МРНТИ 27.41.19

10.51889/2959-5894.2024.87.3.004

А.Е. Сарсенбаева[1*] С.Е. Касенов[2], Ж.Ә. Әскербекова[3], А.М. Тлеулесова[2]

[1] Южно-Казахстанский университет имени М. Ауэзова, г. Шымкент, Казахстан
[2] Казахский национальный университет имени аль-Фараби, г. Алматы, Казахстан
[3] Восточно-Казахстанский технический университет имени Д.Серикбаева,
г. Усть-Каменогорск, Казахстан
[*]*e-mail:* sarsenbaeva_82@bk.ru.

ВЫВОД ГРАДИЕНТА ФУНКЦИОНАЛА ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЬМГОЛЬЦА

Аннотация

В статье рассматривается задача продолжения для уравнения Гельмгольца. Решение исходной задачи сводится к решению обратной задачи по отношению к прямой (корректной) задаче. Обратная задача формулируется для уточнения граничного условия с помощью дополнительной информаций о решении прямой задачи. Обратная задача записывается в операторном виде. Решение операторного уравнения сводится к задаче минимизации целевого функционала. В работе также исследуются вопросы сходимости градиентных методов для решения обратной задачи. Также разработан алгоритм решения обратной задачи с использованием теории сопряженной оптимизации и метода Ландвебера. Представлены подробные выкладки для получения сопряженной задачи. Полученные результаты показывают, что использование теории сопряженной оптимизации и метода Ландвебера позволяет эффективно решать обратные задачи.

Ключевые слова: обратная задача, сопряженная задача, уравнение Гельмгольца, градиент функционала, метод Ландвебера.

A.E. Sarsenbayeva[1], S.E. Kasenov[2], Zh. Askerbekova[3], A.M. Tleulesova[2]
[1] South Kazakhstan University named after Mukhtar Auezov Shymkent, Kazakhstan
[2] Al-Farabi Kazakh National University, Almaty, Kazakhstan
[3] East Kazakhstan Technical University named after D. Serikbayev, Ust-Kamenogorsk, Kazakhstan

DERIVATION OF THE GRADIENT OF THE INVERSE PROBLEM FUNCTIONAL FOR THE HELMHOLTZ EQUATION

Abstract

This paper considers the continuation problem for the Helmholtz equation. The solution to the original problem is reduced to solving the inverse problem with respect to the direct (well-posed) problem. The inverse problem is formulated to clarify the boundary condition with the help of additional information about the solution of the direct problem. The inverse problem is written in operator form. The solution of the operator equation is reduced to the problem of minimizing the objective functional. The paper also examines issues of convergence of gradient methods for solving the inverse problem. An algorithm has been developed for solving the inverse problem using the theory of conjugate optimization and the Landweber method. Detailed calculations for obtaining the associated problem are presented. The results obtained show that the use of the theory of conjugate optimization and the Landweber method makes it possible to effectively solve inverse problems.

Keywords: inverse problem, adjoint problem, Helmholtz equation, gradient of the functional, the Landweber method.

А.Е. Сарсенбаева[1], С.Е. Касенов[2], Ж. Ә. Әскербекова[3], А.М. Тлеулесова[2]
[1]М. Әуезов атындағы Оңтүстік Қазақстан университеті, Шымкент қ, Казахстан
[2] Әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университеті, Алматы қ, Қазақстан
[3] Д.Серикбаева атындағы Шығыс Қазақстан техникалық университеті,
Өскемен қ, Казахстан

