к более простому решению и предлагают разнообразный выбор пространства конечных элементов. Разрывный метод Галёркина требует управление скачками и средними значениями, в то время как слабый метод конечных элементов Галеркина использует новые операторы и обеспечивает простоту. Слабый метод конечных элементов Галеркина превосходит разрывный метод Галёркина и метод смешанных конечных элементов благодаря более простому использованию, лучшей непрерывности потока, меньшему количеству неизвестных и отсутствию необходимости в штрафных коэффициентах [21]. В [22] двухсеточная схема с использованием непрерывного метода конечных элементов и разрывного метода Галеркина не позволила достичь оптимальных оценок погрешности для ∇u и p в норме L_2 . В [23] модифицированный двухсеточный метод для смешанной модели Стокса-Дарси позволил достичь оптимальных оценок ошибок. Этот метод предполагает сначала решение на грубой сетке, а затем на мелкой. Однако решение подзадачи Стокса на мелкой сетке требует много времени. Для повышения эффективности в [24] предлагается локальный и параллельный алгоритм конечных элементов с использованием двухсеточной дискретизации, с низкочастотными компонентами на грубой сетке и высокочастотными компонентами, вычисляемыми локально и параллельно на мелкой сетке. Классический локальный и параллельный метод конечных элементов, несмотря на высокую степень распараллеливания, приводит к глобальной разрывной аппроксимации. Для достижения непрерывного решения работа [25] представляет новый параллельный метод, использующий разбиение единицы, позволяющий независимые и параллельные решения подзадач Дарси и Стокса на мелкой сетке. Этот подход также включает коррекцию сетки для обеспечения оценок ошибок более высокого порядка для скорости жидкости и пьезометрического напора в норме L_2. Решеточный метод Больцмана предлагает параллелизм и масштабируемость, что делает его идеальным для моделирования мезомасштабных явлений и неньютоновских потоков. Несмотря на свои сильные стороны, решеточный метод Больцмана имеет ограничения в моделировании течения макроскопических пористых сред, а сложность реализации может препятствовать его широкому использованию [26].

В целом, численные методы играют решающую роль в улучшении нашего понимания течения жидкости в пористых средах и являются незаменимым инструментом для решения уравнений Стокса-Дарси в практических приложениях.

Стохастическая модель Стокса-Дарси

Основным недостатком классической модели Стокса-Дарси является ее неспособность учитывать неопределенности и изменчивость параметров модели, таких как проницаемость, начальные и граничные условия. Детерминистический подход может привести к менее точным и менее надежным решениям при применении к реальным задачам, которым присущи такие неопределенности. Устранение этих недостатков требует принятия более продвинутых подходов к моделированию, таких как стохастическая модель Стокса-Дарси. Стохастическая модель Стокса-Дарси включает случайные и вероятностные распределения, объединяет в структуру стохастичность, неоднородность и неопределенность, что позволяет делать более надежные и реалистичные прогнозы за счет учета эффектов изменчивости и неопределенности параметров, что в конечном итоге приводит к улучшению процесса принятия решений и оценки рисков в практических приложениях. Поэтому многими авторами изучалось стохастическое обобщение модели.

Поскольку обычно тензор гидравлической проводимости $K(x)$ невозможно определить достоверно, запишем его в виде случайного тензора. Пусть (Ω, F, P) – полное вероятностное пространство, где Ω – множество исходов, $F \in 2^{\Omega}$ — σ-алгебра событий, а $P: F \to [0,1]$ – вероятностная мера, $K(\omega, x)$ – случайный тензор гидравлической проводимости, $\omega \in \Omega$, $x \in D_p$.

Одним из классических подходов решения стохастических уравнений в частных производных является метод Монте-Карло. Он предполагает приближенное решение для независимых и одинаково распределенных случайных величин посредством повторной выборки входных параметров, и решения соответствующих детерминированных уравнений в частных производных с использованием стандартных численных методов.

Недавно в исследовании [27] для стохастической модели Стокса-Дарси был разработан многосеточный многоуровневый метод Монте-Карло, значительно снижающий вычислительные затраты в вероятностном пространстве. Кроме того, многосеточный многоуровневый метод Монте-Карло, описанный в [28], объединяет многоуровневый метод Монте-Карло и многосеточные методы для повышения эффективности вычислений в вероятностном пространстве. Этот метод продемонстрировал долговременную устойчивость и точность первого порядка по времени при определенном временном шаге и двухпараметрических условиях. В исследовании [29], рассматривающем проблемы решения многомасштабных стохастических уравнений пористой среды, представлены многомасштабные подходы к экономичному разрешению неопределенностей и подсеточным масштабам для количественной оценки неопределенности в геологоразведочных работах.

