Математиканың негізі ешқашан өзгеріске ұшырамаған, алайда оны тиімді оқытудың қазіргі педагоготарға қойылатын талап жоғары. Сондықтан, мұғалім әрқашан ізденісте болуы қажет және алдында тәрбиелеп отырған оқушыларға талабы жоғары болуы тиіс.

Ал, математикадағы логикалық есептердің оқушының ойлау қабілетін дамуына әсері орасан зор. Себебі, стандартты есептеуден өзгеше әр түрлі тәсілмен ойлауды талап етеді.

Бұл мақалада еліміздің әр облысының аймақтық ерекшеліктеріне негізделген логикикалық есептерді шығару барысында оқушы өзіне алатыны мол деп сенемін.

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі:

1 *Қазақстан Республикасының «Білім туралы» Заңы. 2007 жылғы 27 шілде.*
2 *Құдайбергенова К. Құзырлылық – тұлға дамуының сапалық критерийі». Алматы -2000.*
3 *Ғарифолла Ә., Қ.Ахметов «Батыс Қазақстан облысы энциклопедиясы». Алматы-2010.*
4 *Бессчетнов П.П. По лесам Казахстана». Алма-Ата: Казахтан, 1976.-144 бет.*
5 *Шарипханова А. Как залечиваются раны дедушки - бора. Спектр. Семей-2011.*

МРНТИ 27.31.44
DOI: https://doi.org/10.51889/2020-1.1728-7901.16
УДК 517.95

Н.Б. Искакова[1], А.С. Рысбек [1], Н.С. Серік [1]

[1]Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті, Алматы қ., Қазақстан

МОНЖА-АМПЕР ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР СЫЗЫҚТЫ ЕМЕС ЕСЕПТЕРДІҢ ЖУЫҚТАЛҒАН ШЕШІМДЕРІ

Аңдатпа

Монжа-Ампер теңдеуі газ динамикасында, метеорологияда, дифференциалдық геометрияда және тағы басқа ғылымның әр түрлі облыстарында көптеген қолдануларына байланысты сызықты емес математикалық физиканың қарқынды зерттелініп жатқан теңдеулерінің бірі болып табылады.Ұсынып отырған жұмыс біртекті емес Монжа-Ампер теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есеп зерттелінеді, оң жақ бөлігі туындылы немесе еркін сызықты емес бойынша дәрежелік сызықты емес ізделінді функциядан тұрады. Сызықтандыру негізінде зерттелетін шеттік есептерді параметрге тәуелді бастапқы шарттары бар бірінші ретті жай дифференциалдық теңдеу жүйесіне келтірілген.Монжа-Ампер теңдеуі үшін кейбір шеттік есептердің нақты және жуық шешімдерін құру әдістері ұсынылған. Mathcad бағдарламалық пакетінің көмегімен параметрі бар жай дифференциалдық теңдеулердің алынған жүйелерінің жуық шешімдерін құру әдістерін сандық іске асыру жүргізілді. Grafikus сервисінде қарастырылған есептердің нақты және жуық шешімдерінің үшөлшемді графиктері құрылды.

Түйін сөздер: шеттік есеп, Монжа-Ампер теңдеуі, сызықтандыру, жуық шешім.

Аннотация

Н.Б. Искакова[1], А.С. Рысбек [1], Н.С. Серік [1]
[1]Казахский национальный педагогический университет им.Абая, г.Алматы, Казахстан

ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ МОНЖА-АМПЕРА

В связи с многочисленными приложениями в различных областях науки, в том числе в газовой динамике, метеорологии, дифференциальной геометрии и других, уравнение Монжа – Ампера является одним из наиболее интенсивно исследуемых уравнений нелинейной математической физики. В данном сообщении исследуется нелинейная краевая задача для неоднородного уравнения Монжа – Ампера, правая часть которого содержит степенные нелинейности по производным и произвольную нелинейность от искомой функции. На основе линеаризации исследуемые краевые задачи сведены к системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с начальными условиями, зависящими от параметра. Предложены методы построения точных и приближенных решений некоторых краевых задач для уравнения Монжа-Ампера. С помощью программного пакета Mathcad проведена численная реализация методов построения приближенных решений полученных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром. Построены трехмерные графики точных и приближенных решений рассматриваемых задач в сервисе Grafikus.