ГЕЛЬМГОЛЬЦ ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕРІ ЕСЕПТІҢ ФУНКЦИОНАЛЫНЫҢ ГРАДИЕНТІН ЕСЕПТЕУ

Аңдатпа

Бұл жұмыста Гельмгольц теңдеуі үшін жалғастыру есебі қарастырылады. Бастапқы есептің шешімі тура есепке қатысты кері есепті шешуге келтіріледі. Кері есеп тура есептің шешімі туралы қосымша ақпараттың көмегімен шекаралық шартты нақтылау үшін құрастырылады. Кері есеп операторлық түрде жазылады. Операторлық теңдеудің шешімі мақсаттық функционалды минимизациялау есебіне келтіріледі. Сонымен қатар жұмыста кері есепті шешудегі градиенттік әдістерінің жинақтылығы мәселесі қарастырылады. Түйіндес оптимизация теориясы мен Ландвебер әдісін қолдану арқылы кері есепті шешу алгоритмі жасалды. Түйіндес есептің қойылымын алу үшін есептеулер ұсынылған. Алынған нәтижелер түйіндес оптимизация теориясы мен Ландвебер әдісінің кері есептерді тиімді шешуге мүмкіндік беретінін көрсетеді.

Түйін сөздер: кері есеп, түйіндес есеп, Гельмгольц теңдеуі, функционал градиенті, Ландвебер әдісі.

Введение

Обратные задачи играют значимую роль в математическом моделировании и анализе данных, широко применяясь в областях, таких как геофизика, медицинская диагностика, неразрушающий контроль и климатическое моделирование. Эти задачи направлены на восстановление параметров или внутренних характеристик системы на основе измеренных внешних данных. Ряд исследований в работах [1-2], охватывают различные теоретические и прикладные аспекты обратных задач, включая методы регуляризации и численные методы, а также их применение в различных научных и инженерных областях.

В отличие от прямых задач, которые определяются известными начальными и граничными условиями, обратные задачи часто сталкиваются с некорректностью, требующей применения специализированных методов для получения стабильных и достоверных решений. Градиентные методы являются ключевыми в разработке и анализе итеративных подходов для решения эллиптических, гиперболических и параболических уравнений [3].

Метод решения задачи Коши для эллиптических уравнений, предложенный в работе [4] включает использование градиентного метода, что позволяет находить численные решения в условиях некорректности поставленной задачи. Исследования Марчука Г.И. также выделяются в использовании сопряженных уравнений для анализа и управления динамическими системами и решения экологических задач [5], [6].

В работе [6] используются сопряженные уравнения для нахождения оптимальных решений в задачах управления и оценки точности решений к изменениям начальных условий или параметров системы.

Метод Ландвебера, применяемый в задачах регуляризации, направлен на решение некорректных или плохо обусловленных задач. Он основан на добавлении дополнительного члена к исходному уравнению, учитывающему априорную информацию или ограничения на решение, что повышает устойчивость и надежность численного решения при условиях некорректности задачи.

Применение метода Ландвебера требует тщательного подбора параметров регуляризации для достижения оптимального сочетания между точностью решения и устойчивостью к шумам, при этом учитывая вычислительные затраты. Благодаря усилиям исследователей, метод сопряженных градиентов стал мощным инструментом для эффективного и устойчивого решения обратных задач в различных областях применения [7].

В данной статье проводится более глубокий анализ основных принципов метода градиентов, освещая как его теоретические, так и практические аспекты для решения начально-краевой задачи для уравнения Гельмгольца с заданной константой. Исследование сосредоточено на тщательном рассмотрении теоретических основ, лежащих в основе метода градиентов, включая его математическое обоснование и предположения, которые лежат в основе его применения.

На основе проведенных исследований был разработан алгоритм численного решения обратной задачи, использующий метод Ландвебера и характеризующийся сходимостью к точному решению.

Методология исследования

Постановка задачи продолжения для уравнения Гельмгольца в области $\Omega = (0, L_x) \times (0, L_y)$

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0 \qquad (x,y) \in \Omega \tag{1}$$
$$u_x(0,y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \tag{2}$$
$$u(0,y) = f(y) \qquad y \in [0, L_y] \tag{3}$$
$$u(x,0) = u(x, L_y) = 0 \qquad x \in [0, L_x] \tag{4}$$

где $k -$ const, требуется найти функцию $u(x,y)$ в области Ω по данным $f(y)$

Постановка обратной задачи. Исходная задача сводится к обратной задаче по отношению к следующей прямой задаче

$$u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0 \qquad (x,y) \in \tag{5}$$
$$u_x(0,y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \tag{6}$$
$$u(L_x, y) = q_n(y) \qquad y \in [0, L_y] \tag{7}$$
$$u(x,0) = u(x, L_y) = 0 \qquad x \in [0, L_x] \tag{8}$$

