МРНТИ 27.31.15

10.51889/2959-5894.2025.89.1.003

А.У. Бекбауова

НАО Актюбинский региональный университет имени К.Жубанова, г. Актобе, Казахстан
*e-mail: mirra478@mail.ru

О РЕШЕНИЯХ В ШИРОКОМ СМЫСЛЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Аннотация

В статье рассмотрены вопросы существования и единственности периодических по части переменных решения в широком смысле нелинейной системы в частных производных первого порядка**.** Математические модели физических и иных процессов описываются с помощью дифференциальных уравнений в частных производных. В статье приведены определения решения в широком смысле нелинейной системы в частных производных первого порядка, основные свойства оператора дифференцирования. Применены метод характеристик, метод сжатых отображений, в шаре доказана терема о существовании и единственности периодического по части переменных решения в широком смысле нелинейной системы уравнения в частных производных первого порядка. Доказано необходимое и достаточное условие периодичности по части переменных решения в широком смысле.

Ключевые слова: нелинейные системы, системы уравнения в частных производных, обыкновенные дифференциальные уравнения, решения в широком смысле, метод характеристик.

А.У. Бекбауова

Қ. Жұбанов атындағы Ақтөбе өңірлік университеті КеАҚ, Ақтөбе қ., Қазақстан

СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС БІРІНШІ РЕТТІ ДЕРБЕС ТУЫНДЫЛЫ ЖҮЙЕЛЕРДІҢ КЕҢ МАҒЫНАДАҒЫ ШЕШІМІ ТУРАЛЫ

Аңдатпа

Мақалада бірінші ретті сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты кең мағынадағы шешімдерінің бар болуының жеткілікті шарттары қарастырылған. Физикалық және де басқа процесстер дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер көмегімен сипатталады. Мақалада сызықты емес бiрiншi реттi дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің кең мағынадағы шешімінің анықтамасы берілген. Сипаттауыштар әдісі және сығушы оператор әдісі қолданылып, шарда сызықты емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесінің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодты кең мағынадағы шешімдері бар және жалғыз болатыны дәлелденген. Кең мағынадағы шешімдердің айнымалылардың бір бөлігі бойынша периодтылығының қажетті және жеткілікті шарты көрсетілген.

Түйін сөздер: сызықты емес жүйелер, дербес туындылы дифференциалдық жүйелер, қарапайым дифференциалдық теңдеулер, кең мағынадағы шешімдер, сипаттауыштар әдісі.

A.U. Bekbauova

Aktobe Regional University named after K. Zhubanov, Aktobe, Kazakhstan

ABOUT SOLUTIONS IN THE BROAD SENSE OF NONLINEAR SYSTEMS IN PARTIAL DERIVATIVES OF THE FIRST ORDER

Abstract

The article addresses the issues of existence and uniqueness of periodic solutions in some variables in the generalized sense for a nonlinear system of first-order partial differential equations. Mathematical models of physical and other processes are described using partial differential equations. The article provides definitions of solutions in the generalized sense for a nonlinear system of first-order partial differential equations, as well as the main properties of the differentiation operator. The method of characteristics and the method of contraction mappings are applied. The theorem on the existence and uniqueness of a periodic solution in some variables in the generalized sense for a nonlinear system of first-order partial differential equations is proven within a ball. The necessary and sufficient conditions for periodicity in some variables of the solution in the generalized sense are also proven.

Keywords: nonlinear system, system of partial derivative equations, ordinary differential equations, solutions in a broad sense, method of characteristics.

Основные положения

В данной статье проводится литературный обзор работ посвященной в общую теорию нелинейных, периодических, почти периодических колебаний.

В работе исследованы вопросы существования и единственности периодического по части переменных решения в широком смысле системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Рассмотрены линейные и нелинейные системы в частных производных первого порядка. Даны определения периодического по части переменных решения в широком смысле. Установлены достаточные условия существования и единственности периодического по части переменных решения в широком смысле, получено необходимое и достаточное условие периодичности по части переменных решения в широком смысле нелинейных систем в частных производных первого порядка.