Ключевые слова: краевая задача, уравнение Монжа-Ампера, линеаризация, приближенное решение.

Abstract

APPROXIMATE SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PROBLEMS FOR THE MONGE-AMPERE EQUATION

Iskakova N.B., [1] *Rysbek A.S.*[1], *Serik N.S.* [1]

[1]*Abai Kazakh national pedagogical University, Almaty, Republic of Kazakhstan*

Due to numerous applications in various fields of science, including gas dynamics, meteorology, differential geometry, and others, the Monge – ampere equation is one of the most intensively studied equations of nonlinear mathematical physics.In this report, we study a nonlinear boundary value problem for the inhomogeneous Monge-ampere equation, the right part of which contains power nonlinearities in derivatives and arbitrary nonlinearity from the desired function.Based on linearization, the studied boundary value problems are reduced to a system of ordinary first-order differential equations with initial conditions that depend on the parameter.Methods for constructing exact and approximate solutions of some boundary value problems for the Monge-ampere equation are proposed.Using the Mathcad software package, numerical implementation of methods for constructing approximate solutions of the obtained systems of ordinary differential equations with a parameter is performed.Three-dimensional graphs of exact and approximate solutions of the problems under consideration in the Grafikus service are constructed.

Keywords: boundary value problem, the equation of Monge-Ampere, linearization, approximate solution.

Монжа-Ампер теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есептерді көптеген авторлар зерттеген [1, 2].Кейбір есептерді зерттеу барысында жуықтау әдістері қолданылады[3, 4].Осы жұмыста Монжа-Ампер теңдеуі үшін сызықты емес шеттік есепті қарастырамыз

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = f\left(ax^2 + bxy^2 + cy^2\right), \tag{1}$$

$$w(x,0) = \varphi(x), \tag{2}$$

$$w'_y(x,0) = \psi(x), \tag{3}$$

мұндағы $b^2 \neq 4ac$.

$w(x,y) = u(z),\ z = ax^2 + bxy + cy^2$ белгісіз функцияны енгізе отырып, (1)-(3)сызықты емес есепті келесі жай дифференциалдық теңдеу үшін есепке келтіреміз

$$2\left(4ac - b^2\right) z u'_z\, u''_{zz} + \left(4ac - b^2\right)\left(u'_z\right)^2 + f(z) = 0$$

$$u(z)\big|_{z=ax^2} = \varphi(x),$$

$$u'_z(z)\big|_{z=ax} = \frac{\psi(x)}{ax^2}.$$

Берілген есепті шешу үшін тізбекті дифференциалдау әдісін қолдана отырып, яғни дифференциалдық теңдеуді қатарлардың көмегімен интегралдауға болады. Мысалдарды қарастырайық.

1 мысал. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеу үшін сызықты емес шеттік есеп берілсін

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x dy}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) = 4(x^2 - 9xy - 3y^2),$$

$$w(x,0) = x^3,$$

$$w'_y(x,0) = x^2.$$

Берілген есептердің шешімін келесі түрде іздейміз

$$w(x, y) = u(z), \quad z = 4(x^2 - 9xy - 3y^2).$$

Онда,

$$w'_x = (8x - 36y)u'_z,$$

$$w'_y = -(36x + 24y)u'_z,$$

$$w''_{xy} = -u''_{zz} \cdot (36x + 24y)(8x - 36y) - 36u'_z,$$

$$w''_{xx} = (8x - 36y)^2 u''_{zz} + 8u'_z,$$

$$w''_{yy} = (36x + 24y)^2 u''_{zz} - 24u'_z.$$

Берілген теңдеуге қоя отырып

$$(-u''_{zz} \cdot (36x + 12y)(8x - 36y) - 36u'_z)^2 -$$

$$-((8x - 36y)^2 u''_{zz} + 8u'_z)((36x + 24y)^2 u''_{zz} - 24u') = z,$$

жақшаларды аша отырып

$$(u''_{zz} \cdot (36x + 24y)(8x - 36y))^2 + 2 \cdot 36(36x + 24y)(8x - 36y)u'_z u''_{zz} + 1296(u')^2 -$$

$$-(u''_{zz} \cdot (36x + 24y)(8x - 36y))^2 - 8(36x + 24y)^2 u'_z u''_{zz} + 24(8x - 36y)^2 u' u''_{zz} -$$

$$-24u' \cdot 8u'_z = z,$$

$$72 \cdot 16(9x + 6y)(2x - 9y)u'_z u''_{zz} + 1296(u')^2 -$$

$$-8 \cdot 16(9x + 6y)^2 u'_z u''_{zz} + 24 \cdot 16(2x - 9y)^2 u' u''_{zz} - 192(u')^2 - z = 0,$$