Кроме того, альтернативный алгоритм, продемонстрированный в [30], обеспечивает устойчивость по времени без дополнительных параметров, представляя общие матрицы коэффициентов для линейных систем в детерминированных численных моделях, тем самым сокращая вычислительные затраты с сохранением точности. Еще одним заметным вкладом является эффективный ансамблевый алгоритм, предложенный в [31], оптимизирующий параметры Робена для ускорения сходимости, в частности достижения почти оптимальной геометрической сходимости при низких гидравлических проводимостях. Методы коллокации [32], предлагают простоту и адаптируемость к нерегулярным границам.

Наконец, различные численные методы, в том числе связанные методы конечных элементов, методы декомпозиции области, методы множителей Лагранжа, двухсеточные методы, несвязанные маршевые схемы, разрывные методы Галеркина, методы граничного интеграла, стохастические методы конечных элементов и многомасштабные смешанные методы конечных элементов были разработаны для получения приближенных решений стохастической модели Стокса-Дарси в нескольких областях с учетом мультифизических факторов.

Стохастическая модель Стокса-Дарси в дробных производных

В современной литературе встречаются математические модели, основанные на том, что явления течения жидкости через пористые среды зависят от их прошлого состояния [32-35]. Это связано с тем, что свойства как породы, так и жидкости изменяются со временем, пока жидкость течет через пористую среду. Поры среды могут увеличиваться из-за химических реакций между средой и жидкостью или могут уменьшаться или даже закрываться из-за осаждения твердых частиц, переносимых жидкостью, или осаждения минералов из жидкости. В результате течение происходит так, как если бы среда имела память [33].

Чтобы глубже понять концепцию памяти среды, рассмотрим следующий пример. Когда все влияющие гидродинамические параметры (давление, температура и т. д.) остаются неизменными, традиционно предполагается, что характеристики горной породы, жидкости и потока остаются постоянными. Однако данные величины зависят от времени и изменяются с течением времени. Таким образом, свойства породы, жидкости и потока в текущий момент зависят от их прошлого состояния, которое необходимо учитывать для определения текущего и прогноза будущего поведения.

В работе [36] в стохастическую модель Стокса-Дарси включена «память» для количественной оценки влияния истории изменения процесса. Таким образом, текущее состояние породы, жидкости и потока представлено как свертка функции памяти и их истории.

В литературе встречаются два типа памяти: временная и пространственная. Пространственная память учитывает предыдущее пространство, через которое прошли жидкости [37]. Чтобы уловить это непрерывное изменение свойств горных пород и флюидов, необходимо учитывать как пространственную, так и временную память. Некоторые модели учитывают только временную память, некоторые – пространственную, а классические модели не учитывают ни один из этих эффектов. Включение временной или пространственной памяти позволило бы сформулировать обобщенную математическую модель, отражающую почти все типы явлений течения, возникающих в пористых средах.

В настоящее время гидродинамические симуляторы пластов основаны на традиционном моделировании. Основным недостатком стохастической модели Стокса-Дарси является то, что она не учитывает важнейшее свойство пористой среды – память, которая существенно влияет на поведение потока жидкости. Однако считается, что модели, не учитывающие влияние истории породы и жидкости, не могут точно отражать характеристики потока жидкости. Для достижения этой цели дробные производные могут помочь лучше, чем обычные производные, поскольку дробные производные функции можно выразить посредством свертки двух функций. Более того, они действуют как обычная производная, когда порядок производной является неотрицательным целым числом.

Следовательно, дробные производные могут использоваться для описания природных явлений, подобно обычным производным, и, кроме того, для представления последствий истории. Историю давления, градиентов давления или любых других параметров можно учитывать, используя производные дробного порядка этого параметра. Для рассмотрения временной памяти используются производные дробного порядка по времени, а для рассмотрения пространственной памяти – производные дробного порядка по пространству.

За последние несколько десятилетий дробное исчисление сыграло важную роль во всех областях науки и техники и, соответственно, значительный интерес вызвали дробные производные и интегралы. Во многих приложениях дробные производные и интегралы обеспечивают более точные модели систем, чем обычные производные и интегралы. Дробное исчисление позволяет описывать различные явления и эффекты в естественных и социальных науках. Было опубликовано много теоретических, численных работ, посвященных течению жидкости через пористую среду. Эти исследования поставили память и дробные производные на центральную роль в точном моделировании потока жидкости через пористую среду [38].