Введение

Системы уравнения в частных производных часто применяется при решениях прикладных задач. Периодические решения широко используются в физике для описания колебательных процессов, описывать циклические процессы в биологии, в инженерии и электронике периодические решения соответствуют устойчивым режимам работы колебательных систем, таких как генераторы, фильтры и схемы с обратной связью [1-7].

Развития общий теории нелинейных колебаний взял свое начало в 90-х годов XIX столетия. Для построения периодических решений нелинейных систем дифференциальных уравнений, которые содержат малый параметр был предложен метод А. Пуанкаре и этот метод широко применен в области радиофизики. Наиболее содержательные и глубокие результаты по различным проблемам теории периодических и почти периодических колебаний были изложены в многих работах ученных. В работах В.Х.Харасахала многие вопросы, связанные с системами обыкновенных дифференциальных уравнений с квазипериодической правой частью, сведены к изучению систем уравнений в частных производных. Такой переход возможен благодаря связи между квазипериодическими функциями от одной переменной и периодическими функциями от многих переменных, установленных П.Болем, Г.Бором. [8-9]

Цель этой работы исследовать вопросы существования и единственности периодических по части переменных решения в широком смысле нелинейной системы в частных производных первого порядка**.** Применены метод характеристик, принцип сжатых отображенияб получены достаточные условия существования и единственности решения в широком смысле системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, с периодическими условиями.

Методология исследования

Изучение самих уравнений в частных производных представляет определенный интерес, и находят применение в прикладных задачах. Изучению периодических по временной и пространственным переменным решений систем уравнений в частных производных посвящены следующие работы [9-15].

В прикладных проблемах, когда, исходя из требований нормального функционирования объекта, достаточно обеспечить многопериодичность по части переменных, естественным образом возникает задача об установлении периодических движений по отношению к части переменных (затухающие колебания, винтовое движение материальной точки; одноосная стабилизация спутника и др.) В работе [9-10] рассматривались почти многопериодические по части переменных решения квазилинейной системы гиперболического типа с переменными матричными коэффициентами, у которой линейная часть распадается на самостоятельные скалярные однородные линейные уравнения. Построены классические решения системы в классе периодических по части переменных функций.

В большинстве физических задач определение обобщенного решения диктуется постановкой задачи (например, в газовой динамике основными физическими законами являются законы сохранения массы, импульса, энергии, а обобщенное решение определяются как течение, удовлетворяющее этим основным законам). Следуя Фридрихсу, обобщенное решение систем в частных производных называется решением в широком смысле.

Если не предполагать, что входные данные системы в частных производных первого порядка имеют непрерывные производные, то это уравнение может не иметь ни одного решения с непрерывными частными производными. Таким примером является пример Н.М. Гюнтера [16]. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=b(x-y) \tag{1}$$

где $b(\omega)$ - непрерывная функция Вейерштрасса, нигде не имеющая производной по ω. Чтобы доказать это, введем вместо x и y новые независимые переменные ϑ и ω положив $x+y=\vartheta$ и $x-y=\omega$, $z(x,y)=u(\vartheta,\omega)$.

Решением уравнения (1), называем функцию $z(x,y)$, которая имеет всюду в рассматриваемой области, частные производные по x и y, и удовлетворяет этому уравнению.

Допустим, что в некоторой области на плоскости существует решение $z(x,y)$ уравнения (1), имеющее непрерывные производные по x и y. Тогда, выразив по обычным формулам производные от z по x и y через производные от u по ϑ и ω, получим

$$\frac{\partial u}{\partial \vartheta}=\frac{1}{2}b(\omega) \tag{2}$$

Все решения этого уравнения даются формулой

$$u(\vartheta,\omega)=\frac{1}{2}b(\omega)\vartheta+c(\omega), \tag{3}$$

где $c(\omega)$ - любая функция от ω. Значит,

$$z(x,y)=\frac{1}{2}(x+y)b(x-y)+c(x-y) \tag{4}$$

Но легко показать, что нет такой области на плоскости (x,y), где даваемая этой формулой функция z имеет производные по переменным x и y. Для этого заметим следующее: если бы эти производные существовали в точке (x,y) и $(x+\varepsilon,y+\varepsilon)$, то существовали бы также производные в точке (x,y) у функции

$$z(x+\varepsilon,y+\varepsilon)-z(x,y)=\varepsilon b(x-y),$$

что невозможно. Значит, функция $z(x,y)$ не может удовлетворять уравнению (2), и наше первоначальное предположение было неверно.