Таким образом обратную задачу можно сформулировать следующим образом: необходимо найти $q(y) = u(L_x, y)$ из соотношений (5),(6),(8) по дополнительной информации о решении прямой задачи

$$u(0,y) = f(y) \qquad y \in [0, L_y] \tag{9}$$

Определение 1. Функцию $u \in L_2(\Omega)$ будем называть обобщенным (или слабым) решением прямой задачи (5) - (8), если для любых $\omega \in H^2(\Omega)[1]$, таких, что

$$\omega_x(0,y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \tag{10}$$
$$\omega(L_x, y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \tag{11}$$
$$\omega(x,0) = \omega(x, L_y) = 0 \qquad x \in [0, L_x] \tag{12}$$

Тогда имеет место следующее равенство

$$\int_{\Omega} u(\omega_{xx} + \omega_{yy} + k^2\omega)dxdy - \int_0^1 q(y) \cdot \omega_x(L_x, y)dy = 0 \tag{13}$$

Функцию $\omega \in H^2(\Omega)$, удовлетворяющую (10)-(12) будем называть тест-функцией.

Вводим оператор A следующим образом:

$$A: u(L_x, y) = q(y) \mapsto u(0, y) = f(y)$$

где $u(x, y)$ решение прямой задачи (5)-(8) записывается в операторной форме

$$Aq = f \tag{14}$$

Операторное уравнение (14) преобразуется в задачу оптимизации, и мы минимизируем следующий функционал

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 = \int_0^\pi [u(0, y; q_n) - f(y)]^2 dy \tag{15}$$

минимизировать целевой функционал будем методом итераций Ландвебера

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n \tag{16}$$

где $\alpha = (0, \|\mathrm{A}\|^{-2})$ параметр спуска.

Изучим вопрос сходимости градиентных методов. Рассмотрим ситуацию, когда А −линейный непрерывный оператор, а уравнение $Aq = f$ имеет более одного решения. Тогда можно ввести дополнительные условия на искомое решение, например, потребовать, чтобы решение было минимальным по норме или самым близким к некоторому заданному элементу $q^0 \in Q$.

*Определение 2***.** Нормальным относительно некоторого $q^0 \in Q$ решением уравнения $Aq = f$ назовем то решение $q_{\text{н}}^0 \in Q_f$, которое имеет наименьшее уклонение от q^0, т.е.[1]

$$\|q_{\text{н}}^0 - q^0\| = \min_{q \in Q_f} \|q - q^0\|.$$

*Замечание 1***.** Обычно элемент q^0 выбирают с учетом априорной информации об искомом решении.

Рассмотрим задачу нахождения нормального относительно некоторого $q^0 \in Q$ решения уравнения $Aq = f$. Обозначим область значений оператора A через

$$R(A) = A(Q) = \{f \in F: \exists q \in Q, \text{такой, что } Aq = f\}$$

Результаты о сходимости градиентных методов и их устойчивости к ошибкам в правой части, полученные для корректных задач, могут быть применены и к случаю нахождения решения нормального относительно q^0 решения, если область значений $R(A)$ оператора A замкнута.

Рассмотрим метод Ландвебера для некорректных задач (метод простой итерации):

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n,$$
$$q_0 \in Q, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad \alpha = const \in (0, \|A\|^{-2})$$

при обосновании сходимости потребуются ограничения на α.