Дробное исчисление, которое представляет собой теорию интегралов и производных дробного порядка, описывает широкий спектр различных типов операторов с нецелым порядком [39]. В прикладной математике важно иметь инструмент, позволяющий адекватно подбирать тип дробных операторов для рассматриваемого типа явлений. Необходимо иметь четкие математические критерии для связи дробных операторов нецелых порядков и тех типов явлений, которые они могут описывать. Дифференциальные и интегральные операторы нецелых порядков являются мощным инструментом моделирования и описания процессов, характеризующихся угасанием памяти и пространственной нелокальностью. Однако не все операторы нецелочисленных порядков могут описать эффекты памяти (или нелокальности).

В работе [40] используется дробная производная в смысле определения Капуто для описания памяти (угасающей памяти).

Приведем обобщение дробного порядка линеаризованной модели Стокса-Дарси:

$$\partial_{0,t}^{\alpha} v_f(x,t,\omega) - \mu \, \nabla^2 v_f(x,t,\omega) + \nabla p(x,t,\omega) = f_f(x,t,\omega) \qquad \text{в} \;\; D_f \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$\nabla \cdot v_f(x,t,\omega) = 0 \qquad \text{в} \;\; D_f \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$v_f(x,0,\omega) = v_0(x,\omega) \qquad \text{в} \;\; D_f \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$v_f(x,t,\omega) = 0 \qquad \text{на} \;\; \Gamma_f \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$S\partial_{0,t}^{\alpha} \phi(x,t,\omega) - \nabla \cdot \big(K(x,\omega)\nabla\phi(x,t,\omega)\big) = f_p(x,t,\omega) \qquad \text{в} \;\; D_p \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$\phi(x,0,\omega) = \phi_0(x,t) \qquad \text{в} \;\; D_p \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$\phi(x,t,\omega) = 0 \qquad \text{на} \;\; \Gamma_p \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$v_f(x,t,\omega) \cdot n_f - K(x,\omega\,)\nabla\phi(x,t,\omega) \cdot n_p = 0 \qquad \text{в} \;\; \Gamma \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$p(x,t,\omega) - \mu n_f \nabla v_f(x,t,\omega) \cdot n_p = g\phi(x,t,\omega) \qquad \text{в} \;\; \Gamma \times \tilde{T} \times \Omega$$

$$p(x,t,\omega) - \mu n_f \nabla v_f(x,t,\omega) \cdot \tau_i = \frac{\alpha_{BJS}}{\sqrt{\tau_i \cdot K(x,\omega)\tau_i}} v_f(x,t,\omega) \cdot \tau_i \qquad \text{в} \;\; \Gamma \times \tilde{T} \times \Omega.$$

Идея включения памяти в моделирование подземных потоков является сравнительно новой. С этой точки зрения предполагается, что все материалы обладают памятью, поэтому считается, что история изменения породы и жидкости влияет на их настоящие и будущие характеристики. Введение производных дробного порядка в модель для учета памяти усложняет уравнения и их численное решение. В отличие от производных целого порядка, производные дробного порядка не имеют единого определения. Разные определения дают разные уравнения для одной и той же модели. Также сложно дискретизировать модель, применяя соответствующие конечно-разностные аппроксимации. Разработка новых схем и алгоритмов для решения полученных уравнений дробного порядка представляет собой сложную задачу.

Таким образом, можно сделать вывод, что состояние изученности модели Стокса-Дарси еще далеко от совершенства. В особенности, требуется изучение обобщения классической модели, позволяющее учесть наследственные эффекты пористой среды, значительно влияющие на процесс течения жидкости. Кроме того, литературный обзор выявил небольшое число работ, направленных на разработку эффективных вычислительных методов реализации данной модели.

Дискуссия

Таким образом, стохастическая модель Стокса-Дарси является основой для понимания гидродинамики во многих сценариях. Хотя классическая модель Стокса-Дарси эффективно отражает ключевые аспекты гидродинамики, она имеет ограничения в учете сложного поведения, наблюдаемого в гетерогенных пористых средах, особенно в отношении эффектов стохастической изменчивости. Стохастическая модель Стокса-Дарси обеспечивает гибкость при учете неопределенностей, присущих течениям в пористых средах, чем классическая модель Стокса-Дарси.