Можно показать, что всякое непрерывное решение уравнения (2), имеет вид (4), если даже не требовать, чтобы решение имело непрерывные производные. Тогда мы придем к выводу, что уравнение (2) ни в какой области не имеет непрерывного решения.

Решения в широком смысле квазилинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с двумя независимыми переменными, решения в широком смысле систем уравнений в частных производных первого порядка построены в работах [17-20].

Результаты исследования

Рассмотрим следующую нелинейную систему в частных производных первого порядка

$$Du = P(t,x,y)u + F(t,x,y,u) \tag{5}$$

где $D = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{j=1}^{m} a_j\,(t,x,y)\frac{\partial}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{k} b_j\,(t,x,y)\frac{\partial}{\partial y_j}$ - оператор дифференцирования D по направлениям векторных полей, заданных вектор - функциями $a(t,\varphi,\psi)$ и $b(t,\varphi,\psi)$ в пространстве переменных $t \in (-\infty,+\infty) = R,\ x = (x_1,\dots,x_m) \in R^m,\quad y = (y,\dots,y) \in R^k$, $a(t,x,y),\quad b(t,x,y)$ - непрерывные вектор - функции размерности соответственно m,k, обладающими свойствами периодичности, гладкости

$$\begin{gathered} a(t+\theta, x+q\omega, y) = a(t,x,y) \in C^{(0,1,1)}_{t,x,y}(R \times R^m \times R^k), \\ b(t+\theta, x+q\omega, y) = b(t,x,y) \in C^{(0,1,1)}_{t,x,y}(R \times R^m \times R^k), \end{gathered} \tag{6}$$

и ограниченности с нормой, максимизирующей евклидовую метрику вектор - функции

$$\begin{gathered} \|\mathrm{a}\| \le \alpha_0,\ \left\|\frac{\partial a}{\partial x}\right\| \le \alpha_1,\quad \left\|\frac{\partial a}{\partial y}\right\| \le \alpha_2, \\ \|b\| \le \beta_0,\ \left\|\frac{\partial b}{\partial x}\right\| \le \beta_1,\quad \left\|\frac{\partial b}{\partial y}\right\| \le \beta_2, \end{gathered} \tag{7}$$

для всех $q = (q_1,\dots,q_m) \in Z^m$, Z - множество целых чисел. Периоды $\omega_0 = \theta,\ \omega_1,\dots,\omega_m$ - положительные несоизмеримые постоянные, $q\omega = (q_1\omega_1, q_2\omega_2,\dots,q_m\omega_m)$ - вектор кратных периодов, $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_m)$, $\alpha_0,\beta_0,\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ - некоторые положительные постоянные, $u = (u_1,\dots,u_{n_1})$ - искомая вектор – функция, $P(t,x,y)$ - $-n_1 \times n_1$ –матрица, обладающая свойствами периодичности по части переменных и ограниченности:

$$\begin{gathered} \|P\| \le k_0 = const > 0, \\ P(t+\theta, x+q\omega, y) = P(t,x,y) \in C(R \times R^m \times R^k),\ q \in Z^m \end{gathered} \tag{8}$$

F - n_1 - вектор – функция, обладающая свойствами периодичности

$$F(t+\theta, x+q\omega, y, u) = F(t,x,y,u) \in C^{(0,0,0,1)}_{t,x,y,u}(R \times R^m \times R^k \times R^{n_1}), \tag{9}$$

$q \in Z^m$, условию Липшица относительно x.

Оператор дифференцирования D обладает следующими свойствами:

1^0. $D(u_1+u_2) = Du_1 + Du_2$

где $u_1(t,x,y)$ и $u_2(t,x,y)$ - некоторые скалярные дифференцируемые функции

2^0. $D(u_1 \cdot u_2) = u_1 \cdot Du_2 + u_2 \cdot Du_1$

3^0. $D(C \cdot u_1) = k \cdot Du_1$, где $C = const$.