$u = u(z)$ белгісіз функцияға қатысты қарапайым дифференциалдық теңдеуді аламыз

$$-2208zu'_z u''_{zz} - 1104(u'_z)^2 + z = 0,$$

мұндағы шарттар

$$u(z)\big|_{z=x^3} = x^3,$$

$$u'_z(z)\big|_{z=x^3} = \frac{-x}{36}.$$

$z - x^3$ дәрежелік айырымы бойынша Тейлор қатарының көмегімен дифференциалдық теңдеудің шешімін табамыз

$$u(z) = u(x^3) + \frac{u'(x^3)}{1!}(z - x^3) + \frac{u''(x^3)}{2!}(z - x^3)^2 + \ldots.$$

Берілген теңдеу мен бастапқы шарттың көмегімен, $u(x^3), u'(x^3), u''(x^3)$ мәндерін алдық:

$$u(z)\big|_{z=x^3} = x^3, \; u'_z(z)\big|_{z=x^3} = \frac{-x}{36},$$

$$u_z''(z)\Big|_{z=x^3} = \frac{1104\left(\frac{-x}{36}\right)^2 - x^3}{-2208x^3\left(\frac{-x}{36}\right)} = \frac{276-9x}{19872x^2}.$$

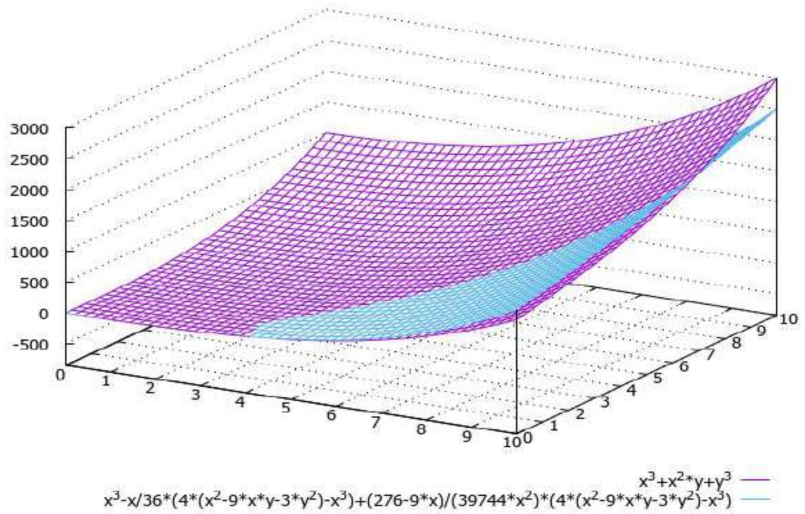
Онда

$$u(z) = x^3 - \frac{x}{36}\left(z - x^3\right) + \frac{276-9x}{39744x^2}\left(z - x^3\right)^2 + \ldots .$$

Ондай болса, берілген теңдеудің жуық шешімі

$$w(x,y) = x^3 - \frac{x}{36}\left(4(x^2 - 9xy - 3y^2) - x^3\right) + \frac{276-9x}{39744x^2}\left(4(x^2 - 9xy - 3y^2) - x^3\right)^2 + \ldots .$$

Берілген теңдеудің $w = x^3 + x^2y + y^3$ нақты шешімін қолдана отырып,қарастырылған есептің нақты және жуық шешімі Grafikus сервисі арқылы үш өлшемді графиктер салынған (сурет 1).