Для более реалистичного описания течений в пористых средах необходимо учесть долгосрочные изменения данных сред. Таким образом, учет неопределенности входных параметров и эффектов памяти пористой среды обеспечивает более реалистичное представление сложной динамики в пористых средах. Этот вывод согласуется с недавними исследованиями, подчеркивающими важность учета эффектов изменчивости и памяти в динамике подземных жидкостей.

Литературный обзор показал, что в последнее время предложены различные численные методы реализации дробной модели Стокса и дробной модели Дарси по отдельности, со строгим доказательством их устойчивости и сходимости. Однако дробное обобщение совместной модели является сравнительно новой областью исследований в вычислительной гидродинамике.

В предыдущей работе авторов [36] была предложена совместная модель Стокса-Дарси дробного порядка, а также предложен численный метод ее реализации. Построенный метод достигает более высокого порядка сходимости по времени по сравнению с предыдущими работами [41,42] за счет специальной аппроксимации дробных производных и членов в слабой формулировке. Более того, применение ансамблевого подхода с параллельным вычислением дискретных дробных производных позволил добиться почти семикратного ускорения вычислений на тестовом примере. Литературный обзор не выявил работ, направленных на дальнейшее изучение предложенной дробно-стохастической модели.

Заключение

Подводя итоги, мы видим, что классическая модель Стокса-Дарси изучается теоретическими и численными методами на протяжении многих лет. В связи с этим предложено множество численных методов и граничных условий. В последнее десятилетие была предложена стохастическая модель Стокса-Дарси, которая является обобщением классического уравнения Стокса-Дарси. Хотя стохастическая модель Стокса-Дарси имеет преимущества перед классической моделью, как уже говорилось выше, она также имеет недостатки, заключающиеся в вычислительной сложности при численных расчетах и неучете памяти – важного свойства пористой среды. Стохастические уравнения Стокса-Дарси дробного порядка являются обобщением стохастической модели Стокса-Дарси, и поскольку эта модель все еще находится на стадии становления, она требует большого объема исследований. Производные дробного порядка имеют множество преимуществ перед классическими производными, поэтому использование стохастической модели Стокса-Дарси дробного порядка чрезвычайно важно в практических приложениях. Дальнейшее исследование авторов будет направлено на разработку и теоретическое обоснование эффективных вычислительных методов реализации данной модели.

Благодарность

Данное исследование выполнено при финансовой поддержке Комитета науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан, грант № AP14871299 (2022-2024 гг).

References

[1] Jiang N., Li Y. An efficient scalar auxiliary variable partitioned projection ensemble method for simulating surface-groundwater flows // Mathematics and Computers in Simulation. – 2024. – Vol. 221. – pp. 39–54. https://doi:10.1016/j.matcom.2024.02.002

[2] Li J, X Zhang X, Li R. A decoupled stabilized finite element method for nonstationary stochastic shale oil model based on superhydrophobic material modification, 2024 (preprint). https: //doi:10.2139/ssrn.4757235

[3] Dudun A, Feng Y. Modeling fluid flow in fractured porous media: a comparative analysis between darcy–darcy model and stokes–brinkman model // Journal of Petroleum Exploration and Production Technology. . – 2024. – Vol. 14(4). – pp. 909–926. https: //doi: 10.1007/s13202-023-01743-x

[4] Yanren Hou and Yi Qin. On the solution of coupled stokes/darcy model with beavers–joseph interface condition // Computers amp; Mathematics with Applications. – 2019. – Vol.77(1). – pp. 50–65. https: //doi: 10.1016/j.camwa.2018.09.011

[5] Eggenweiler E., Rybak I. Unsuitability of the beavers–joseph interface condition for filtration problems // Journal of Fluid Mechanicsю. – 2020. – Vol. 892. https: //doi:10.1017/jfm.2020.194

[6] Angot P. Well-posed Stokes/Brinkman and Stokes/Darcy coupling revisited with new jump interface conditions // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. – 2018. – Vol.52. – pp. 1875-1890. https: //doi: 10.1051/m2an/2017060

[7] Lācis U, Sudhakar Y, Pasche S, Bagheri Sh. Transfer of mass and momentum at rough and porous surfaces. // Journal of Fluid Mechanics – 2019. – Vol.884. https: //doi: 10.1017/jfm.2019.897