4^0. Если $u(t,x,y) = \{u_1(t,x,y),\dots,u_n(t,x,y)\} -$ дифференцируемая n – мерная вектор – функция, то $Du = \{Du, Du_2,\dots,Du_n\}$. Таким образом, оператор D действует на вектор – функцию $u(t,x,y)$ покоординатно.

5^0. Оператор D действует на матричную функцию поэлементно, т.е. если $U(t,x,y) = \{u_{jk}(t,x,y)\}$ $(j=\overline{1,m}, k=\overline{1,m})$, то положим

$$DU = \{Du_{jk}\}$$

8^0. Для постоянной матрицы C имеем, $DC = 0$.

9^0. Если $U(t,x,y)$ - неособенная матрица и $U^{-1}(t,x,y)$ - ее обратная матрица, то

$$DU^{-1} = -U^{-1}(DU)U^{-1}$$

Определение

Непрерывная в $R \times R^m \times R^k$ вектор функция $u(t,x,y)$ называется периодической по части переменных решением системы (5) в широком смысле, если она периодична по t,φ с вектор - периодом (θ,ω), т.е. удовлетворяет следующую условию

$$u(t+\theta, x+q\hat{\omega}, y) = u(t,x,y), \tag{*}$$

ограничена по всем переменным и непрерывно дифференцируема по переменному t вдоль характеристики $\{\lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0)\}$ оператора дифференцирования D, причем для полных производных по t выполнены тождества

$$\frac{d\tilde{u}}{dt} = \tilde{P}\tilde{u} + \tilde{F} \tag{10}$$

где

$$\tilde{u} = u(t, \lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0)),\ \tilde{P} = P(t, \lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0)),$$

$$\tilde{F} = F\big(t, \lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0), \tilde{x}(t, \lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0))\big)$$

Характеристики $\{\lambda(t,t_0,x_0,y_0), \xi(t,t_0,x_0,y_0)\}$ оператора дифференцирования D удовлетворяет следующим интегральным уравнениям [21],

$$\begin{cases} \lambda(t,t_0,x_0,y_0) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} a[s, \lambda(s,t_0,x_0,y_0), \xi(s,t_0,x_0,y_0)]ds \\ \xi(t,t_0,x_0,y_0) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} b[s, \lambda(s,t_0,x_0,y_0), \xi(s,t_0,x_0,y_0)]ds \end{cases}$$

Теорема1. Пусть матрицант системы (5) $U(t,x,y,t_0,\lambda(t_0,t,x,y),\xi(t_0,t,x,y))$ обладает свойством некритичности

$$|U(t,x,y,t_0,\lambda(t_0,t,x,y),\xi(t_0,t,x,y))| \le Be^{-\gamma(t-t_0)},\ t \ge t_0,$$

где $B = const \ge 1$, $\gamma > 0$, и *выполнены условия (6)-(9). Тогда система (4) имеет единственное периодическое по части переменных решение в широком смысле.*

Доказательство.

В силу условия (9), имеем оценку

$$|F(t,x,y,u)| \le \mathrm{M} + N|u| \tag{9_1}$$

Где $\|F\| = sup_{R\times R^m \times R^k \times R_{n_1}} |F(t,x,y,0)| = M, N > 0$ - постоянная Липшица, для всех $(t,x,y,u) \in R \times R^m \times R^k \times R^{n_1}$. Тогда решение системы (5) продолжаемо при всех $(t,x,y) \in R \times R^m \times R^k$.

В шаре $S_{\Delta}^{\theta,\omega}$ пространства (θ,ω)- периодических по t, x, ограниченных и непрерывных функций $u(t,x,y)$ с нормой $\|u\| = sup_{R\times R^m \times R^k \times R_{n_1}} |u(t,x,y)| \leq \triangle_1 = const > 0$ рассмотрим интегральный оператор Q_1:

$$Q_1 u(t,x,y) = \int_{-\infty}^{t} U\,(t,x,y,s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)) \times$$
$$f(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),x(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))ds$$

в предположении, что постоянные B,γ,N,M и Δ_1 связаны соотношениями

$$\frac{\mathrm{B}}{\gamma}(M+N\Delta_1) < \Delta_1 \qquad (11)$$

Тогда из (11) следует, что

$$\frac{BN}{\gamma} < 1. \qquad (12)$$

В силу условия (9) и оценок (11), (9_1) и (12) оператор Q_1 отображает $S_{\Delta}^{\theta,\omega}$ в себя и является сжимающим оператором. Следовательно, по принципу сжатых отображений Q_1 оператор в пространстве $S_{\Delta}^{\theta,\omega}$ имеет единственную неподвижную точку $u^*(t,x,y) = (Q_1 u^*)(t,x,y)$.