Сурет 1. Нақты және жуық шешімінің графиктері

Енді біртекті емес Монжа-Ампер теңдеуі үшін сызықты емес есепті қарастырайық

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x)y^k, \tag{4}$$

$$u(0,y) = \varphi(y), \tag{5}$$

$$u_x'(0,y) = \psi(y). \tag{6}$$

(4) теңдеу дербес туындылы сызықты емес дифференциалдық теңдеу болып табылады. (4)-(6) есептің нақты шешімін келесі түрде іздейміз:

$$u(x,y) = v(x)y^{\frac{k+2}{2}},$$

онда

$$u_x'(x,y) = v_x'(x)y^{\frac{k+2}{2}},\ u_{xy}''(x,y) = \frac{k+2}{2}v_x'(x)y^k,\ u_{xx}''(x,y) = v_{xx}''(x)y^{\frac{k+2}{2}},$$

$$u_{yy}''(x,y) = \frac{k+2}{2}\cdot kv(x)y^{k-1},$$

$v = v(x)$ белгісіз функцияға қатысты жай дифференциалдық теңдеу үшін есепті аламыз

$$k(k+2)vv''_{xx} - (k+2)^2 (v'_x)^2 + 4f(x) = 0, \tag{7}$$

$$v(0) = \varphi(y) y^{-\frac{k+2}{2}}, \; v'_x(0) = \psi(y) y^{-\frac{k+2}{2}}. \tag{8}$$

(7), (8) есепті шешу үшін тізбекті жуықтау әдісін қолданамыз. Жаңа айнымалыны енгізу арқылы

$$w(x) = v'_x(x)$$

(7), (8) жай дифференциалдық теңдеулер үшін есеп пара-пар интегралдық теңдеулержүйесіне келтіріледі

$$w(x) = \psi(y) y^{-\frac{k+2}{2}} + \int_0^x \frac{(k+2)^2 [w(\xi)]^2 - 4f(\xi)}{k(k+2)v} d\xi,$$

$$v(x) = \varphi(y) y^{-\frac{k+2}{2}} + \int_0^x w(\xi) d\xi.$$

Содан кейін соңғы жүйенің шешімі

$$w_{n+1}(x) = \psi(y) y^{-\frac{k+2}{2}} + \int_0^x \frac{(k+2)^2 [w_n(\xi)]^2 - 4f(\xi)}{k(k+2)v_n} d\xi,$$

$$v_{n+1}(x) = \varphi(y) y^{-\frac{k+2}{2}} + \int_0^x w_n(\xi) d\xi.$$

формулалар бойынша тізбектей жуықтау әдісі арқылы ізделінеді.

Бастапқы жуықтау ретінде

$$v(0) = \varphi(y) y^{-\frac{k+2}{2}}, \; w(0) = \psi(y) y^{-\frac{k+2}{2}}.$$

алуға болады.

2 мысал.

$$\left(\frac{d^2u}{dxdy}\right)^2 - \left(\frac{d^2u}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2u}{dy^2}\right) = 24x^2y^4,$$

$$u(0, y) = y,$$

$$u'_x(0, y) = 1,$$

есеп берілсін. Нақты шешімі $u = x^2y^3 + x + y$ функциясы.

Берілген есептің шешімін келесі түрде іздейміз

$$u(x, y) = v(x) y^3,$$

мұндағы $v = v(x)$функциясыжай дифференциалдық теңдеумен сипатталады

$$24vv''_{xx} - 36(v'_x)^2 + 96x^2 = 0$$

$$v(0) = \frac{1}{y^2}, \; v'_x(0) = \frac{1}{y^3}.$$

$w(x) = v'_x(x)$ жаңа айнымалыны енгіземіз және пара-пар интегралдық теңдеулер жүйесіне келтіреміз

$$w(x) = \frac{1}{y^3} + \int_0^x \frac{3[w(\xi)]^2 - 8\xi^2}{2v} d\xi, \; v(x) = \frac{1}{y^2} + \int_0^x w(\xi) d\xi.$$

Бастапқы жуықтау ретінде

$$v_0 = \frac{1}{y^2}, \; w_0 = \frac{1}{y^3}.$$

деп аламыз.

Содан кейін соңғы жүйенің шешімі

$$w_{n+1}(x) = \frac{1}{y^3} + \int_0^x \frac{3[w_n(\xi)]^2 - 8\xi^2}{2v_n} d\xi, \; v_{n+1}(x) = \frac{1}{y^2} + \int_0^x w_n(\xi) d\xi.$$

формулалар бойынша тізбектей жуықтау арқылы ізделінеді.