*Лемма 1***.** При всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо равенство[1]

$$J(q_n) - J(q_{n+1}) = \alpha \|J' q_n\|^2 - \alpha^2 \|AJ' q_n\|^2$$

Доказательство. Распишем разность $J(q_n) - J(q_{n+1})$, учитывая $J'q = 2(A'q) * (Aq - f)$ и $q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$ тогда получим:

$$J(q_n)-J(q_{n+1})=\|Aq_n-f\|^2-\|Aq_n-A\alpha J'q_n-f\|^2=$$
$$=2\langle Aq_n-f,A\alpha J'q_n\rangle-\alpha^2\|AJ'q_n\|^2=$$
$$=\alpha\langle 2A^*(Aq_n-f),J'q_n\rangle-\alpha^2\|AJ'q_n\|^2=\alpha\|J'q_n\|^2-\alpha^2\|AJ'q_n\|^2,$$

что и требовалось доказать □

Лемма 2. Пусть $q_T\in Q_f$ —одно из решений $Aq=f$. Тогда при всех, $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ имеет место равенство [1]

$$\|q_n-q_T\|^2-\|q_{n+1}-q_T\|^2=4\alpha J(q_n)-\alpha^2\|J'q_n\|^2$$

Доказательство следует из следующих простых равенств

$$\|q_n-q_T\|^2-\|q_n-\alpha J'q_n-q_T\|^2=2\alpha\langle q_n-q_T,J'q_n\rangle-\alpha^2\|J'q_n\|^2=$$
$$=4\alpha\langle Aq_n-f,Aq_n-f\rangle-\alpha^2\|J'q_n\|^2.□$$

Теорема (о сходимости по функционалу метода простой итерации)[1].

Пусть Q и F-гильбертовы пространства, A-линейный ограниченный оператор. Предположим, что для некоторого $f\in F$ существует точное решение q_T уравнения $Aq=f$. Тогда при любом $q_0\in Q$ и $\alpha\in(0,\|A\|^{-2})$ последовательность $\{q_n\}$, определяемая равенствами

$$q_{n+1}=q_n-\alpha J'q_n,\qquad q_0\in Q$$

сходится по функционалу и верна оценка

$$J(q_n)\le\frac{\|q_0-q_T\|^2}{n\alpha(1-\alpha\|A\|^2)}.$$

Задав приращение $q_n+\delta q_n$, введем следующее обозначение

$$\delta u=\tilde{u}-u=u(x,y;q_n+\delta q_n)-u(x,y;q_n)\tag{17}$$

Вычисляем приращение целевого функционала $J(q_n)$ используя обозначение (17)

$$J(q_n+\delta q_n)-J(q_n)=\int_0^{L_y}[u(0,y;q_n+\delta q_n)-f(y)]^2dy-\int_0^{L_y}[u(0,y;q_n)-f(y)]^2dy=$$
$$=\int_0^{L_y}[u(0,y;q_n+\delta q_n)-u(0,y;q_n)]$$
$$\cdot[u(0,y;q_n+\delta q_n)-f(y)+u(0,y;q_n)-f(y)]dy=$$
$$=\int_0^{L_y}\delta u(0,y;q_n)2\cdot[u(0,y;q_n)-f(y)]dy+o(\|\delta u\|)\tag{18}$$

Рассмотрим постановку возмущенной задачи к задачи $(5)-(8)$

$$\tilde{u}_{xx}+\tilde{u}_{yy}+k^2\tilde{u}=0\qquad (x,y)\in\Omega\tag{19}$$
$$\tilde{u}_x(0,y)=0\qquad y\in[0,L_y]\tag{20}$$
$$\tilde{u}(L_x,y)=q_n+\delta q_n\qquad y\in[0,L_y]\tag{21}$$
$$\tilde{u}(x,0)=\tilde{u}(x,L_y)=0\qquad x\in[0,L_x]\tag{22}$$

Чтобы получить задачу от $\delta u(0, y; q_n)$ из задачи (19)-(22) вычтем задачу (5)-(8) и учитывая (17), получим следующие соотношения:

$$\delta u_{xx} + \delta u_{yy} + k^2 \delta u = 0 \qquad (x, y) \in \Omega \qquad (23)$$
$$\delta u_x(0, y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \qquad (24)$$
$$\delta u(L_x, y) = \delta q_n \qquad y \in [0, L_y] \qquad (25)$$
$$\delta u(x, 0) = \delta u(x, L_y) = 0 \qquad x \in [0, L_x] \qquad (26)$$