Далее, покажем, что в силу наложенных выше условий на систему (1), неподвижная точка $u^*(t,x,y)$ непрерывно дифференцируема по t вдоль характеристик и является решением системы (5) в широком смысле.

Действительно, имеем тождество

$$u^*(t,x,y) = \int_{-\infty}^{t} U\,(t,x,y,s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)) \times$$
$$f(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),x(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))ds$$

которое вдоль характеристики $x = \lambda(t,t_0,x_0,y_0), y = \xi(t,t_0,x_0,y_0)$ переходит в соотношение

$$u^*(t,\lambda(t,t_0,x_0,y_0),\xi(t,t_0,x_0,y_0)) =$$
$$= \int_{-\infty}^{t} X\,(t,\lambda(s,t_0,x_0,y_0),\xi(s,t_0,x_0,y_0),s,x_0,y_0) \times$$
$$\times F(s,x_0,y_0,u(s,x_0,y_0))ds,$$

с векторным параметром $x_0 = (x_1^0,\ldots,x_m^0) \in R^m$, $y_0 = (y_1^0,\ldots,y_k^0) \in R^k$.

Дифференцируемость решения по переменному t, полученного вольтерового интегрального уравнения общеизвестна, в силу равномерной сходимости несобственного интеграла.

На основание теоремы о непрерывности решений обыкновенных дифференциальных уравнений по параметрам покажем непрерывность $\tilde{u}(t,x_0,y_0)$ по координатам x_0, y_0. $\tilde{u}(t,x_0,y_0)$ является единственным ограниченным решением соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (10).

Замена $x_0 = \lambda(t_0,t,x,y), y_0 = \xi(t_0,t,x,y)$. естественно не нарушают ее дифференцируемость, которая переводит это решение в решение $u^*(t,x,y)$ исследуемой нелинейной системы (5). Таким образом, имеем

$$u^*(t,x,y) \in S_{\Delta}^{\theta,\omega}.$$

Теперь покажем, что такое решение у системы (5) единственное. Действительно, разность $\rho(t,x,y)$ двух разных периодических по части переменных решений в широком смысле $u^*(t,x,y)$ и $u^{**}(t,x,y)$ системы (5) удовлетворяет линейной системе

$$D\rho = P(t,x,y)\rho + F(t,x,y,u^*) - F(t,x,y,u^{**})$$

имеет интегральное представление

$$u(t,x,y) = \int_{-\infty}^{t} U\,(t,x,y,s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)) \times$$
$$\times\,[F(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),u^*(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y)) -$$
$$-F(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y),u^{**}(s,\lambda(s,t,x,y),\xi(s,t,x,y))]ds$$

Оценивая ее, в силу (9), получим

$$\|\rho\| \le \frac{\text{B}N}{\gamma}\|\rho\|$$

где $\frac{\text{B}N}{\gamma} < 1$. Отсюда имеем $\|\rho\| = 0$, т.е. периодическое по части переменных решение системы (1) единственное.

Установим необходимое и достаточное условие периодичности по части переменных решения в широком смысле системы (5).

Теорема 2. Для того чтобы решение в широком смысле $u(t,x,y)$ системы (5) было (θ,ω) −периодическим по части (t,x) переменных (t,x,y) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось тождество

$$u\big(t_0,\lambda(t_0,t,x,y),\xi(t_0,t,x,y)\big) = u\big(t_0+\theta,\lambda(t_0,t,x,y)+q\omega,\xi(t_0,t,x,y)\big) \qquad (13)$$

Доказательство. Необходимость условия (13) следует из (θ,ω) периодичности по (t,x) решения в широком смысле системы (5). Если функция $u(t,x,y)$ периодическая по части переменных, то выполняется тождество (*) для всех $(t,x,y) \in R \times R^m \times R^k$. Заменим t на t_0, x на $\lambda(t_0,t,x,y)$, y на $\xi(t_0,t,x,y)$, тогда получим тождество (*).