Онда бірінші қадамнан

$$w_1(x) = \frac{1}{y^3} + \int_0^x \left(\frac{3}{2y^4} - 4\xi^2 y^2 \right) d\xi = \frac{1}{y^3} + \frac{3x}{2y^4} - \frac{4}{3} x^3 y^2,$$

$$v_1(x) = \frac{x + y}{y^3},$$

$$u_1(x, y) = y + x$$

аламыз.
Екінші қадамда

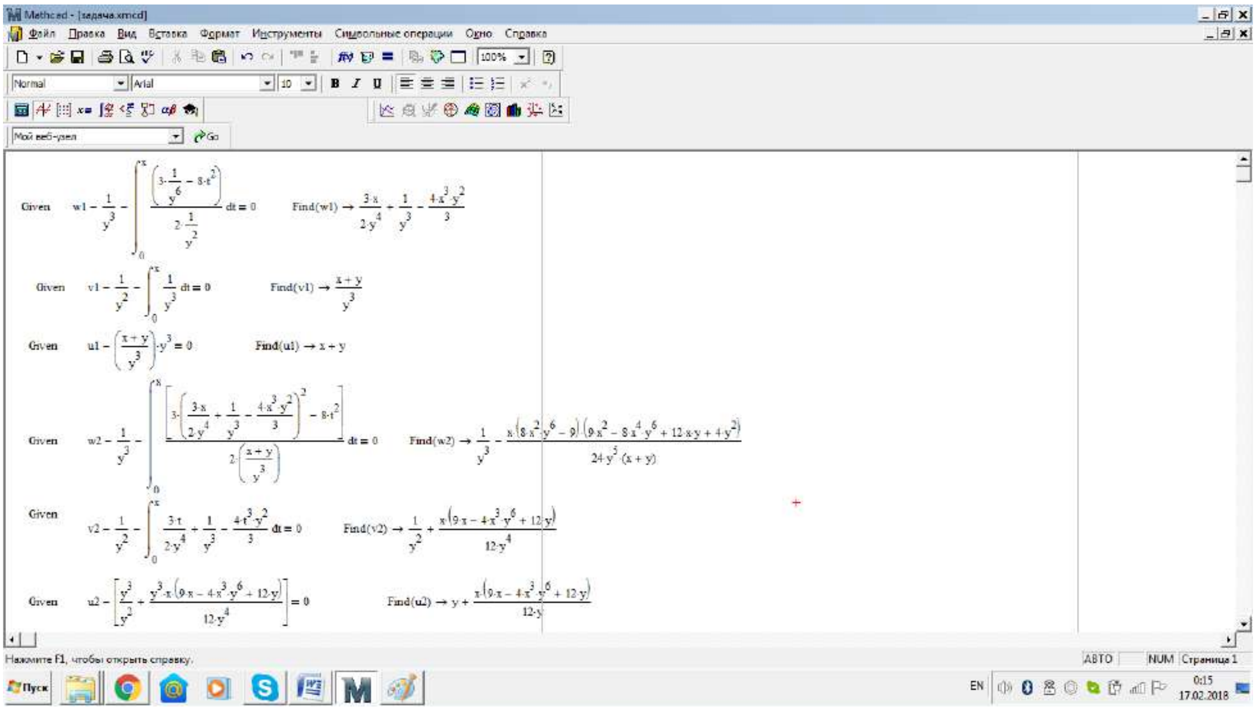
$$w_2(x) = \frac{1}{y^3} + \int_0^x \frac{3\left[\frac{1}{y^3} + \frac{3\xi}{2y^4} - \frac{4}{3}\xi^3 y^2\right]^2 - 8\xi^2}{2 \cdot \left(\frac{x + y}{y^3}\right)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{y^3} - \frac{x(8x^2 y^6 - 9)(9x^2 - 8x^4 y^6 + 12xy + 4y^2)}{24y^5 (x + y)},$$

$$v_2(x) = \frac{1}{y^2} + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{3\xi}{2y^4} - \frac{4}{3}\xi^3 y^2 \right) d\xi = \frac{1}{y^2} + \frac{x(9x - 4x^3 y^6 + 12y)}{12y^4},$$