Рассмотрим выражение (23) и умножим на произвольную функцию $\psi(x, y)$ затем, проинтегрируем это выражение по переменной x от 0 до L_x и по переменной y от 0 до L_y

$$0 = \int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\left[\delta u_{xx} + \delta u_{yy} + k^2\delta u\right]\psi dydx = \int_0^{L_y} \psi \delta u_x\Big|_0^{Lx} dy - \int_0^{L_y} \psi_x \delta u\Big|_0^{Lx} dy + \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \psi_{xx}\delta u dxdy +$$
$$+ \int_0^{L_x} \psi \delta u_y\Big|_0^{L_y} dx - \int_0^{L_x} \psi_y \delta u\Big|_0^{L_y} dx + \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \psi_{yy}\delta u dxdy + \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} k^2 \delta u \psi dxdy =$$
$$= \int_0^{L_x}\int_0^{L_y} \left(\psi_{xx} + \psi_{yy} + k^2\psi\right)\delta u dxdy + \int_0^{L_y} \psi(L_x, y)\delta u_x(L_x, y) dy$$
$$- \int_0^{L_y} \psi_x(L_x, y)\delta u(L_x, y) dy + \int_0^{L_y} \psi_x(0, y)\delta u(0, y) dy - \int_0^{L_x} \psi_y(x, L_y)\delta u(x, L_y)\, dx$$
$$+ \int_0^{L_x} \psi_y(x, 0)\delta u(x, 0)\, dx \qquad (27)$$

Учитывая (18) и (27), получим

$$\int_0^{L_y} \delta q_n \cdot J' q_n dy = \int_0^{L_y} \delta u(0, y; q_n) \cdot 2(u(0, y) - f(y))$$
$$\int_0^{L_y} \psi_x(L_x, y) \cdot \delta q_n dy = \int_0^{L_y} \psi_x(0, y)\delta u(0, y) dy$$

откуда,

$$\langle \delta q_n, J' q_n \rangle = \int_0^{L_y} \psi_x(L_x, y)\delta q_n dy$$
$$J' q_n = \psi_x(L_x, y)$$

Таким образом вытекает постановка сопряженной задачи

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} + k^2\psi = 0 \qquad (x, y) \in \Omega \qquad (28)$$
$$\psi(L_x, y) = 0 \qquad y \in [0, L_y] \qquad (29)$$
$$\psi_x(0, y) = 2(u(0, y) - f(y)) \qquad y \in [0, L_y] \qquad (30)$$
$$\psi(x, L_y) = \psi(x, 0) = 0 \qquad x \in [0, L_x] \qquad (31)$$

Результаты исследования и дискуссия

По результатам выполненных исследований для решения обратной задачи разработан численный алгоритм с применением метода Ландвебера, обеспечивающий сходимость к точному решению.

Алгоритм решения обратной задачи методом Ландвебера:

1. Задаем q_0 (начальное приближение)
2. Решаем прямую задачу предположив, что q_n уже известна:

$$\begin{array}{ll} u_{xx} + u_{yy} + k^2 u = 0 & (x, y) \in \Omega \\ u_x(0, y) = 0 & y \in [0, L_y] \\ u(L_x, y) = q_n(y) & y \in [0, L_y] \\ u(x, 0) = u(x, L_y) = 0 & x \in [0, L_x] \end{array}$$

3. Вычисляем значение целевого функционала

$$J(q_n) = \|Aq_n - f\|^2 = \int_0^{L_y} [u(0, y; q_n) - f(y)]^2 dy$$

4. Решаем сопряженную задачу, если значение функционала $J(q_n)$-недостаточно мало:

$$\begin{array}{ll} \psi_{xx} + \psi_{yy} + k^2 \psi = 0 & (x, y) \in \Omega \\ \psi(L_x, y) = 0 & y \in [0, L_y] \\ \psi_x(0, y) = 2(u(0, y) - f(y)) & y \in [0, L_y] \\ \psi(x, L_y) = \psi(x, 0) = 0 & x \in [0, L_x] \end{array}$$

5. Вычисляем градиент функционала

$$J' q_n = \psi_x(L_x, y)$$

6. Вычисляем q_{n+1} (следующее приближение)

$$q_{n+1} = q_n - \alpha J' q_n$$

переходим к пункту 2.