Для доказательства достаточности применяем свойства обратимости, периодичности характеристической вектор – функции $\{\lambda(t,t_0,x_0,y_0),\xi(t,t_0,x_0,y_0)\}$.

Допустим, что $u(t,x,y)$ - решение в широком смысле системы (1), удовлетворяющее условию (13).

Очевидно, что наряду с решением $u(t,x,y)$ в широком смысле системы (5) вектор – функция $u(t+\theta,x+q\omega,y)$ является также решением в широком смысле этой системы в силу (θ,ω) - периодичности системы по (t,ϕ), причем, положив $t=t_0$ в условии (13) имеем

$$u(t_0+\theta,x+q\omega,y) = u(t_0,x,y) \qquad (*)$$

Далее, рассматривая эти решения вдоль характеристик имеем $u\big(t,\lambda(t,t_0,x_0,y_0),\xi(t,t_0,x_0,y_0)\big)$ и $u\big(t+\theta,\lambda(t,t_0,x_0,y_0)+q\omega,\xi(t,t_0,x_0,y_0)\big)$, которые являются решениями системы (1), причем при $t=t_0$ они в силу (13) совпадают, т.е.

$$u(t_0+\theta,x_0+q\omega,y_0) = u(t_0,x_0,y_0)$$

Следовательно, в силу единственности решений системы (5) эти решения тождественно равны:

$$u\big(t+\theta,\lambda(t,t_0,x_0,y_0)+q\omega,\xi(t,t_0,x_0,y_0)\big) = u\big(t,\lambda(t,t_0,x_0,y_0),\xi(t,t_0,x_0,y_0)\big)$$

Отсюда заменой $x_0 = \lambda(t_0, t, x, y), y_0 = \xi(t_0, t, x, y)$. в силу $\lambda[t_0, \tau, \lambda(\tau, t, x, y), \xi(\tau, t, x, y)] = \lambda(t_0, t, x, y), \xi[t_0, \tau, \lambda(\tau, t, x, y), \xi(\tau, t, x, y)] = \xi(t_0, t, x, y)$. имеем определение периодичности решения:

$$u(t + \theta, x + q\omega, y) = u(t, x, y)$$

Теорема доказана.

Дискуссия

Классические решения нелинейных уравнений обладают свойством неограниченного возрастания величины производных, которое называют градиентной катастрофой. Смысл этого свойства состоит в том, что при сколь угодно гладких начальных значениях первые производные решения остаются ограниченными, лишь в течение конечного времени. При некотором $t_0 > 0$ они становятся неограниченными. При $t > t_0$ классического решения поставленной задачи Коши не существует (например, ударная волна, образованная из волны сжатия).

Исследуя решения в широком смысле с периодическими условиями нелинейной системы в частных производных первого порядка, показали, что есть возможность ослабить условия существования и построения классического решения нелинейной системы.

Заключение

Получены достаточные условия существования и единственности периодической по части переменных решения в широком смысле нелинейной системы дифференциальных уравнений первого порядка. Установлена необходимое и достаточное условие периодичности по части переменных решения в широком смысле системы.

Если предполагать, что вектор - функция F и матрица P имеют непрерывную и ограниченную производную первого порядка по координатам векторов x, y, и выполнены все условия теоремы 1, тогда построенное решение в широком смысле будет классическим решением системы (1).

Благодарность

Данное исследование финансировалось Комитетом науки Министерства науки и высшего образования Республики Казахстан (грант AP19675358)

Список использованных источников

[1] E.M. Abbasov, N.A. Agaeva, and S.A. Imamaliev Modeling of Hydrodynamics of Liquid Motion in Complex Profile Pipeline // Journal of Engineering Thermophysics, Vol. 29, No. 3, 2020

[2] Muhammad Bhatti, Pau lBracken, Nicholas Dimakis and Armando Herrera Solution of mathematical model for gas solubility using fractional order Bhatti polynomials // J. Phys. Commun.2(2018), 085013, P. 1-8, https://doi.org/10.1088/2399-6528/aad2fc

[3] Calatayud J. et al. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme / Applied Numerical Mathematics, 2020, T. 151, pp. 413-424. DOI 10.1016/j.apnum.2020.01.012.