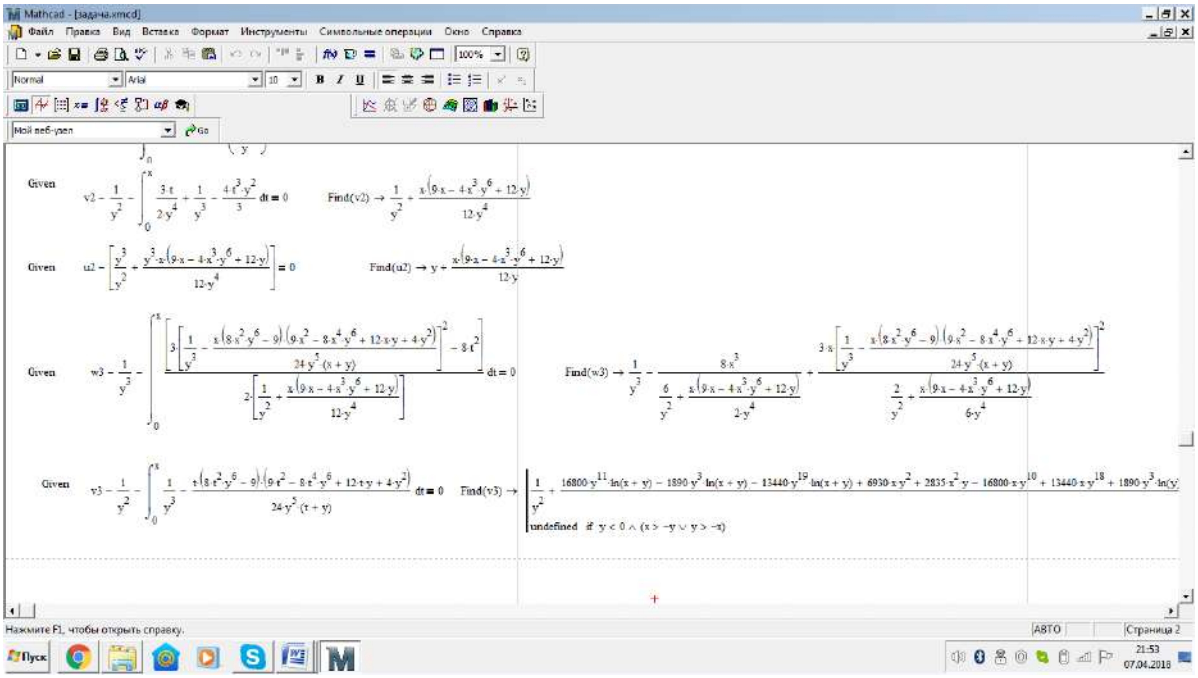
$$u_2(x, y) = v_2(x) y^3 = y + x + \frac{3x^2}{4y} - \frac{x^3 y^5}{3}.$$

Есептің жуық шешімін табуда Mathcad бағдарламалық пакеті қолданылды (2 сурет).



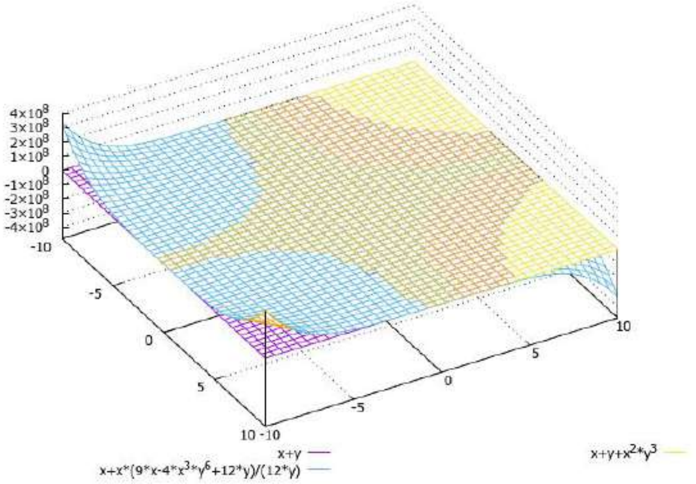
2 сурет.