В данном алгоритме начальное приближение q_0 рассматривается как $q_0 \in Q$ константа α определяется как $\alpha = const \in (0, \|A\|^{-2})$. Согласно алгоритму задается начальное приближение q_0 и решается прямая задача в пункте 2 вышеуказанного алгоритма. Проводится поиск минимума целевого функционала согласно пункту 3, если функционал не достигает минимума, то решается сопряженная задача из пункта 4. Далее вычисляется градиент функционала согласно пункту 5 алгоритма и следующее приближение уточняется с помощью формулы из пункта 6.

Заключение

В данной статье рассматривается задача продолжения для уравнения Гельмгольца с заданной константой. Решение исследуемой исходной задачи сводится к решению обратной задачи, по отношению к прямой (корректной) задаче. Обратная задача сформулирована таким образом, что нужно найти $q_n(y) = u(L_x, y)$ из соотношений (5),(6),(8) с дополнительной информации о решении прямой задачи. Для решения данной задачи формулируется определение обобщенной задачи. Рассматривается исследование вопросов сходимости градиентных методов для решения обратной задачи. Разработан алгоритм для решения обратной задачи с применением теории сопряженной оптимизации и метода Ландвебера. Представлены подробные выкладки получения сопряженной задачи.

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант № AP19579325 «Разработка и исследование современных численных методов решения обратных и некорректных задач для уравнения акустики»)

Список использованной литературы

[1] Кабанихин С.И.Обратные и некорректные задачи.-Новосибирск:Сибирское научное издательство,2008.-460 с.

[2] Кабанихин С.И.,Бектемесов М.А.,Нурсеитова А.Т. Итерационные методы решения обратных и некорректных задач с данными на части границы/ Алматы-Новосибирск:ОФ «Международный фонд обратных задач», 2006.-394 с.

[3] Козлов В.А., Мазья В.Г., Фомин А.В. Об одном итерационном методе решения задачи Коши для эллиптических уравнений//Журнал вычислительной математики и математической физики.-1991.Т.31.,№1.-С.64-73

[4] Kabanikhin S.I., and Karchevsky A.L., "Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation" Journal of Inverse and Ill-posed Problems, vol. 3, no. 1, 1995, pp. 21-46. https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.1.21

[5] Марчук Г.И. Математическое моделирование в проблеме окружающей среды. М.:Наука.,1982.-320 с.

[6] Марчук Г.И. Курс лекций. Сопряженные уравнения. М., 2000.-229 с.

[7] Кабанихин С.И., Аяпбергенова А.Т. Метод итераций Ландвебера в обратной задаче акустики.// Обратные задачи и информацтонные технологии.-2002.-1(1)-С.7-47.

References

[1] Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems. - Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing House, 2008. - 460 p.

[2] Kabanikhin S.I., Bektemesov M.A., Nurseitova A.T. Iterative methods for solving inverse and ill-posed problems with data on part of the boundary / Almaty-Novosibirsk: PF "International Foundation of Inverse Problems", 2006.-394 p.

[3] Kozlov V.A., Mazya V.G., Fomin A.V. On one iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations//Journal of Computational Mathematics and Mathematical Physics.-1991.T.31.,No.1.-P.64-73

[4] Kabanikhin S.I., and Karchevsky A.L., "Optimizational method for solving the Cauchy problem for an elliptic equation" Journal of Inverse and Ill-posed Problems, vol. 3, no. 1, 1995, pp. 21-46. https://doi.org/10.1515/jiip.1995.3.1.21

[5] Marchuk G.I. Mathematical modeling in environmental problems. M.:Nauka., 1982.-320 p.

[6] Marchuk G.I. Course of lectures. Conjugate equations. M., 2000.-229 p.

[7] Kabanikhin S.I., Ayapbergenova A.T. Landweber iteration method in the inverse problem of acoustics.// Inverse problems and information technologies.-2002.-1(1)-P.7-47.