[4] Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of finite volume finite element method // International journal of thermal sciences, 2018, vol. 127, pp. 142-157, DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022

[5] M.J. Mardanov, Y.A. Sharifov, K.E .Ismayilova. Existence and uniqueness of solutions for the system of integro-differential equations with three-point and nonlinear integral boundary conditions, // Bulletin of the Karaganda University Mathematics series. № 3(99)/2020

[6] Клер А.М. Метод динамических расчетов элементов теплоэнергетических установок, сводящий решение систем дифференциальных уравнений в частных производных к решению задач

линейного программирования / А.М. Клер, Д.В. Апанович // Информационные и математические технологии в науке и управлении. – 2022. – № 3(27). – С. 148-161. – DOI: 10.38028/ESI.2022.27.3.014.

[7] Imanchiyev, A.E., Assanova, A.T., Molybaikyzy, A. Properties of a Nonlocal Problem for Hyperbolic Equations with Impulse Discrete Memory // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, 44(10), P.4299–4309

[8] Харасахал В.Х. Почти периодические решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Алма-Ата: Наука, 1970.

[9] Умбетжанов Д.У. Почти многопериодические решения дифференциальных уравнений в частных производных. – Алма-Ата: Наука, 1979.

[10] Умбетжанов Д.У., Бержанов А.Б. О голоморфном почти многопериодическом решении одного интегро-дифференциального уравнения в частных производных // Известия АН КазССР. – 1977. - сер физ. - мат № 5., С.61-66

[11] T. K. Yuldashev and O. Kh. Abdullaev, Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. Math. 42, 2021, P.1113–1123

[12] G. M. Aitenova, Zh. A. Sartabanov, G. A. Abdikalikova, and A. Kerimbekov, ''Bounded and multiperiodic solutions of the system of partial integro-differential equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 95 (3), 8–18 (2019)

[13] Sartabanov Zh.A, Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, 98(2), P.125–140

[14] Assanova, A.T., Bekbauova, A.U., Talipova, M.Z. On a non-local problem for system of partial differential equations of hyperbolic type in a specific domain // International Journal of Mathematics and Physics, 2023, 14(2), P. 36–41

[15] Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2022, Vol. 12, No1, P. 32-48. WOS: 000824351800003.

[16] Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными. – М. Наука, 1965.

[17] Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N., Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics, Nauka, M., 1978, 687 p.

[18] ZHestkov S.V. O postroenii mnogoperiodicheskih reshenij polulinejnyh giperbolicheskih sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu harakteristik /S.V.ZHestkov // Differencial'nye uravneniya. - 1984. - T.20. - №9. -S.1630-1632.

[19] Abdikalikova G.A. Research of a nonlocal boundary value problem by the parameterization method // International Journal of Information and Communication Technologies. Volume 1, Issue 2, June 2020. P.12-16.

[20] A.U.Bekbauova, M.ZH.Talipova, A.E.Imanchiev, E.K.Kurmangaliev, N.ZH.Uteuova, Derbes tuyndyly differecialdyқ teңdeuler zhүjesiniң keң maғynadaғy sheshimderin tүrғyzu // VESTNIK KazNPU im. Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskie nauki», N3(83), 2023g, S. 7-15

Referens

1] E.M. Abbasov, N.A. Agaeva, and S.A. Imamaliev Modeling of Hydrodynamics of Liquid Motion in Complex Profile Pipeline // Journal of Engineering Thermophysics, Vol. 29, No. 3, 2020

[2] Muhammad Bhatti, Pau lBracken, Nicholas Dimakis and Armando Herrera Solution of mathematical model for gas solubility using fractional order Bhatti polynomials // J. Phys. Commun.2(2018), 085013, P. 1-8, https://doi.org/10.1088/2399-6528/aad2fc

[3] Calatayud J. et al. Constructing reliable approximations of the probability density function to the random heat PDE via a finite difference scheme / Applied Numerical Mathematics, 2020, T. 151, pp. 413-424. DOI 10.1016/j.apnum.2020.01.012.