Mathcad бағдарламалық пакеті [5-6] параметрі бар есептерді шешумен ғана емес, сонымен қатар берілген интегралдың шешімі бар айнымалыларға арналған шарттарды анықтайды (3 сурет).



3 сурет.

4-суретте нақты және жуық алынған шешімдердің үш өлшемді графигі келтірілген.



4 сурет. Нақты және жуық шешімнің графиктері

3 мысал.

$$\left(\frac{d^2w}{dxdy}\right)^2-\left(\frac{d^2w}{dx^2}\right)\left(\frac{d^2w}{dy^2}\right)=f\left(ax^2+bxy^2+cy^2+kx+sy\right),$$

$$w(0,y)=\varphi(y),$$

$$w(x,0)=\psi(x).$$

Берілген есептің шешімін келесі түрде іздейміз

$$w(x,y)=u(z),\quad z=ax^2+bxy+cy^2+kx+sy,$$

мұндағы *u=u(z)* функциясыжай дифференциалдық теңдеумен сипатталады

$$2\left[\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks\right]u'_z\,u''_{zz}+\left(4ac-b^2\right)\left(u'_z\right)^2+f(z)=0.$$

$v(z)=(u'_z)^2$ ауыстыру арқылы бірінші ретті сызықты теңдеуге келтіреміз

$$2\left[\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks\right]v'+\left(4ac-b^2\right)v=-f(z).$$

Біртекті теңдеуді қарастырайық

$$2\left[\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks\right]v'=-\left(4ac-b^2\right)v,$$

$$\frac{dv}{v}=-\frac{4ac-b^2}{2\left[\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks\right]}dx,$$

$$v=\frac{C}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks}},$$

С тұрақтыны z-ке тәуелді деп есептей отырып, табылған біртекті теңдеудің шешімін берілген теңдеуге қоямыз

$$v'=\frac{C'(z)\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks}-\dfrac{C(z)\left(4ac-b^2\right)}{2\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks}}}{\left(4ac-b^2\right)z+as^2+ck-bks},$$

$$v' = \frac{C'(z)\left(\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks\right) - C(z)\left(4ac-b^2\right)}{2\sqrt{\left(\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks\right)^3}},$$

$$2\left[\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks\right]\cdot \frac{C'(z)\left(\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks\right) - C(z)\left(4ac-b^2\right)}{2\sqrt{\left(\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks\right)^3}} +$$

$$+\left(4ac-b^2\right)\cdot \frac{C(z)}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks}} = -f(z),$$

$$C'(z)\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks} = -f(z),$$

$$C'(z) = -\frac{f(z)}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks}},$$

$$C(z) = C_1 - \int \frac{f(z_1)dz_1}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z_1 + as^2 + ck - bks}},$$

Табылған c(z) мәнін біртекті теңдеудің шешіміне қоямыз

$$v(z) = \frac{1}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks}}\cdot\left(C_1 - \int \frac{f(z_1)dz_1}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z_1 + as^2 + ck - bks}}\right).$$

$$u_z'(z) = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks}}\cdot\sqrt{C_1 - \int \frac{f(z_1)dz_1}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z_1 + as^2 + ck - bks}}},$$

осы жерден

$$u(z) = \int \frac{\sqrt{C_1 - \int \frac{f(z_1)dz_1}{\sqrt{\left(4ac-b^2\right)z_1 + as^2 + ck - bks}}}}{\sqrt[4]{\left(4ac-b^2\right)z + as^2 + ck - bks}}dz + C_2.$$

Пайдаланылған әдебиеттер тізімі

1 Погорелов А.В. Многомерные уравнения Монжа-Ампера. Наука. 1988. – 264 с.

2 Погорелов А.В. Об уравнениях Монжа-Ампера эллиптического типа. 1960. – 264 с.

3 Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001 -576с.

4 Зайцев В.Ф., Полянин А.Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными: Точные решения. М.: Международная программа образования, 1996. – 496 с.

5 Охорзин В.А. Компьютерное моделирование в системе Mathcad. – М.: Финансы и статистика, 2006. – 144с.

6 Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах Mathcad 12, MATLAB 7, Maple 9. – М: НТ Пресс, 2006. – 496с.