[8] Eggenweiler E. Rybak I. Effective Coupling Conditions for Arbitrary Flows in Stokes--Darcy Systems // Multiscale Modeling & Simulation. – 2021. – Vol.19, – pp. 731-757. https: //doi:10.1137/20m1346638

[9] Baigereyev D., Omariyeva D., Temirbekov N., Yergaliyev Y., Boranbek K. Numerical Method for a Filtration Model Involving a Nonlinear Partial Integro-Differential Equation // Mathematics. – 2022. – Vol.10. – pp.1319. https: //doi:10.3390/math10081319

[10] Bukač M., Muha B, Salgado A. Analysis of a diffuse interface method for the Stokes-Darcy coupled problem // ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis. 2023. Vol.57. pp.2623-2658. https: //doi:10.1051/m2an/2023062

[11] Discacciati M., Robinson J. Optimized Neumann-Neumann method for the Stokes-Darcy problem. – 2023. (arXiv). https: //doi: 10.48550/ARXIV.2304.12728

[12] Stein S., Jessen E., Niedens V., Schillinger D. A DEIM driven reduced basis method for the diffuse Stokes/Darcy model coupled at parametric phase-field interfaces // Computational Geosciences. – 2022. – Vol.26, – pp.1465-1502. https: //doi:10.1007/s10596-022-10164-4

[13] Kröker I., Oladyshkin S., Rybak I. Global sensitivity analysis using multi-resolution polynomial chaos expansion for coupled Stokes–Darcy flow problems // Computational Geosciences. – 2023. – Vol.27. – pp.805--827. https: //doi:10.1007/s10596-023-10236-z

[14] Jiang N., Yang H., SAV decoupled ensemble algorithms for fast computation of Stokes–Darcy flow ensembles // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. – 2021. – Vol.387. – pp.114-150. https: //doi:10.1016/j.cma.2021.114150

[15] Guo B., Mehmani Y., Tchelepi H. Multiscale formulation of pore-scale compressible Darcy-Stokes flow// Journal of Computational Physics. – 2019. – Vol.397. https: //doi: 10.1016/j.jcp.2019.07.047

[16] Chen W., Han D., Wang X. Uniquely solvable and energy stable decoupled numerical schemes for the Cahn--Hilliard--Stokes--Darcy system for two-phase flow // Numerische Mathematik. – 2017. – Vol.137. – pp.229-255. https: //doi:10.1007/s00211-017-0870-1

[17] Gao Y., Han D., He X., Rüde U. A decoupled numerical method for two-phase flows of different densities and viscosities in superposed fluid and porous layers. – 2021 (arXiv). https: //doi:10.48550/ARXIV.2112.04353

[18]Greif Ch., Yunhui He. Block Preconditioners for the Marker-and-Cell Discretization of the Stokes–Darcy Equations // SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications. – 2023. 44, – Vol.4. – pp.1540 -1565. https: //doi:10.1137/22m1518384

[19] Moutea O., Amri H., Akkad A. Finite Element Method for the Stokes–Darcy Problem with a New Boundary Condition // Numerical Analysis and Applications. 2020. Vol.13. pp.136--151. https: //doi: 10.1134/s1995423920020056

[20] Yachen H., Wenhan Zh., Lina Zh., Haibiao Zh. Finite element method coupled with multiscale finite element method for the non-stationary Stokes-Darcy model. 2024.(preprint) https: //doi: 10.48550/arXiv.2403.11600

[21] Lin G., Liu J., Marandi F. A comparative study on the weak Galerkin, discontinuous Galerkin, and

mixed finite element methods // Journal of Computational and Applied Mathematics. – 2015. – Vol.273. – pp. 346-362. https: //doi:10.1016/j.cam.2014.06.024

[22] Chidyagwai P., Rivière B. A two-grid method for coupled free flow with porous media flow // Advances in Water Resources. – 2011, – Vol.34. – pp. 1113-1123. https: //doi:10.1016/j.advwatres.2011.04.010

[23] Zhang T., Yuan J. Two novel decoupling algorithms for the steady Stokes-Darcy model based on two-grid discretizations // Discrete & Continuous Dynamical Systems. – 2014. – Vol.19. – pp. 849-865. https: //doi: 10.3934/dcdsb.2014.19.849

[24] Du G., Hou Y., Zuo L. A modified local and parallel finite element method for the mixed Stokes–Darcy model // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2016. – Vol.435. – pp. 1129-1145. https: //doi: 10.1016/j.jmaa.2015.11.003