[4] Cebula A., Taler J., Ocloń P. Heat flux and temperature determination in a cylindrical element with the use of finite volume finite element method // International journal of thermal sciences, 2018, vol. 127, pp. 142-157, DOI: 10.1016/j.ijthermalsci.2018.01.022

[5] M.J. Mardanov, Y.A. Sharifov, K.E .Ismayilova. Existence and uniqueness of solutions for the system of integro-differential equations with three-point and nonlinear integral boundary conditions, // Bulletin of the Karaganda University Mathematics series. № 3(99)/2020

[6] Kler A.M. Metod dinamicheskih raschetov elementov teploenergeticheskih ustanovok, svodyashchij reshenie sistem differencial'nyh uravnenij v chastnyh proizvodnyh k resheniyu zadach linejnogo

programmirovaniya / A.M. Kler, D.V. Apanovich // Informacionnye i matematicheskie tekhnologii v nauke i upravlenii. – 2022. – № 3(27). – S. 148-161. – DOI: 10.38028/ESI.2022.27.3.014.

[7] Imanchiyev, A.E., Assanova, A.T., Molybaikyzy, A. Properties of a Nonlocal Problem for Hyperbolic Equations with Impulse Discrete Memory // Lobachevskii Journal of Mathematics., 2023, 44(10), P.4299–4309

[8] Harasahal V.H. Almost periodic solutions of ordinary differential equations. Alma-Ata: Science, 1970.

[9] Umbetzhanov D.U. Almost multi-period solutions of partial differential equations. Alma-Ata: Science, 1979.

[10] Umbetzhanov D.U., Berzhanov A.B. On the holomorphic almost multi-periodic solution of one integro-differential partial differential equation // Izvestia AN KazSSR. – 1977. - ser physical. - mat No. 5., S.61-66

[11] T. K. Yuldashev and O. Kh. Abdullaev, ‘‘Unique solvability of a boundary value problem for a loaded fractional parabolic-hyperbolic equation with nonlinear terms // Lobachevskii J. Math. 42, 2021, P.1113–1123

[12] G. M. Aitenova, Zh. A. Sartabanov, G. A. Abdikalikova, and A. Kerimbekov, ‘‘Bounded and multiperiodic solutions of the system of partial integro-differential equations // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 95 (3), 8–18 (2019)

[13] Sartabanov Zh.A, Zhumagaziyev A.Kh., Abdikalikova G.A Multiperiodic solution of linear hyperbolic in the narrow sense system with constant coefficients // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics Series, 2020, 98(2), P.125–140

[14] Assanova, A.T., Bekbauova, A.U., Talipova, M.Z. On a non-local problem for system of partial differential equations of hyperbolic type in a specific domain // International Journal of Mathematics and Physics, 2023, 14(2), P. 36–41

[15] Zhumagaziyev A.Kh., Sartabanov Zh.A., Sultanaev Ya.T On a new method for investigation of multiperiodic solutions of quasilinear strictly hyperbolic system // Azerbaijan Journal of Mathematics, 2022, Vol. 12, No1, P. 32-48. WOS: 000824351800003.

[16] Petrovskij I.G. Lekcii ob uravneniyah s chastnymi proizvodnymi. – M. Nauka, 1965.

[17] Rozhdestvensky B. L., Yanenko N. N., Quasi-linear systems equations and their applications to gas dynamics, Nauka, M., 1978, 687 p.

[18] ZHestkov S.V. O postroenii mnogoperiodicheskih reshenij polulinejnyh giperbolicheskih sistem uravnenij v chastnyh proizvodnyh s pomoshch'yu harakteristik /S.V.ZHestkov // Differencial'nye uravneniya. - 1984. - T.20. - №9. -S.1630-1632.

[19] Abdikalikova G.A. Research of a nonlocal boundary value problem by the parameterization method // International Journal of Information and Communication Technologies.Volume 1, Issue 2, June 2020. R.12-16.

[20] A.U.Bekbauova, M.ZH.Talipova, A.E.Imanchiev, E.K.Kurmangaliev, N.ZH.Uteuova, Derbes tuyndyly differecialdyҡ teңdeuler zhүjesiniң keң maғynadaғy sheshimderin tұrғyzu // VESTNIK KazNPU im. Abaya, seriya «Fiziko-matematicheskie nauki», N3(83), 2023g, S. 7-15