[25] Du G., Zuo L. Local and parallel finite element methods for the coupled Stokes/Darcy model // Numerical Algorithms. – 2020. – Vol.87. – pp.1593-1611. https: //doi:10.1007/s11075-020-01021-5

[26] Rybak I, Schwarzmeier C., Eggenweiler E., Rüde U. Validation and calibration of coupled porous-medium and free-flow problems using pore-scale resolved models // Computational Geosciences. – 2020. – Vol.25. – pp. 621-635. https: //doi:10.1007/s10596-020-09994-x

[27] Yang Zh, He X., Zhang L., Ming J. Multi-grid Multi-Level Monte Carlo Method for Stokes-Darcy interface Model with Random Hydraulic Conductivity. – 2019 (arXiv). https: //doi:10.1007/s10915-021-01742-2

[28] Yang Zh, He X., Zhang L., Ming J. A stochastic collocation method based on sparse grids for a stochastic Stokes-Darcy model.// Discrete & Continuous Dynamical Systems. 2022. Vol.15. https: //doi: 10.3934/dcdss.2021104

[29] Aarnes J., Efendiev Y. Mixed Multiscale Finite Element Methods for Stochastic Porous Media Flows.// SIAM Journal on Scientific Computing. – 2008. – Vol.30, – pp.2319-2339. https: //doi:10.1137/07070108x

[30] He X., Jiang N., Qiu Ch. An artificial compressibility ensemble algorithm for a stochastic Stokes-Darcy model with random hydraulic conductivity // International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2019. – Vol.121, – pp.712-739. https: //doi:10.1002/nme.6241

[31] Shi F., Sun Y., Zheng H. Ensemble Domain Decomposition Algorithm for the Fully-mixed Random Stokes-Darcy Model with the Beavers-Joseph Interface Condition. 2022.(arXiv) https: //doi: 10.48550/ARXIV.2203.01494

[32] Yang Zh., Ming J., Qiu Ch., Li M., He X. A Multigrid Multilevel Monte Carlo Method for Stokes--Darcy Model with Random Hydraulic Conductivity and Beavers--Joseph Condition // Journal of Scientific Computing. – 2022, – Vol. 90. https: //doi:10.1007/s10915-021-01742-2

[32] Caputo M. Models of flux in porous media with memory // Water Resources Research. – 2000. – Vol.36(3). – pp.693–705. https: //doi:10.1029/1999wr900299

[33] Caputo M. Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations // Annals of Geophysics, – 2009. – Vol.46(2). https: //doi:10.4401/ag-3395

[34] Hossain M., Mousavizadegan H., Islam, M. A new porous media diffusivity equation with the inclusion of rock and fluid memories // Society of Petroleum Engineers. – 2008.

[35] Iaffaldano G., Caputo M., Martino S. Experimental and theoretical memory diffusion of water in sand // Hydrology and Earth System Sciences. – 2005. – Vol.10. – pp.93-100.

[36] Berdyshev A., Baigereyev D., Boranbek K. Numerical Method for Fractional-Order Generalization of the Stochastic Stokes–Darcy Model // Mathematics. 2023. Vol.17. pp. 3763. https: //doi: 10.3390/math11173763

[37] Caputo M. Diffusion with space memory modelled with distributed order space fractional differential equations // Annals of Geophysics. – 2003. – Vol.46(2), – pp.223-234.

[38] Giuseppe E., Moroni M., Caputo C. Flux in Porous Media with Memory: Models and Experiments // Transport in Porous Media. – 2009. – Vol.83(3). – pp. 479-500. https: //doi:10.1007/s11242-009-9456-4

[39]Ortigueira M., Machado J, Fractional Derivatives // The Perspective of System Theory, Mathematics. – 2019. – Vol.7(2), – pp.150. https://doi:10.3390/math7020150

[40] Tarasov V., Tarasova S. Fractional Derivatives and Integrals: What Are They Needed For? // Mathematics. – 2020. – Vol.8(2). – pp.164. https: //doi:10.3390/math8020164

[41] Jiang N., Qiu C. An efficient ensemble algorithm for numerical approximation of stochastic Stokes – Darcy equations // Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. 2019. Vol.343, pp.249-275. http://doi:10.1016/j.cma.2018.08.020

[42] Jiang N., Qiu C. Numerical analysis of a second order ensemble algorithm for numerical approximation of stochastic Stokes–Darcy equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2022. Vol.406. http://doi:10.1016/j.cam.2021.113934